BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

ARNOLD SACHSE

Essai historique sur la représentation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une série trigonométrique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 83-112

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_83_0>

ESSAI HISTORIQUE
SUR LA REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION ARBITRAIRE
D'UNE SEULE VARIABLE
PAR UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE;

PAR M. ARNOLD SACHSE.

(SUITE.)

III.

Dans son Mémoire, Riemann a réalisé un progrès considérable et il a ouvert la voie à de nouvelles recherches sur un sujet qui paraissait épuisé, en abandonnant la marche de Dirichlet et en se proposant la question suivante : Quelles sont les propriétés que doit avoir la fonction pour qu'il existe une série trigonométrique qui, partout où elle converge, converge vers la valeur de la fonction?

Dans la solution de ce problème, Riemann ne s'est pas occupé de savoir si la série représente la fonction. De cette manière, il pouvait reprendre la question des conditions nécessaires et suffisantes, ou, plus brièvement, « des conditions nécessaires ». Et, en fait, il a réussi à trouver les conditions nécessaires *pour qu'il y ait une série trigonométrique qui, partout où elle converge, converge vers la fonction.* Mais toutes les fois qu'il est revenu dans la voie de Dirichlet, il a dû, de nouveau, avoir recours aux conditions simplement suffisantes. C'est en ce sens que l'on doit entendre la remarque de Riemann (*loc. cit.*, art. 7) « que l'on doit d'abord rechercher les conditions nécessaires pour que la représentation soit possible, et en déduire ensuite les conditions suffisantes pour cette représentation. » Cette affirmation ne paraît pas tout à fait correcte, si on la prend dans un autre sens; car les conditions suffisantes doivent toujours comprendre toutes les conditions nécessaires, de même qu'inversement les classes de fonctions qui satisfont aux conditions nécessaires doivent comprendre toutes les fonctions qui satisfont seulement aux conditions suffisantes.

Le Mémoire de Riemann se compose de trois Parties. La première est l'historique, auquel nous avons déjà fait de nombreux emprunts. La seconde Partie comprend cette revision des propositions fondamentales de l'Analyse, dont Dirichlet avait déjà reconnu la nécessité et qu'il se proposait d'entreprendre. Avant de poursuivre ses études sur ce sujet, Riemann définit d'une manière précise l'intégrale définie, et il recherche dans quel cas une fonction a une intégrale. Ces recherches sont universellement acceptées et nous pouvons par conséquent nous dispenser de les soumettre à un examen détaillé. A la vérité, M. P. du Bois-Reymond reprend dans ses écrits sur les intégrales de Fourier le point de départ de Cauchy relativement à l'intégrale définie, et il rejette celui de Riemann à cause de son indétermination. Par suite, plusieurs de ses résultats sont écrits d'une manière différente de celle qui est généralement acceptée (¹). Les recherches de Riemann sur les conditions d'intégrabilité des fonctions discontinues dans tout intervalle ont conduit à cette conclusion qu'il y a des fonctions continues n'ayant pas de dérivée. Les travaux de M. Weierstrass ont montré qu'il y a des classes très étendues de fonctions continues n'admettant pas de dérivée. Mais les fonctions continues sans dérivée n'appartiennent nullement, comme le pense M. Schläfli dans le travail déjà cité, à la classe de celles qui échappent entièrement aux méthodes précédemment indiquées. Ni la démonstration de Dirichlet, ni la condition d'intégrabilité de Riemann ne supposent l'existence de la dérivée.

Dans la troisième Partie de son Mémoire, qui traite de la représentation d'une fonction par une série trigonométrique sans aucune hypothèse préliminaire sur la nature de la fonction, Riemann adopte la marche suivante.

Désignons par Ω une série trigonométrique

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_k + \ldots,$$

où

$$A_0 = \frac{b_0}{2}, \quad A_k = a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

et nommons $f(x)$ sa valeur à toutes les places où elle converge.

(¹) Voir *Journal de Borchardt*, t. LXIX, p. 70 et suivantes : *Ueber die* [illegible] *Werthe eines Doppelintegrals*, et *Math. Annalen*, t. VII : *Ueber die sprungweisen Werthveränderungen analytischer Functionen*, en particulier p. 257 et suivantes.

Nous supposerons d'abord que le terme A_k devienne infiniment petit quand k croît indéfiniment, pour toute valeur de x. Riemann prouve alors que la série déduite de Ω par une intégration répétée deux fois

$$F(x) = C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} - \frac{A_1}{1} - \ldots - \frac{A_k}{k^2} - \ldots$$

est convergente pour toute valeur de x, toujours continue et toujours susceptible d'intégration. De plus, il fait voir 1° que, toutes les fois que la série est convergente, l'expression

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x-\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

converge vers $f(x)$ lorsque α et β deviennent infiniment petits, pourvu que leur rapport demeure fini; 2° que l'intégrale

$$\mu^2 \int_b^c F(x) \cos\mu(x-a)\lambda(x)\,dx$$

devient infiniment petite quand μ croît indéfiniment, si b et c sont des limites finies, d'ailleurs arbitraires, si $\lambda(x)$ et $\lambda'(x)$ sont nulles aux limites de l'intégrale et toujours continues entre ces limites, et enfin si $\lambda''(x)$ n'a pas un nombre infini de maxima et de minima.

Ces deux propositions nous montrent que, si une fonction périodique $f(x)$ ayant pour période 2π peut être représentée par une série trigonométrique, de telle manière que la série, toutes les fois qu'elle sera convergente, soit égale à la fonction, il faudra 1° qu'il existe une fonction continue $f(x)$ telle que l'expression

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta)}{4\alpha\beta},$$

où α et β sont des infiniment petits dont le rapport est fini, converge vers $f(x)$.

2° Il faudra, de plus, que l'intégrale

$$\mu^2 \int_b^c F(x) \cos\mu(x-a)\lambda(x)\,dx,$$

où $\lambda(x)$ satisfait aux conditions déjà énoncées, devienne infiniment petite lorsque μ augmente indéfiniment.

Il y a maintenant à rechercher si ses conditions sont suffisantes et à faire voir que, lorsqu'elles sont remplies, il existe une série trigonométrique dans laquelle les coefficients deviennent infiniment petits, et qui est égale à la fonction toutes les fois qu'elle est convergente.

Pour cela Riemann considère la fonction

$$\Phi(x) = F(x) - C'x - A_0 \frac{x^2}{2},$$

et il détermine A_0, C' de telle manière que $\Phi(x)$ ait 2π pour période; puis il développe cette fonction par la méthode de Fourier,

$$F(x) - C'x - A_0 \frac{x^2}{2} = C - \frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{4} \cdots - \frac{A_k}{k^2} - \cdots.$$

On a pour A_n la valeur

$$A_n = -\frac{n^2}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[F(t) - C't - \frac{A_0 t^2}{2}\right] \cos n(x - t)\, dt,$$

et tout se réduit à établir que A_n tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Riemann se contente d'indiquer que cela résulte de l'hypothèse 2°, faite sur $F(x)$; mais cette difficulté a été complètement levée par M. Weber (p. 252 des *Œuvres* de Riemann) et aussi, et de la même manière, par M. Ascoli dans un Mémoire [1] qui est dans ses points essentiels un commentaire de l'écrit de Riemann.

