BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

WEIERSTRASS

Sur un théorème de M. Mittag-Leffler et sur la théorie des fonctions uniformes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, n° 1 (1881), p. 113-124

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_113_1>

SUR UN THÉORÈME DE M. MITTAG-LEFFLER ET SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS UNIFORMES;

PAR M. WEIERSTRASS.

1. Dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Stockholm (²) pour l'année 1877, M. Mittag-Leffler a donné quelques théorèmes très remarquables qui font suite aux recherches que j'ai publiées dans les *Mémoires de l'Académie de*

(¹) *Voir* J.-A. SERRET, *Traité de Calcul intégral*, p. 186.

(²) *Öfversigt af kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 1877 (voir *Bulletin*, III_2, 269).

Berlin, pour l'année 1876, sur les fonctions analytiques uniformes d'une variable. Parmi ces théorèmes, le plus important est le suivant, sur lequel je vais insister, parce qu'il m'a servi à compléter sur plusieurs points essentiels les résultats de mon travail.

Soient données :

1° *Une suite indéfinie de grandeurs déterminées*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

toutes inégales et satisfaisant à la condition

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty;$$

2° *Une suite indéfinie de fonctions rationnelles d'une variable* x,

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,$$

telles que $f_\nu(x)$ *soit infinie au point* a_ν *et seulement en ce point, et s'annulant en outre pour* $x = \infty$.

On peut toujours construire une fonction analytique uniforme $F(x)$ *dont le point* ∞ *soit un point singulier essentiel, qui soit infinie aux points* $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$, *et seulement en ces points, telle enfin que la différence*

$$F(x) - f_\nu(x)$$

ait au point $x = a_\nu$ *une valeur finie, la fonction* $F(x)$ *pouvant se mettre, dans un domaine déterminé autour de ce point, sous la forme*

$$f_\nu(x) + \mathfrak{P}(x - a_\nu) \quad (^1).$$

M. Mittag-Leffler prouve ce théorème en montrant que, des fonctions données

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,$$

on peut déduire une suite d'autres fonctions rationnelles

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x),\ \ldots,$$

(1) Le symbole $\mathfrak{P}(x)$ désigne, comme dans le Mémoire classique de M. Weierstrass, une série procédant suivant les puissances entières et positives de x.

telles que les différences

$$F_1(x) - f_1(x),\ F_2(x) - f_2(x),\ F_3(x) - f_3(x),\ \ldots$$

soient des fonctions entières de x ou des constantes, telles enfin que la série indéfinie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

converge uniformément, à l'exception des points $a_1, a_2, a_3, \ldots$, d'où il suit que cette série représente une fonction $F(x)$ ayant les propriétés demandées.

On peut former les fonctions $F_\nu(x)$ d'une façon plus simple que n'a fait M. Mittag-Leffler, et par suite simplifier notablement la démonstration de son théorème.

Imaginons une suite indéfinie de quantités positives

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots$$

dont la somme ait une valeur finie, et désignons par ε une certaine quantité arbitraire et soumise à la seule condition d'être positive et inférieure à 1.

Si maintenant, pour une valeur déterminée de ν, on a $a_\nu = 0$, on prendra

$$F_\nu(x) = f_\nu(x);$$

mais, si a_ν est différent de zéro, on développera $f_\nu(x)$ en une série procédant suivant les puissances de x,

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} x^\mu,$$

qui converge pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < 1 \quad (^1);$$

on peut maintenant déterminer un nombre entier m_ν tel que, pour

(1) Le symbole $|a|$ désigne le module de la quantité a.

les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$\left|\frac{x}{a_\nu}\right| \leqq \varepsilon,$$

le module de

$$\sum_{\mu=m_\nu}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} x^\mu$$

soit plus petit que ε_ν (¹).

Ce nombre m_ν étant déterminé, on prendra

$$F_\nu(x) = f_\nu(x) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} A_\mu^{(\nu)} x^\mu.$$

On doit remarquer qu'il faut prendre $F_\nu(x) = f_\nu(x)$ quand $m_\nu = 0$ et que l'on a

$$F_\nu(x) = x^{m_\nu} \varphi_\nu(x),$$

$\varphi_\nu(x)$ étant une fonction rationnelle qui, de même que $f_\nu(x)$, devient infinie seulement pour $x = a_\nu$, et qui s'annule pour $x = \infty$.