Il est donc démontré que la série

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_n + \ldots$$

a ses termes qui décroissent infiniment; il résulte d'ailleurs de l'hypothèse 1° que, partout où elle converge, elle est égale à $f(x)$.

Riemann établit ensuite (art. 9, III) le théorème très important, que la convergence de la série pour une valeur déterminée ne dépend que de la manière dont se comporte la fonction dans le voisinage de cette valeur.

---

[1] *Annali di Matematica*, série II, t. VI, déc. 1873, p. 21 et 298, *Sulla serie di Fourier*.

On le voit, le Mémoire de Riemann se maintient jusqu'ici dans les généralités. Si nous voulons maintenant reconnaître sous quelles conditions une fonction peut être représentée par une série trigonométrique, nous devrons renoncer à trouver les conditions nécessaires. Riemann considère des cas particuliers dans lesquels les deux conditions générales qu'il a données sont remplies, et alors il reste à rechercher d'après la méthode de Dirichlet pour quelles valeurs de x la série trigonométrique converge effectivement. Riemann montre que ses deux conditions générales sont remplies, quand la fonction (1) ne devient pas infinie, (2) est intégrable, (3) n'a pas un nombre infini de maxima et de minima. Dans ce cas, les coefficients A_n sont ceux de la série de Fourier et cette série, toutes les fois qu'elle est convergente, est égale à la fonction. D'ailleurs la série sera convergente pour toutes les valeurs dans le voisinage desquelles il n'y a pas un nombre infini de discontinuités. Si ces valeurs sont en nombre limité, nous pourrons dire, d'après notre définition, que la série représente la fonction. Si, au contraire, elles sont en nombre illimité, il ne pourra plus être question d'une représentation de la fonction, quoique la série de Fourier puisse encore converger pour une infinité de valeurs de x.

Jusqu'ici Riemann avait laissé de côté le cas où la fonction devient infinie : supposons que la fonction devienne infinie pour la valeur a, mais sans maxima ni minima. Riemann indique dans ce cas, comme conditions de la représentation, d'abord que

$$f(a+t)+f(a-t)$$

puisse être intégrée jusqu'à zéro, et ensuite que $tf(a+t)$, $tf(a-t)$ deviennent infiniment petits avec t. Mais on reconnaitra aisément qu'il n'a pas voulu traiter cette question de la manière la plus précise. C'est ainsi qu'à la condition que la fonction $F'(x)$ puisse être intégrée jusqu'à la valeur a, pour laquelle elle devient infinie, il substitue la condition que $(x-a)F'(x)$ soit infiniment petit avec $(x-a)$, ce qui n'est pas permis en général tant que la fonction $F'(x)$ ne devient pas infinie comme une puissance de $x-a$. Il n'a donc examiné que le cas le plus simple où l'intégrale de Dirichlet converge d'une manière absolue. Du reste, il est possible de montrer par des exemples qu'il n'y a aucun moyen de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence d'une intégrale, qui soient différentes de la définition générale de cette condition.

Riemann a démontré que les coefficients de Fourier deviennent infiniment petits à mesure que leur indice croît, toutes les fois que la fonction demeure finie et qu'elle est susceptible d'intégration. Il est donc à désirer que l'on puisse apprécier l'ordre de grandeur des coefficients et indiquer comment il dépend de leur rang. Si l'on suppose seulement que la fonction soit susceptible d'intégration, cela n'est pas possible, comme le montre la démonstration de Riemann. Mais en faisant des hypothèses plus restrictives on peut arriver au résultat. Nous ferons connaitre ici les théorèmes que M. Heine a donnés (*Handbuch der Kugelfunctionen*, p. 59). Désignons respectivement par A_n et B_n les coefficients de Fourier,

$$\int_0^h f(\beta)\sin n\beta\,d\beta,\quad \int_0^h f(\beta)\cos n\beta\,d\beta.$$

Si la fonction $f(\beta)$ demeure finie et que pour toutes les valeurs de l'argument elle soit plus petite que γ, si en outre il y a entre o et h seulement un nombre fini de maxima et de minima et de solutions de continuité, alors nA_n, nB_n demeurent inférieurs à $G\gamma$, G désignant une constante indépendante de n. Mais si $f(\beta)$ devient infinie pour $\beta = 0$ de telle manière que (ν étant inférieur à 1) le produit $\beta^\nu f(\beta)$ demeure fini quand β tend vers zéro, alors les expressions

$$n^{1-\nu}A_n - \frac{\pi H}{2\Gamma(\nu)\sin\frac{1}{2}\nu\pi},\quad n^{1-\nu}B_n - \frac{\pi H}{2\Gamma(\nu)\cos\frac{1}{2}\nu\pi}$$

où H désigne la valeur de $\beta^\nu f(\beta)$ pour $\beta = +0$, deviennent infiniment petites avec $\frac{1}{n}$. Les produits $n^{1-\nu}A_n$, $n^{1-\nu}B_n$ demeureront donc finis quand n croîtra indéfiniment.

On peut encore obtenir une évaluation si $f(\beta)$, tout en satisfaisant d'ailleurs aux autres conditions indiquées, acquiert pour la valeur o un nombre infini de maxima et de minima, mais de telle manière que la condition de M. Lipschitz soit satisfaite. Séparons dans $A_n = \int_0^h f(\beta)\sin n\beta\,d\beta$ les deux intégrales partielles

$\int_0^{\frac{\pi}{n}} + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}$. Le reste peut être rendu plus petit que $\frac{K}{n}$, où K désigne une constante indépendante de n. Les deux intégrales partielles donnent

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \left[f(\beta) - f\left(\beta + \frac{\pi}{n}\right)\right] \sin n\beta\, d\beta;$$

mais, d'après la condition de M. Lipschitz, on doit avoir en valeur absolue

$$f(\beta) - f\left(\beta + \frac{\pi}{n}\right) < B\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}$$

ou encore

$$f(\beta) - f\left(\beta + \frac{\pi}{n}\right) < \frac{B}{\left(\log \frac{\pi}{n}\right)^{1+\alpha}},$$

α étant plus petit que zéro, et l'intégrale, d'après cela, devient plus petite que

$$B\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1+\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{B'}{n(\log n)^{1+\alpha}},$$

B′ désignant une autre constante.

S'il y a dans l'intervalle plusieurs points pour lesquels la fonction devient infinie ou acquiert une infinité de maxima et de minima, on peut encore obtenir une évaluation en partageant l'intervalle en intervalles partiels dont les limites sont précisément ces points singuliers.

Riemann a montré, nous l'avons vu, que la convergence de la série de Fourier en un point déterminé dépend seulement de la manière dont se comporte la fonction dans le voisinage de ce point; mais il a déduit cette proposition de ses théorèmes généraux. Dans le cas où la fonction est intégrable, il sera utile de donner de ce théorème une démonstration particulière, en partant directement de l'intégrale de Dirichlet à laquelle ramène d'ailleurs la méthode suivie par Riemann. M. Schwarz a donné dans ses leçons une formule d'évaluation pour l'intégrale

$$\int_g^h \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} f(\beta)\, d\beta, \quad 0 < g \leqq h \leqq \frac{\pi}{2},$$

qui conduit immédiatement au but et qui sera encore employée plus loin.

Pour évaluer l'intégrale

$$S = \int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}, \quad 0 < g \leqq h \leqq \frac{\pi}{2},$$

divisons l'intervalle (g, h) en intervalles partiels

$$\left(g, \frac{m\pi}{k}\right), \quad \left(\frac{m\pi}{k}, \frac{(m+1)\pi}{k}\right), \quad \ldots, \quad \left(\frac{m'\pi}{k}, h\right)$$

où l'on a

$$\frac{(m-1)\pi}{k} \leqq g \leqq \frac{m\pi}{k}, \quad \frac{m'\pi}{k} \leqq h \leqq \frac{(m'+1)\pi}{k}.$$

Posons dans le premier intervalle

$$f(\beta) = f\left(\frac{m\pi}{k}\right) + \psi_1(\beta),$$

dans le second

$$f(\beta) = f\left(\frac{m\pi}{k}\right) + \psi_2(\beta),$$

dans le troisième

$$f(\beta) = f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right) + \psi_3(\beta),$$

dans le quatrième

$$f(\beta) = f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right) + \psi_4(\beta),$$

et ainsi de suite, et partageons S en deux parties S′ et S″, dont la première se rapporte aux fonctions f, la seconde aux fonctions ψ. On a maintenant

$$\begin{aligned} S' = f\left(\frac{m\pi}{k}\right)&\left[\int_g^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \int_{\frac{m\pi}{k}}^{\frac{(m+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta\right] \\ + f\left((m+2)\frac{\pi}{k}\right)&\left[\int_{\frac{(m+1)\pi}{k}}^{\frac{(m+2)\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \int_{\frac{(m+2)\pi}{k}}^{\frac{(m+3)\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Posons avec Dirichlet

$$(-1)^{\nu-1}\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \rho_\nu;$$

si l'on remarque que l'on a

$$\int_{\frac{(m-1)\pi}{k}}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin g}\,d\beta = (-1)^{m-1}\frac{2}{\sin g},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} S' = f\left(\frac{m\pi}{k}\right)&\left[\int_g^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta - \int_{\frac{(m-1)\pi}{k}}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin g}\,d\beta\right] \\ &+(-1)^{m-1}\left\{f\left(\frac{m\pi}{k}\right)\left(\frac{2}{k\sin g} - \rho_{m+1}\right)\right. \\ &\qquad\left. + f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right)(\rho_{m+2}-\rho_{m+3}) + \ldots\right\}; \end{aligned}$$

mais on a

$$\int_g^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta - \int_{\frac{(m-1)\pi}{k}}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin g}\,d\beta < \frac{2}{k\sin g}.$$

La seconde partie de S', si l'on désigne par c la plus grande des valeurs de f et si l'on remarque que l'on a $\rho_n < \rho_{n+1}$, est plus petite que

$$c\left[\frac{2}{k\sin g} - (\rho_{m+1}-\rho_{m+2}) - (\rho_{m+3}-\rho_{m+4}) - \ldots\right]$$

et, par suite, on a

$$S' < \frac{4c}{k\sin g},$$

et comme on a

$$\frac{1}{\sin g} > \frac{\pi}{2}\frac{1}{g},$$

puisque g est plus petit que $\frac{\pi}{2}$, on en déduit

$$S' < \frac{2c\pi}{kg}.$$

Il reste encore la seconde partie, S'', de S. Si l'on désigne par $\sigma_l(\beta)$ la valeur absolue de la plus grande oscillation de $f(\beta)$

dans le $q^{\text{ième}}$ intervalle, elle n'est jamais plus petite que la valeur absolue de la fonction correspondante $\psi_q(\beta)$. On a donc

$$S'' < \int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\sin\beta}\,d\beta < \frac{\pi}{2}\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta,$$

où l'on suppose que $\sigma(\beta) = \sigma_q(\beta)$ dans le $q^{\text{ième}}$ intervalle. On a donc pour S l'évaluation

$$S = \int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta < \frac{2c\pi}{kg} + \frac{\pi}{2}\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta.$$

Nous allons maintenant montrer que l'intégrale $\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta$ peut être rendue aussi petite qu'on le veut si l'on prend une valeur suffisamment grande de k, pourvu que la fonction $f(\beta)$ soit intégrable et demeure finie.

En effet, on a

$$\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta < \frac{1}{g}\int_g^h \sigma(\beta)\,d\beta.$$

$\int_g^h \sigma(\beta)\,d\beta$ est certainement plus petit que $\Sigma\sigma_q(\beta)\Delta_q\beta$, en désignant par $\Delta_q\beta$ la grandeur du $q^{\text{ième}}$ intervalle, la somme s'étendant d'ailleurs à tous les intervalles; mais cette somme, d'après la notion même de l'intégrale définie, doit pouvoir être rendue aussi petite que l'on veut par la réduction des grandeurs des intervalles.

Pour démontrer maintenant le théorème de Riemann, partageons l'intégrale de Dirichlet $\int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$ dans les deux parties $\int_0^g + \int_g^h$ où g sera très petit. Supposons d'abord que $f(\beta)$ n'ait pas un nombre infini de maxima et de minima; si l'on applique maintenant à l'intégrale $\int_g^h$ la formule d'évaluation précédente, on pourra prendre k assez grand pour que $\frac{2c\pi}{kg}$, aussi bien que $\frac{\pi}{2}\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta$, soient aussi petits qu'on le voudra.

On peut donc de cette manière s'approcher autant qu'on le voudra de la valeur considérée, puisque la partie de l'intégrale relative à l'intervalle (g, h) ajoute à la valeur de l'intégrale une quantité qui peut être diminuée indéfiniment par une augmentation convenable du nombre k. Il est ainsi démontré que la convergence de la série de Fourier pour une valeur déterminée dépend seulement de la manière dont se comporte la fonction dans le voisinage de cette valeur. On peut alors, au moyen de théorèmes très simples de valeurs moyennes, montrer que la valeur de la série, pour tous les points où la fonction est continue et même pour les points de discontinuité simple, est égale à la fonction. Mais nous allons en outre établir que cela a encore lieu si la fonction a, pour la valeur o de β, une infinité de maxima et de minima, pourvu qu'elle satisfasse à la condition de M. Lipschitz.

Il faut dans ce but calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$. Posons $f(\beta) = f(0) + \varphi(\beta)$, et partageons l'intégrale dans les suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(0)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \left(\int_0^{g} + \int_g^{\frac{\pi}{2}}\right)\varphi(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta.$$

La première intégrale est égale à $\frac{\pi}{2}f(0)$. Comme $f(\beta)$ satisfait à la condition de M. Lipschitz, on peut poser

$$\varphi(\beta) = f(\beta) - f(0) < B\beta^{\alpha} \quad \text{où l'on a} \quad \alpha > 0.$$

La deuxième intégrale J est donc plus petite que $B\int_0^{g}\beta^{\alpha}\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$, et, comme on a $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin\beta}{\beta} \leq 1$, on en déduit

$$J < B\frac{\pi}{2}\int_0^{g}\beta^{\alpha-1}\,d\beta < B\frac{\pi}{2}\frac{g^{\alpha}}{\alpha}.$$

La troisième partie est, d'après la formule d'évaluation déjà donnée, plus petite que

$$\frac{2c\pi}{gk} + \int_g^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta.$$

On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}f(0) + \mathrm{K};$$

où

$$\mathrm{K} < \mathrm{B}\frac{\pi}{2}\frac{g^\alpha}{\alpha} + \frac{2c\pi}{gk} + \int_g^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta.$$

Mais on peut prendre g aussi petit qu'on le veut, puis choisir k assez grand pour que la quantité K devienne aussi petite qu'on le veut, et l'on obtient, par conséquent,

$$\lim_{k=\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}f(0),$$

ce qui démontre la proposition.