Soient maintenant x_0 une valeur quelconque, mais finie et déterminée de x, qui n'appartienne pas à la suite

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots.$$

(¹) Après avoir pris une quantité positive ε_0 inférieure à 1, mais supérieure à ε, on déterminera une quantité g telle que pour toute valeur de x dont le module est égal à $\varepsilon_0 |a_\nu|$ on ait

$$|f_\nu(x)| \leqq g;$$

on a alors

$$|A_\mu^{(\nu)}| \leqq g\, |\varepsilon_0 a_\nu|^{-\mu},$$

et par conséquent, si $\left|\dfrac{x}{a_\nu}\right| < \varepsilon$,

$$|F_\nu(x)| = \left|\sum_{\mu=m}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} x^\mu\right| \leqq g \sum_{\mu=m}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^\mu \quad \text{ou} \quad \frac{g}{1-\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m,$$

d'où l'on voit que l'on peut prendre pour m_ν la plus petite valeur de m qui rende $\dfrac{g}{1-\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m$ inférieur à ε_ν.

et ρ une quantité positive assez petite pour que, parmi les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$|x - x_0| \leqq \rho,$$

il ne se trouve aucune des quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots$; on peut, en désignant par δ une quantité donnée, aussi petite qu'on le veut, trouver un nombre entier r tel que pour toutes ces valeurs de x, et pourvu que ν soit égal ou supérieur à r, on ait

$$\left|\frac{x}{a_\nu}\right| \leqq \varepsilon,$$

$$|F_\nu(x)| < \varepsilon_\nu,$$

et, par conséquent,

$$\left|\sum_{\nu=r}^{\infty} F_\nu(x)\right| < \delta.$$

La série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

converge donc et converge uniformément, pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$|x - x_0| \leqq \rho;$$

elle peut donc, d'après un théorème connu, être mise sous la forme d'une série ordinaire procédant suivant les puissances entières et positives de $x - x_0$.

Si maintenant a_λ est l'une quelconque des quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et si l'on prend ρ assez petit pour qu'aucune de ces quantités, sauf a_λ, ne se trouve parmi les valeurs de x pour lesquelles on a

$$|x - a_\lambda| \leqq \rho,$$

il résulte de ce qui précède que pour ces valeurs de x la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) - F_\lambda(x)$$

converge uniformément et qu'elle peut être mise sous la forme

$$\mathfrak{P}(x - a_\lambda),$$

en sorte que l'on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) = F_\lambda(x) + \mathfrak{P}(x - a_\lambda) = f_\lambda(x) + \mathfrak{P}_1(x - a_\lambda).$$

En résumé, la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

définit une fonction $F(x)$ qui jouit des propriétés énoncées dans le théorème de M. Mittag-Leffler.

Il convient de faire encore la remarque suivante : si $G(x)$ désigne une fonction entière quelconque de x, rationnelle ou transcendante, et si l'on pose

$$\overline{F(x)} = F(x) + G(x),$$

$\overline{F(x)}$ jouit, comme $F(x)$, des propriétés qui viennent d'être établies ; inversement, si $\overline{F(x)}$ et $F(x)$ sont deux telles fonctions, leur différence est une fonction entière de x.

2. Soit maintenant $F(x)$ une fonction analytique uniforme de x, n'ayant pas d'autre point singulier essentiel que le point ∞ et devenant infinie pour un nombre quelconque de valeurs de la variable

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots.$$

Si ces valeurs sont en nombre infini, on les supposera ordonnées de façon que

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty.$$

Si a_ν est un infini multiple de la fonction $F(x)$, d'ordre l_ν, on pourra, dans un domaine déterminé autour du point a_ν, mettre

$$(x - a_\nu)^{l_\nu} F(x)$$

sous la forme

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} C_\mu^{(\nu)} (x - a_\nu)^\mu,$$

et, si l'on pose

$$f_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{l_\nu - 1} C_\mu^{(\nu)}(x - a_\nu)^{-l_\nu+\mu},$$

on aura

$$F(x) = f_\nu(x) + \mathfrak{P}(x - a_\nu),$$

$f_\nu(x)$ étant une fonction rationnelle de x, qui devient infinie seulement pour $x = a_\nu$ et qui s'annule pour $x = \infty$.

Si maintenant des fonctions

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots$$

on déduit les fonctions

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x),\ \ldots,$$

comme il a été expliqué dans le paragraphe précédent, en prenant toutefois

$$F_\nu(x) = f_\nu(x),$$

si le nombre des infinis de $F(x)$ est fini, la différence

$$F(x) - \sum_\nu F_\nu(x)$$

ne sera infinie pour aucune valeur finie de x, et l'on aura

$$F(x) = \sum_\nu F_\nu(x) + G(x),$$

où $G(x)$ est une fonction entière de x.