Riemann recherche encore, dans l'article **11** de son Mémoire, si une série trigonométrique, dont les termes A_x ne deviennent pas infiniment petits pour chaque valeur de x, est propre à la représentation d'une fonction. Il montre que, s'il s'agit de fonctions n'ayant pas une infinité de maxima et de minima, la série ne peut être égale à la fonction que pour un nombre limité de valeurs de la variable et, par conséquent, est impropre à représenter la fonction (*OEuvres*, p. 242, 245).

Pour ce qui concerne les fonctions ayant une infinité de maxima et de minima, Riemann ne donne aucune règle générale, mais il établit par des exemples [1] les deux théorèmes suivants :

I. *Il existe des fonctions ayant une infinité de maxima et de minima, susceptibles d'intégration et qui cependant ne peuvent être représentées par la série de Fourier.*

II. *Il y a des fonctions ayant un nombre fini de maxima et de minima, n'étant pas susceptibles d'intégration, et qui cependant peuvent être représentées par la série de Fourier.*

---

[1] Ces exemples ont ete soumis a une revision attentive par M. Genocchi : *Atti della Reale Acc. delle Scienze di Torino*, vol. X, 1875, *Intorno ad alcune serie*.

IV.

Le Mémoire de Riemann forme la conclusion naturelle des recherches entreprises uniquement sur la question de la représentation par une série trigonométrique. Les méthodes variées qu'il a appliquées aux séries trigonométriques ont permis aux géomètres d'aborder avec succès l'étude de questions nouvelles, dont nous allons maintenant nous occuper.

Cauchy, dans une Note, avait énoncé le théorème que l'intégrale d'une série est égale à la somme des intégrales de tous ses termes. Cette proposition avait été acceptée sans restriction, et c'est sur elle que reposent toutes les recherches que nous avons analysées jusqu'ici. M. Weierstrass montra que l'on ne peut démontrer le théorème que si la série est uniformément convergente dans l'intervalle de l'intégration, et il entendait par là que, pour toutes les valeurs de la variable, le reste de la série, toujours compté à partir du même terme, peut être rendu plus petit que toute quantité donnée. Cette remarque a trouvé une première application dans le Mémoire de M. Heine sur les séries trigonométriques ([1]). M. Heine y cite un Mémoire de M. Thomé dans lequel l'idée de convergence uniforme est considérée comme tout à fait connue ([2]). Cependant cette notion de la convergence uniforme était déjà contenue dans un Mémoire de M. Seidel publié en 1848 ([3]), et elle semble avoir été pendant longtemps négligée. Cauchy ([4]) avait affirmé qu'une série convergente, dont tous les termes sont des fonctions continues de l'argument, représente toujours une fonction continue. Abel remarqua à ce sujet ([5]) qu'il lui semblait que ce théorème souffre des exceptions, et il cita comme exemple la série

$$\sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \ldots,$$

([1]) *Journal de Borchardt*, t. LXXI. 1870.

([2]) *Ibid.*, t. LXVI, p. 334; 1866.

([3]) *Abh. der Bayerischen Akad.*, 1847-49 : *Note über eine Eigenschaft von Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen.*

([4]) *Analyse algébrique*, p. 131.

([5]) *Journal de Crelle*, t. I, p. 316.

qui, malgré la continuité de ses termes, est discontinue pour $\varphi = (2m+1)\pi$. Pour éclaircir ce point, M. Seidel démontre le théorème suivant : *Si une série convergente dont les termes sont des fonctions continues de l'argument est une fonction discontinue, il y a dans le voisinage d'un point de discontinuité des points pour lesquels la série converge aussi lentement qu'on le veut.* Il distingue deux cas : le premier, lorsque la fonction montre ce que nous appelons aujourd'hui *la convergence uniforme;* alors le théorème de Cauchy est exact; le second, quand la convergence n'est pas uniforme; alors son théorème a lieu. M. Heine démontre aussi qu'une fonction discontinue ne peut jamais être représentée par une série uniformément convergente; mais il introduit d'abord la notion d'une série *uniformément convergente en général,* où il faut entendre, par cette expression *en général,* que l'on doit renoncer à la convergence uniforme dans le voisinage de tous les points de discontinuité. M. du Bois-Reymond (¹) montre que la convergence uniforme ne cesse pas seulement aux points de discontinuité, ce que M. Seidel avait déjà présumé (*loc. cit.*, p. 393) (²).

Il n'est donc pas évident *a priori* qu'une série trigonométrique, qui représente une fonction continue, présente la convergence uniforme.

Par suite de la remarque de M. Weierstrass, il était devenu clair que le procédé employé par Fourier pour la détermination des coefficients par des intégrales définies ne pouvait pas être appliqué sans examen, puisqu'il repose sur la supposition que l'intégrale d'une série convergente est égale à la somme des intégrales de ses différents termes. La méthode suivie par Fourier avait porté les géomètres à conclure que l'on obtient toujours le même développement pour une fonction, quelle que soit la manière dont on opère. Sur ce théorème de l'existence d'un seul développement pour une même fonction, reposaient non-seulement les applications à la Physique, mais aussi plusieurs recherches mathématiques impor-

---

(¹) *Abhandl. der Bay. Akad.*, t. XII, p. 119.

(²) Pour compléter cet historique, il reste à signaler une Note de Cauchy (*Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences*, t. XXXVI, p. 456-458; 1853), où l'illustre géomètre revient sur le théorème qu'il avait donné dans son *Analyse algébrique*, et établit au fond la notion de la convergence uniforme. G. D.

tantes, par exemple la représentation que Jacobi a donnée des racines d'une équation par des intégrales définies. Ce théorème fut donc remis en question. Une démonstration nouvelle en a été entreprise par M. Heine dans le Mémoire cité, et achevée par MM. G. Cantor et P. du Bois-Reymond.

M. Heine remarque qu'il est établi par les travaux de Dirichlet, de Riemann et de Lipschitz, qu'une fonction de x peut être développée sous certaines conditions en une série trigonométrique, mais que l'on ne peut savoir de combien de manières cette représentation peut avoir lieu.

On pourrait peut-être se proposer de démontrer qu'une série trigonométrique, qui représente une fonction continue, converge d'une manière uniforme; mais, comme il n'est pas établi généralement qu'il existe une série jouissant de cette propriété, M. Heine se contente d'abord de démontrer (*lot. cit.*, §§ 7, 9) que la série de Fourier possède la convergence uniforme lorsqu'elle représente une fonction continue, discontinue seulement en un nombre limité de points et n'ayant pas un nombre infini de maxima et de minima. M. Schläfli (dans le travail cité, p. 7) a fait à ce sujet la remarque que la démonstration cesse d'être probante quand la valeur de la variable se rapproche de l'une des valeurs qui font acquérir un maximum ou un minimum. Mais on peut répondre à cette objection et montrer que la proposition subsiste dans tous les cas. M. Schwarz a donné cette démonstration dans une de ses leçons à l'Université; nous allons en faire connaître les points essentiels.

Considérons l'intégrale

$$S = \int_0^{h} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta.$$

Si la fonction $f(\beta)$ n'est jamais croissante entre les limites zéro et h, et si elle demeure constamment positive, en désignant par c sa valeur maximum dans l'intervalle, on a

$$S - \frac{\pi}{2}f(0) < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\left[f(0) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right],$$

où m désigne un nombre positif entier assujetti à l'unique condition que $2m+1$ soit inférieur à k. Cette formule a encore lieu si la fonction n'est jamais décroissante et elle est modifiée d'une manière insignifiante si $f(\beta)$ devient négative. Mais, pour plus de simplicité, nous supposerons dans ce qui va suivre que $f(\beta)$, par l'addition d'une constante convenable, ait été ramenée à être toujours positive. Il reste à examiner ce que devient la formule précédente, lorsque $f(\beta)$ a un nombre fini de maxima et de minima. Supposons, pour fixer les idées, que $f(\beta)$ croisse depuis o jusqu'à g, puis qu'elle décroisse depuis le maximum qui a lieu pour g jusqu'à un minimum ayant lieu pour $\beta = h'$, et ainsi de suite; supposons qu'il y ait en tout μ maxima ou minima entre o et h. Pour évaluer l'intégrale entre g et h', considérons la fonction $f_1(\beta)$ égale à $f(g)$ entre o et g et à $f(\beta)$ entre g et h'. On peut lui appliquer la formule précédente, et l'on a

$$\int_0^{h'} f_1(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f_1(\text{o}) < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\left[f_1(\text{o}) - f_1\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right].$$

Mais la fonction $f(\beta)$ étant continue, on sait que, étant donnée une quantité ε_1 aussi petite qu'on le veut, il existe toujours une quantité δ' telle que l'on ait, quelle que soit la valeur de β prise dans l'intervalle considéré, $f(\beta+\delta'') - f(\beta) < \varepsilon_1$, dès que l'on a $\delta'' \leqq \delta'$ en valeur absolue. Il est clair que l'on peut déterminer $\frac{2m\pi}{k}$ de manière à le rendre inférieur à δ'. Si l'on a alors $\delta' < g$, on obtiendra

$$f_1\left(\frac{2m\pi}{k}\right) = f_1(\text{o}) = f(g),$$

et la formule précédente deviendra

$$\int_0^{h'} f_1(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f(g) < \frac{c}{2m}.$$

Comme on a d'ailleurs

$$\int_0^{g} f(g)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f(g) < \frac{c}{2m},$$

il en résulte que l'on peut écrire

$$\int_g^{h'} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta < \frac{c}{m}.$$

Cette formule s'applique à tous les intervalles suivants entre un maximum et un minimum, de sorte que nous pouvons en conclure

$$S - \frac{\pi}{2}f(o) < (2\mu + 1)\frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\left[f(o) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right],$$

et comme, d'ailleurs, on a

$$f(o) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) < \varepsilon_1,$$

on pourra écrire

$$S - \frac{\pi}{2}f(o) < (2\mu + 1)\frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_1.$$

Mais si la valeur g, contrairement à l'hypothèse faite plus haut, est inférieure à δ' et qu'en outre h' soit supérieure à δ', l'évaluation donnée plus haut pour l'intégrale de g à h' n'a plus lieu, parce qu'ici $f_1\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$ n'est plus constant et égal à $f(g)$. Voici comment on peut lever cette difficulté.

Considérons une fonction $f_1(\beta)$ qui, de o à g, soit égale à $f(\beta)$, et de g à h' à $f(g)$; et une fonction $f_2(\beta)$ qui, de o à g, soit égale à $f(g)$, et de g à h' à $f(\beta)$. Notre première formule est maintenant applicable à $f_1(\beta)$, $f_2(\beta)$, et l'on a

$$\int_0^{h'} f_1(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f(o) < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\left[f(o) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right],$$

$$\int_0^{h'} f_2(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta} - \frac{\pi}{2}f(g) < \frac{c}{2m}.$$

Par l'addition on obtient

$$\int_0^{h'} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f(o) + \int_0^{h'} f(g)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f(g) < \frac{c}{m} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_1.$$

Comme on a, d'ailleurs,

$$\int_0^{h'} f(g)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f(g) < \frac{c}{2m},$$

on en conclut

$$\int_0^{h'} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f(0) < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_1 + \frac{c}{m},$$

et, par suite,

$$S - \frac{\pi}{2}f(0) < \frac{c}{2m} + \frac{2}{\pi}\varepsilon_1 + \frac{c}{m} + (\mu - 1)\frac{c}{m} < (2\mu + 1)\frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_1,$$

comme précédemment.

Jusqu'ici ε_1 était arbitraire. Si on le choisit de telle manière que l'on ait $\varepsilon - \frac{\pi}{2}\varepsilon_1 > 0$, on voit que m peut toujours être choisi de telle manière que $S - \frac{\pi}{2}f(0)$ soit inférieur à ε.

Si l'on applique les considérations précédentes à chacune des deux intégrales de l'expression

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \varphi(x - 2\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \varphi(x + 2\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta,$$

qui est égale à la somme des n premiers termes de la série de Fourier, on établira sans difficulté que la formule précédente s'applique pour toute valeur de x, et, par conséquent, que la série précédente est absolument convergente.

S'il y avait entre 0 et δ' plusieurs maxima et minima, pourvu qu'ils fussent en nombre limité, il y aurait à appliquer plusieurs fois la méthode précédente, et la conclusion ne cesserait pas de subsister.

Il est ainsi démontré qu'il y a en général un développement en série qui possède la convergence uniforme. Mais il pourrait y avoir d'autres développements possédant ou ne possédant pas la convergence uniforme. Or, pour reconnaître l'identité des deux développements, il suffit de former leur différence, qui sera un développement de même nature, devant représenter zéro. Le théorème qu'il s'agit d'établir pour prouver l'existence d'un seul développement est donc le suivant : *Il n'existe pas de série trigonométrique qui converge en général* (c'est-à-dire à l'exception d'un nombre limité de valeurs particulières) *et qui représente zéro, ou, en* *d'autres termes, tous les coefficients de ce développement doivent être identiquement nuls.*

M. Heine n'examine pas cette proposition dans toute sa généralité, mais il la démontre d'une manière complète, en supposant que la série qui représente zéro possède la convergence uniforme en général (c'est-à-dire à l'exception d'un nombre limité de valeurs particulières). Pour cela il montre que, si $A_k = a_k \sin kx + b_k \cos kx$ est le terme général de la série, a_k et b_k doivent devenir infiniment petits avec $\frac{1}{k}$; en se servant ensuite de cette propriété et d'un théorème de Riemann, il conclut que a_k et b_k doivent être identiquement nuls.

Le résultat du travail de M. Heine est donc le suivant : Une fonction finie, discontinue en un nombre limité de points, n'ayant pas un nombre infini de maxima et de minima, peut être développée d'une seule manière en une série douée en général de la convergence uniforme, et ce développement est celui de Fourier.