Si l'on met $G(x)$ sous la forme $\sum_\nu g_\nu(x)$, en désignant par $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... des fonctions rationnelles entières de x, et si l'on pose

$$\mathfrak{F}_\nu(x) = F_\nu(x) + g_\nu(x),$$

on aura

$$F(x) = \sum_\nu \mathfrak{F}_\nu(x);$$

par conséquent, *toute fonction analytique uniforme qui n'a pas* *de points singuliers essentiels à distance finie peut être mise sous la forme d'une somme de fonctions rationnelles de la variable x, dont chacune n'a qu'un seul infini situé à distance finie.*

Cette proposition n'était connue jusqu'à présent que pour les fonctions rationnelles et pour quelques fonctions transcendantes.

3. Des deux théorèmes démontrés dans les paragraphes précédents on déduit aisément les propositions suivantes :

A. *Soient données :*

1° *Une quantité déterminée c et une suite indéfinie de quantités*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$

différentes de c, toutes différentes entre elles et satisfaisant à la condition

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = c;$$

2° *Une suite indéfinie de fonctions rationnelles*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots$$

telles que $f_\nu(x)$ n'ait pas d'autre infini que $x = a_\nu$ et s'annule pour $x = c$.

On peut toujours former une fonction analytique uniforme $F(x)$, *avec le seul point singulier essentiel c, ne devenant infinie qu'aux points a_1, a_2, a_3, ..., et cela de telle sorte que*

$$F(x) - f_\nu(x)$$

ait une valeur finie au point $x = a_\nu$.

Cette fonction $F(x)$ *peut être mise sous la forme*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x),$$

où $F_\nu(x)$ *est une fonction rationnelle qui peut être mise sous la forme*

$$f_\nu(x) + G_\nu\left(\frac{1}{x-c}\right).$$

B. *Toute fonction analytique uniforme* $F(x)$ *avec le seul* *point singulier essentiel c peut être mise sous la forme d'une somme de fonctions rationnelles de la variable x, telles que chacune de ces fonctions n'ait qu'un seul infini différent du point c.*

Ces théorèmes se déduisent de ceux qui sont démontrés n^{os} 1 et 2, si l'on pose

$$\frac{1}{x-c} = x'.$$

et que l'on regarde $F(x)$ comme une fonction de x'.

Le théorème B fait suite aux théorèmes développés dans les n^{os} 2 et 3 de mon Mémoire.

4. Dans ce même Mémoire, j'ai donné (n° 7) deux expressions générales pour une fonction analytique uniforme d'une variable x ayant n points singuliers essentiels $c_1, \ldots, c_n$, à savoir :

$$(1) \qquad \frac{\sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)}{\sum_{\lambda=1}^{n} G_{n+\lambda}\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)},$$

$$(2) \qquad \frac{\prod_{\lambda=1}^{n} G_\lambda\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)}{\prod_{\lambda=1}^{n} G_{n+\lambda}\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)} R^*(x),$$

où $R^*(x)$ est une fonction rationnelle de x ne pouvant devenir nulle ou infinie qu'aux points $c_1, \ldots, c_n$.

Si maintenant on désigne par $F(x; c)$ une fonction analytique uniforme de x avec le seul point singulier essentiel c, l'expression (2) peut se mettre sous la forme

$$(2_1 a) \qquad \prod_{\lambda=1}^{n} F_\lambda(x; c_\lambda).$$

L'expression

$$(3) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} F_\lambda(x; c_\lambda)$$

représente aussi une fonction uniforme avec n points singuliers essentiels $c_1, \ldots, c_n$; mais les moyens employés dans le Mémoire cité ne suffisent pas pour démontrer que chaque fonction semblable peut être représentée sous la forme (3), proposition que je veux démontrer maintenant à l'aide du théorème A (3).

Soit $F(x)$ une fonction quelconque de x, de la nature définie plus haut; on partagera le *champ* de la variable x en n parties telles que chacune d'elles contienne dans son intérieur un de ces points $c_1, \ldots, c_n$, et que sur le contour commun à deux parties $F(x)$ ait toujours une valeur finie. Désignons par C_λ la région où se trouve c_λ.