Il reste maintenant à examiner s'il ne peut pas y avoir d'autres développements qui n'auraient pas la convergence uniforme et qui représenteraient la même fonction. M. G. Cantor s'est occupé de cette question. Il suit la même méthode que M. Heine et il démontre d'abord que, si la série $\Sigma\,(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$ est convergente en général, les coefficients a_n, b_n deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$; toutefois il établit ce théorème sans rien supposer sur la nature de la convergence. Il démontre ensuite qu'une série trigonométrique $\Sigma(c_n \sin nx + d_n \cos nx)$ convergente en général et qui représente zéro, à l'exception d'un nombre fini de places, ne peut exister, c'est-à-dire que les coefficients c_n, d_n sont tous nuls ([1]). M. Kronecker a remarqué ([2]) que le théorème préliminaire est inutile. Considérons, en effet, la différence de deux développements, convergents en général, d'une même fonction,

$$D(x) = C_0 + C_1 + \ldots + C_n + \ldots = 0$$

([1]) *Journal de Borchardt*, t. LXXII, 1870 : *Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz*, et *Math. Annalen*, t. IV, 1871 : *Ueber trigonometrische Reihen.*

([2]) *Journal de Borchardt*. t. LXXII, 1870 : *Beweis dass eine für jeden reellen Werth*, etc.

où

$$C_0 = \frac{d_0}{2}, \quad C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx.$$

Formons la différence

$$D(x+\delta) - D(x-\delta) = e_0 + e_1 \cos x + e_2 \cos 2x + \ldots = 0.$$

On aura

$$e_n = c_n \sin n\delta + d_n \cos n\delta,$$

et, par suite, e_n devra devenir infiniment petit avec $\frac{1}{n}$ si la nouvelle série est convergente en général, ce qui a lieu en vertu des hypothèses primitives. On peut maintenant appliquer à cette fonction le procédé de MM. Heine et Cantor.

Formons la fonction de Riemann

$$F(x) = e_0 \frac{x^2}{2} - e_1 - \frac{e_2}{4} - \frac{e_3}{9} - \ldots;$$

alors

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha^2}$$

devra converger vers zéro; il n'y aura d'exception que pour un nombre limité de valeurs de x. Par suite, d'après une proposition due à M. Schwarz, $F(x)$ devra être une fonction linéaire dans chaque intervalle où la limite demeure nulle, et, en outre, comme l'a montré M. Heine, elle devra être égale à la même fonction linéaire dans tous les intervalles. Ainsi l'on doit avoir

$$e_0 \frac{x^2}{2} - cx - c' = e_1 + \frac{e_2}{4} + \frac{e^3}{9} + \ldots$$

Si l'on multiplie par $\cos n(x-t)$ et que l'on intègre de $-\pi$ à $+\pi$, on voit que, pour chaque valeur de n et pour une infinité de valeurs de t, $c_n \cos nt + d_n \sin nt$ doit s'annuler et, par conséquent, c_n et d_n sont eux-mêmes nuls.

Il est ainsi démontré, par cela même, qu'une fonction, continue en général, qui a seulement un nombre limité de solutions de continuité et qui n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, peut être développée d'une seule manière en une série trigonométrique convergente en général.

M. Cantor est parvenu, en appliquant un théorème de M. Weierstrass, à étendre la proposition précédente aux fonctions qui possèdent un nombre infini de discontinuités, pourvu toutefois que ces discontinuités soient distribuées d'une certaine manière ([1]). S'il y a dans une région limitée un nombre infini de points caractérisés par une propriété déterminée, il résulte, d'un théorème que M. Weierstrass établit dans son Cours, qu'il existe dans cette région au moins une position dans le voisinage de laquelle se trouvent un nombre infini des points considérés, mais il peut y avoir plusieurs positions de ce genre, et même il peut y en avoir un nombre illimité. Appelons l'ensemble de ces positions *le premier groupe dérivé*. S'il contient un nombre infini de points on peut en déduire un second, et ainsi de suite. Si, en opérant de cette manière sur les points de discontinuité d'une fonction, on finit par arriver à un groupe composé d'un nombre limité de points, M. Cantor démontre qu'il est possible d'étendre la démonstration précédente et d'établir le théorème relatif à l'existence d'un seul développement. Cela revient à montrer que, dans les segments séparés par les points de discontinuité, $F(x)$ est toujours la même fonction linéaire de x.

Pour cela, on établit que, dans chacun des intervalles qui sont compris dans les intervalles formés par les points du premier groupe dérivé, il ne peut exister qu'un nombre limité de points de discontinuité, en sorte que la démonstration de M. Heine a lieu pour chacun de ces intervalles. On n'a qu'à répéter ce raisonnement un nombre limité de fois, puisque le dernier groupe dérivé comprend seulement un groupe fini de points pour établir que $F(x)$ est partout la même fonction linéaire.

Nous avons donc le théorème suivant : *Une fonction finie qui possède un nombre fini de discontinuités, de telle manière que l'un des groupes dérivés se compose d'un nombre limité de termes, et qui, d'ailleurs, est développable en une série trigonométrique, ne peut l'être que d'une seule manière*. Une telle fonction est intégrable si elle n'a pas un nombre infini de maxima et de minima; par suite, toutes les fois que la série de Fourier converge, elle a pour

---

([1]) *Math. Ann.*, t. V, 1872 : *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*.

limite la valeur de la fonction et elle est le seul développement possible.

D'après cela, pour toutes ces fonctions, les coefficients de la série doivent être les intégrales de Fourier et d'Euler, et, si l'on démontre directement qu'il en est ainsi, on sera conduit, par une voie différente, aux mêmes résultats que MM. Heine et Cantor. De même, une démonstration qui prouverait que le développement d'une fonction de cette classe ne peut avoir comme coefficients que les intégrales de Fourier rend inutile le théorème relatif à l'existence d'un seul développement pour la fonction. Des démonstrations de ce genre ont été données par MM. Dini (¹) et Ascoli (²); mais elles s'appliquent seulement à des fonctions formant une classe moins étendue que celles dont il est question dans la démonstration de MM. Heine et Cantor, et par conséquent elles ne donnent pas une extension de la théorie.

Nous devons, au contraire, reconnaître un progrès dans les recherches de M. du Bois-Reymond (³) où se trouve démontré le théorème suivant : *De quelque manière qu'une fonction puisse être développée en une série* $f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$ *dont les coefficients* a_n, b_n *deviennent infiniment petits avec* $\frac{1}{n}$, *les coefficients ont toujours la forme*

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha,$$

pourvu toutefois que les intégrales aient un sens.

M. du Bois-Reymond néglige d'indiquer dans l'énoncé la restriction que les coefficients a_n, b_n deviennent infiniment petits; mais il est aisé de voir qu'elle est nécessaire dans la démonstration (*loc. cit.*,

---

(¹) *Sopra la serie di Fourier*, 1872.

(²) *Voir* le Mémoire déjà cité et *Math. Ann.*, t. VI, p. 231-240; 1873.

(³) *Abh. der Bayer. Akad.*, t. XII, p. 117-167, 1875 : *Beweis dass die Coefficienten*, etc.

p. 141). Le théorème précédent comprend celui de MM. Heine et Cantor, et, comme il entraîne cette conséquence que, toutes les fois que le développement sera possible, il sera unique et sera précisément celui de Fourier, il donne aux recherches antérieures le complément qui leur faisait défaut.

Nous allons maintenant exposer les points principaux de la démonstration de M. P. du Bois-Reymond. Nous considérerons d'abord la fonction comme demeurant finie et nous allons, en premier lieu, présenter la démonstration pour les fonctions continues qui n'ont pas un nombre infini de maxima et de minima, démonstration qui, d'ailleurs, ne diffère pas dans ses traits généraux de celle qui avait été donnée par MM. Dini et Ascoli.

Formons la fonction de Riemann

$$\text{(1)}\qquad F(x) = b_0\frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{a_n\sin nx + b_n\cos nx}{n^2}.$$

On a nécessairement, pour toute valeur de x comprise entre $-\pi$ et $+\pi$,

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{-\pi}^{x} d\alpha\int_{-\pi}^{\alpha} f(\beta)\,d\beta = f(x).$$

Formons l'expression

$$\Phi(x) = F(x) - \int_{-\pi}^{x} d\alpha\int_{-\pi}^{\beta} f(\beta)\,d\beta,$$

on en déduit

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\Phi(x+\varepsilon) - 2\Phi(x) + \Phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{\Delta^2\Phi(x)}{\varepsilon^2} = 0,$$

et, par suite,

$$\Phi(x) = c_0 + c_1 x.$$

Donc on a

$$\text{(2)}\qquad F(x) = \int_{-\pi}^{x} d\alpha\int_{-\pi}^{\alpha} f(\beta)\,d\beta + c_0 + c_1 x.$$

Si, multipliant successivement la formule (1) par $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$, 1 on intègre entre $-\pi$ et $+\pi$, on obtient

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha = -\frac{a_n}{n^2}\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = -\frac{b_n}{n^2}\pi + (-1)^n\frac{2\pi b_0}{n^2},$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\, d\alpha = -\frac{\pi^3}{3} b_0.$$

Remplaçons maintenant $F(x)$ par l'expression (2), et déterminons la valeur de l'intégrale au moyen de l'intégration par parties. En remarquant que a_n, b_n et les intégrales $\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha$, $\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha$ doivent devenir nulles avec $\frac{1}{n}$, on trouve d'abord

$$c_0 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\left[\frac{\pi^3}{3} - (\pi-\alpha)^2\right] d\alpha,$$

$$c_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)(\pi-\alpha)\, d\alpha, \quad b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha,$$

et, en général, pour toute valeur de n,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha.$$

On peut ensuite, en suivant la méthode de MM. Heine et Cantor, étendre cette démonstration, relative aux seules fonctions continues, à toutes les fonctions qui ont un nombre fini de maxima et de minima et un nombre infini de discontinuités, mais de telle manière qu'il existe pour les points de discontinuité un groupe dérivé composé d'un nombre limité de points.

La démonstration précédente cesse d'être applicable si la fonction est assujettie à la seule condition d'être intégrable, car on ne peut plus affirmer que $\lim \frac{\Delta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2}$ est toujours égale à zéro.

Alors la fonction n'a pas nécessairement en chaque point une valeur déterminée; sa valeur peut osciller entre une limite supérieure et une limite inférieure. Désignons la demi-somme des deux limites inférieure et supérieure de la fonction $f(x)$, pour la valeur x, par $S(x)$, leur demi-différence par $D(x)$. On pourra évidemment donner à la fonction la forme $S(x)+jD(x)$, où j désigne un nombre réel compris entre -1 et $+1$. Si maintenant on forme, d'après la méthode donnée par Riemann, $\lim \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2}$, on trouve

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2} = S(x) + j\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) D(x).$$

On a, d'autre part, à former la même limite pour

$$F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} f(\beta)\, d\beta,$$

et l'on obtient

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\varepsilon^2} = S(x) + j_1 D(x),$$

où j_1 est également compris entre -1 et $+1$. Comme on a $\Phi(x) = F(x) - F_1(x)$, la plus grande valeur que puisse prendre $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2}$ est, on le voit,

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) D(x).$$

Il n'est donc pas possible de démontrer que, pour chaque valeur de x, on a

$$\lim \frac{\Delta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2} = 0.$$

Néanmoins on peut encore établir, en se servant de la condition d'intégrabilité pour $f(x)$, que $\Phi(x)$ est une fonction linéaire de x. Partageons l'intervalle $(x, x+a)$ en intervalles partiels limités aux points $x, x+\delta_1, x+\delta_1+\delta_2, \ldots, x+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}, x+a$ et formons la somme

$$\delta_1 D(x+\rho_1\delta_1) + \delta_2 D(x+\delta_1+\rho_2\delta_2) + \ldots + \delta_n D(x+\delta_1+\ldots+\rho_n\delta_n),$$

où les quantités ρ sont des fractions positives. Cette somme, en vertu de la condition d'intégrabilité, doit s'annuler avec les δ. Il faut donc que, lorsque les δ deviendront nuls, on ait

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2}{\varepsilon^2}[\delta_1\Phi(x+\rho_1\delta_1)+\delta_2\Phi(x+\delta_1+\rho_2\delta_2)+\ldots$$
$$+\delta_n\Phi(x+\delta_1\ldots+\rho_n\delta_n)]=0,$$

ou, ce qui revient au même

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2}{\varepsilon^2}\int_0^a \Phi(x+\alpha)\,d\alpha=0.$$

Il suit de là que, d'après le théorème de M. Schwarz, on a

$$\int_0^a \Phi(x+\alpha)\,d\alpha=c_0+c_1x,$$

c_0, c_1 étant des constantes. Mais on a

$$\int_0^a \Phi(x+\alpha)\,d\alpha=\int_0^a F(x+\alpha)\,d\alpha-\int_0^a F_1(x+\alpha)\,d\alpha.$$

Si l'on désigne par α_1 une quantité intermédiaire entre 0 et a, on a

$$\int_0^a \Phi(x+\alpha)\,d\alpha=a[F(x+\alpha_1)-F_1(x+\alpha_1)],$$

pour a suffisamment petit, et par conséquent

$$F(x+\alpha_1)-F_1(x+\alpha_1)=\frac{c_0}{a}+\frac{c_1}{a}x.$$

Si l'on fait tendre a vers 0, le premier membre prend une valeur déterminée; il doit donc en être de même du second, et par conséquent des constantes $\frac{c}{a}$ et $\frac{c_1}{a}$. On a donc

$$F(x)-F_1(x)=c'_0+c'_1x,$$

où c'_0, c'_1 sont des constantes, et l'on est ainsi ramené à la démonstration déjà donnée.

Si la fonction devenait infinie, il faudrait faire intervenir les conditions de Riemann.

Je pense maintenant avoir indiqué les recherches les plus essentielles sur la représentation des fonctions par les séries trigonométriques, entreprises depuis la publication du travail de Riemann, et il me reste seulement à développer l'exemple donné par M. Schwarz d'une fonction continue pour laquelle la série de Fourier n'est pas partout convergente.

V.