Supposons maintenant que, pour une valeur déterminée de λ, C_λ contienne un nombre infini de points singuliers non essentiels de la fonction considérée, à savoir

$$a_1^{(\lambda)}, \quad a_2^{(\lambda)}, \quad a_3^{(\lambda)}, \quad \ldots,$$

et que ces points soient rangés de façon que

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(\lambda)} = c_\lambda,$$

On déterminera une suite de fonctions rationnelles

$$f_1^{(\lambda)}(x), \quad f_2^{(\lambda)}(x), \quad f_3^{(\lambda)}(x), \quad \ldots$$

telles que $f_\nu^{(\lambda)}(x)$ ne devienne infinie qu'au point $x = a_\nu^{(\lambda)}$, et telles que, la différence

$$F(x) - f_\nu^{(\lambda)}(x)$$

ayant en ce point une valeur finie $f_\nu^{(\lambda)}$, s'annule pour $x = c_\lambda$. D'après le théorème A (3), on peut construire une fonction uniforme $F^{(\lambda)}(x)$ admettant le seul point singulier essentiel c_λ, devenant infinie seulement aux points $a_1^{(\lambda)}$ $a_2^{(\lambda)}$, $a_3^{(\lambda)}$, ..., telle enfin que la différence

$$F^{(\lambda)}(x) - f_\nu^{(\lambda)}(x)$$

ait au point $x = a_\nu^{(\lambda)}$ une valeur finie. Il suit de là que la fonction

$$F(x) - F^{(\lambda)}(x)$$

n'a, à l'intérieur et sur le contour de C_λ, aucun autre point singulier essentiel que c_λ.

Si maintenant C_λ ne contient qu'un nombre fini de points singuliers non essentiels de la fonction $F(x)$, à savoir

$$a_1^{(\lambda)}, \quad a_2^{(\lambda)}, \quad \ldots,$$

on posera

$$F^{(\lambda)}(x) = f_1^{(\lambda)}(x) + f_2^{(\lambda)}(x) + \ldots,$$

les fonctions $f_1^{(\lambda)}(x)$, $f_2^{(\lambda)}(x)$, ... ayant la même signification que plus haut; $F^{(\lambda)}(x)$ ne deviendra infinie qu'aux points $a_1^{(\lambda)}$, $a_2^{(\lambda)}$, ..., et la fonction

$$F(x) - F^{(\lambda)}(x)$$

ne possède encore, à l'intérieur et sur le contour de C_λ, aucun autre point singulier essentiel que c_λ.

Dans le cas, enfin, où C_λ ne contiendrait aucun point singulier non essentiel de la fonction $F(x)$, on posera

$$F^{(\lambda)}(x) = 0.$$

Les fonctions $F^{(\lambda)}(x)$, ..., $F^{(n)}(x)$ étant ainsi déterminées, l'expression

$$F(x) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} F^{(\lambda)}(x)$$

est une fonction uniforme de x, qui n'a pas d'autres points singuliers (essentiels ou non) que les points c_1, ..., c_n, et peut ainsi être mise (n° 5 du Mémoire cité) sous la forme

$$\sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda\left(\frac{1}{x - c_\lambda}\right),$$

où $G_\lambda\left(\frac{1}{x - c_\lambda}\right)$ est une fonction entière de $\frac{1}{x - c_\lambda}$.

Si l'on pose maintenant

$$F_\lambda(x; c_\lambda) = F^{(\lambda)}(x) + G_\lambda\left(\frac{1}{x - c_\lambda}\right),$$

on aura

$$F(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} F_\lambda(x; c_\lambda).$$

Puisque les fonctions $F^{(\lambda)}(x)$, $G_\lambda\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)$, dans tout le champ de la variable x, ne possèdent pas de point singulier essentiel autre que le point c_λ, il en est de même de la fonction $F_\lambda(x;c_\lambda)$; d'ailleurs, de la supposition que $F(x)$ a n points singuliers essentiels il résulte nécessairement que c_λ en est un.

Il faut remarquer que deux des fonctions $F_1(x;c_1)$, $F_2(x;c_2)$, ... n'ont pas d'infinis communs.

La proposition qui vient d'être établie au moyen du théorème communiqué par M Mittag-Leffler n'est démontrée dans mon Mémoire que pour le cas où la fonction $F(x)$ n'a pas, ou a un nombre fini, de points singuliers non essentiels (*voir* le n° 5).

Si l'on met maintenant chacune des fonctions $F_\lambda(x;c_\lambda)$ sous la forme B (3), on obtient une nouvelle expression générale d'une fonction analytique uniforme ayant un nombre fini de points singuliers essentiels ; cette expression se présente sous la forme d'une série infinie, dont les termes sont tous des fonctions rationnelles de la variable x. Cette série converge uniformément pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à une région qui ne contient, ni à son intérieur ni sur ses limites, aucun des points singuliers de la fonction $F(x)$.