Partageons l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ dans les intervalles suivants devenant de plus en plus petits

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{(1)}\right], \quad \left[\frac{\pi}{(1)} \frac{\pi}{(2)}\right], \quad \ldots, \quad \left[\frac{\pi}{(\lambda-1)}, \frac{\pi}{(\lambda)}\right], \quad \ldots,$$

où l'on a

$$(\lambda) = 1.3.5\ldots(2\lambda+1) \text{ pour } \lambda = 1, 2, 3, \ldots.$$

Considérons une fonction qui dans le $\lambda^{\text{ième}}$ intervalle serait définie par la formule $f(\beta) = c_\lambda \sin(\lambda)\beta$, où les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_\mu, \ldots$ forment une suite décroissante jusqu'à zéro. Cette fonction est évidemment continue; elle décroît lorsque β s'approche de zéro, en présentant une infinité de maxima et de minima d'amplitude décroissante et nous supposons que, pour $\beta = 0$, elle ait la valeur zéro. Pour reconnaître maintenant si la série de Fourier, qui pour toutes les autres valeurs représente la fonction, la représente aussi pour $\beta = 0$, il faut former cette série et obtenir la limite de l'intégrale

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} d\beta.$$

Nous allons faire voir que cette intégrale ne converge pas. Pour cela nous attribuerons seulement à k les valeurs égales à (μ), où μ croîtra indéfiniment. Partageons l'intégrale en intégrales partielles relatives aux intervalles précédents

$$\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta) \frac{\sin(\mu)\beta}{\sin\beta}$$

$$= c_{\mu+1} \int_0^{\frac{\pi}{(\mu)}} \sin(\mu+1)\beta \frac{\sin(\mu)\beta}{\sin\beta} d\beta + c_\mu \int_{\frac{\pi}{(\mu)}}^{\frac{\pi}{(\mu-1)}} \frac{\sin^2(\mu)\beta}{\sin\beta}$$

$$+ \sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} c_\lambda \int_{\frac{\pi}{(\lambda)}}^{\frac{\pi}{(\lambda-1)}} \sin(\lambda)\beta \frac{\sin(\mu)\beta}{\sin\beta} d\beta + c_1 \int_{\frac{\pi}{(1)}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(1)\beta \frac{\sin(\mu)\beta}{\sin\beta} d\beta.$$

Nous allons étudier séparément ces quatre parties. La première intégrale sera divisée en intégrales partielles telles que dans chacune d'elles $\sin(\mu+1)\beta$ conserve son signe. Il résulte alors, de l'application d'un théorème connu sur les valeurs moyennes, que l'intégrale ne peut pas être plus grande que $\int_0^{\frac{\pi}{(\mu)}} \frac{\sin(\mu)\beta}{\sin\beta} d\beta$; c'est la quantité ρ_0 de Dirichlet, qui est elle-même inférieure à $\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$. Ainsi le premier terme de J est plus petit que $c_{\mu+1}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\right)$, et par conséquent s'évanouit lorsque μ grandit indéfiniment.

Pour une des intégrales de la troisième partie J'_λ, on peut appliquer la formule donnée plus haut (p. 92). On a, d'après cela,

$$\mathrm{J}'_\lambda = c_\lambda \int_{\frac{\pi}{(\lambda)}}^{\frac{\pi}{(\lambda-1)}} \sin(\lambda)\beta \frac{\sin(\mu)\beta}{\sin\beta} d\beta < \frac{2\pi c_\lambda}{\frac{\pi}{(\lambda)}\mu} + \frac{\pi}{2} c_\lambda \int_{\frac{\pi}{(\lambda)}}^{\frac{\pi}{(\lambda-1)}} \frac{\sigma_q(\beta)}{\beta} d\beta,$$

où $\sigma_q(\beta)$ désigne la plus grande oscillation de la fonction $\sin(\lambda)\beta$ dans le $q^{\text{ième}}$ intervalle de $\frac{q\pi}{(\mu)}$ à $[q+1]\frac{(\mu)}{\pi}$; mais, comme la différence de deux sinus est toujours plus petite que la différence des arguments, on a

$$\sigma_q(\beta) < [q+1]\frac{\pi}{(\mu)}(\lambda) - q\frac{\pi}{(\mu)}(\lambda),$$

et par conséquent

$$\sigma_q(\beta) < \pi \frac{(\lambda)}{(\mu)},$$

et par suite

$$J'_\lambda < 2c_\lambda \frac{(\lambda)}{(\mu)} + \frac{\pi}{2} c_\lambda \frac{(\lambda)}{(\mu)} \int_{\frac{\pi}{(\lambda)}}^{\frac{\pi}{(\lambda-1)}} \frac{d\beta}{\beta},$$

$$J'_\lambda < 2c_\lambda \frac{(\lambda)}{(\mu)} + \frac{\pi^2}{2} c_\lambda \frac{(\lambda)}{(\mu)} \log[2\lambda + 1].$$

Si l'on forme la somme $\sum\limits_{\lambda=\mu-1}^{2} J'_\lambda$, on obtient pour la troisième partie de l'intégrale J l'évaluation

$$\sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} J'_\lambda < 2c_1 \sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} \frac{(\lambda)}{(\mu)} + \frac{\pi^2}{2} c_1 \sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} \frac{(\lambda)}{(\mu)} \log[2\lambda + 1]$$

ou

$$\sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} J_\lambda - 2c_1 \frac{(\lambda)}{(\mu)} < \frac{\pi^2}{2} c_1 \left\{ \frac{\log[2\mu - 1]}{2\mu + 1} + \frac{\log[2\mu - 3]}{[2\mu + 1][2\mu - 1]} + \ldots + \frac{\log 5}{7 \cdot 9 \ldots [2\mu + 1]} \right\},$$

ou

$$\sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} J'_\lambda - 2c_1 \sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} \frac{(\lambda)}{(\mu)} < \frac{\pi^2}{2} c_1 \frac{\log[2\mu - 1]}{2\mu - 1} \left\{ 1 + \frac{1}{2\mu - 1} + \frac{1}{[2\mu - 1][2\mu - 3]} + \ldots + \frac{1}{[2\mu - 1] \ldots 9 \cdot 7} \right\},$$

ou enfin

$$\sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} J'_\lambda - 2c_1 \sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} \frac{(\lambda)}{(\mu)} < \pi^2 c_1 \frac{\log[2\mu - 1]}{2\mu - 1}.$$

Il résulte de cette inégalité que, μ croissant indéfiniment, la troisième partie $\Sigma J'_\lambda$ tend encore vers zéro.

En employant la même marche, on peut établir le même résultat pour la quatrième; il nous reste donc seulement à étudier la seconde

$$J'' > c_\mu \int_{\frac{\pi}{(\mu)}}^{\frac{\pi}{(\mu-1)}} \frac{\sin^2(\mu)}{\sin\beta} d\beta.$$

Comme tous ses éléments sont positifs, on a

$$J'' > c_\mu \int_{\frac{\pi}{(\mu)}}^{\frac{\pi}{(\mu-1)}} \frac{\sin^2(\mu)\beta}{\sin\beta} d\beta.$$

On peut facilement prouver aussi que

$$J'' > c_\mu \int_{\frac{\pi}{(\mu)}}^{\frac{\pi}{(\mu-1)}} \frac{\cos^2(\mu)\beta}{\beta} d\beta,$$

et l'on obtient par l'addition de ces deux inégalités

$$J'' > \tfrac{1}{2} c_\mu \int_{\frac{\pi}{(\mu)}}^{\frac{\pi}{(\mu-1)}} \frac{d\beta}{\beta},$$

et par conséquent

$$J'' > \tfrac{1}{2} c_\mu \log[2\mu + 1].$$

Mais les quantités c, qui ne sont assujetties qu'à devenir infiniment petites quand leur indice augmente indéfiniment, peuvent néanmoins être telles que le produit $c_\mu \log[2\mu + 1]$ devienne infiniment grand. Cela arrivera, par exemple, si l'on prend

$$c_\mu = \frac{1}{\sqrt{\log[2\mu + 1]}}.$$

Dans ce cas, la deuxième partie de l'intégrale J, et par conséquent cette intégrale elle-même, deviendra infiniment grande quand μ augmentera indéfiniment. Il est donc établi que la série de Fourier, qui partout ailleurs représente la fonction continue, ne converge plus pour $x = 0$.