BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Première partie, comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 5-27

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_5_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HOÜEL (J.). — COURS DE CALCUL INFINITÉSIMAL. Gr. in-8°; t. I, xv-508 pages, 1878; t. II, 475 pages, 1879. — Paris, Gauthier-Villars.

En 1871 (t. II du *Bulletin*, p. 257), notre regretté collaborateur Painvin rendait compte d'un Ouvrage autographié de M. Hoüel, qui n'était que la reproduction des Leçons faites par ce professeur avec tant de zèle et de succès, depuis nombre d'années, à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Cet Ouvrage autographié, tiré à un petit nombre d'exemplaires, a reçu le meilleur accueil, et le tirage en a été promptement épuisé.

Encouragé à juste titre par ce premier résultat, M. Hoüel a pensé qu'une édition nouvelle et plus complète serait accueillie avec faveur, et il a conçu le plan de l'Ouvrage actuel, dont les deux premiers Volumes ont paru et qui ne tardera pas, nous le savons, à être complété par la publication de deux autres Volumes, dont l'impression se poursuit avec régularité et sera promptement terminée.

Quand on suit avec attention, comme nous sommes tenu de le faire en qualité de rédacteur de ce journal, les différentes publications qui se font chaque jour en Mathématiques, on remarque une transformation complète des Ouvrages destinés à l'Enseignement. Il est aisé de reconnaître que les exigences du public mathématique se sont tout à fait modifiées; on est toujours sensible aux qualités d'ordre, de symétrie que peut offrir un Ouvrage de cette nature; mais un courant incontestable assure avant tout le succès aux Ouvrages les plus complets, à ceux où l'on est assuré de trouver le plus de renseignements, le plus de théories et d'exercices, en un mot à ceux qui forment une véritable encyclopédie sur le sujet spécial dont l'auteur a à s'occuper.

L'Ouvrage de M. Hoüel sera assez complet pour satisfaire, sous ce rapport, les étudiants les plus difficiles. En ce qui concerne la théorie infinitésimale, il ne diffère pas essentiellement des Leçons publiées en 1870-71. Pour ce qu'on appelle quelquefois la métaphysique du Calcul infinitésimal, l'auteur est resté fidèle au point de vue qu'il avait adopté et qui est identique à celui de M. Duhamel dans la première édition de son *Cours d'Analyse*. Mais des additions d'une autre nature donnent une valeur nouvelle à l'Ouvrage actuel et en font à plusieurs égards un Ouvrage entièrement distinct des Leçons autographiées.

Nous parlerons d'abord de l'Introduction, qui ne comprend pas moins de 102 pages. Elle se compose de deux Parties distinctes. Il y a d'abord des notions sur le Calcul des opérations, qui nous paraissent des plus intéressantes. Elles sont sans doute un peu abstraites et pourront embarrasser les commençants; mais elles plairont certainement aux professeurs, et nous sommes heureux de les trouver dans un Ouvrage français. Du reste, M Hoüel les éclaircit en les appliquant à la théorie des variables complexes. La deuxième Partie de l'Introduction comprend des notions présentées avec une grande simplicité sur la théorie des déterminants et sur l'élimination.

Le Livre premier traite des principes fondamentaux du Calcul infinitésimal. L'auteur a maintenu l'innovation qui avait été approuvée, et selon nous avec raison, par M. Painvin; immédiatement après les notions fondamentales de Calcul différentiel, il donne la définition des intégrales définies et des intégrales indéfinies; on trouvera donc dans ce premier Livre, en même temps que la définition de ces intégrales, l'exposé des méthodes générales d'intégration. Nous ferons remarquer aussi que, conformément à la métaphysique qu'il a adoptée et qui, d'après lui et d'après Carnot, comprend comme cas particuliers tous les autres points de vue, l'auteur donne une définition de la différentielle autre que celle qui paraît aujourd'hui généralement adoptée : y étant une fonction de x et y' sa dérivée, pour M. Hoüel la différentielle sera

$$dy = (y' + \varepsilon)\,dx,$$

et la partie qu'on appelle communément la différentielle $y'dx$, il l'appelle la *partie principale* de la différentielle.

Des Chapitres assez développés et fort intéressants sont consacrés au calcul des dérivées d'ordres supérieurs et à l'étude des propriétés les plus simples des déterminants fonctionnels. Ce Livre, de même que les suivants, est complété par un recueil étendu d'exercices, qui contribueront certainement à augmenter l'intérêt et l'utilité de l'Ouvrage.

Le Livre deuxième traite des applications analytiques du Calcul infinitésimal, des développements en série des formules de Taylor et de Maclaurin dont les applications sont extrêmement variées, des vraies valeurs des expressions indéterminées, etc. Nous avons remarqué des discussions fort intéressantes sur les maxima et les minima, et en particulier une méthode très simple pour reconnaître les signes distinctifs du maximum ou du minimum dans le cas des fonctions d'un nombre quelconque de variables. Le Livre contient également les applications analytiques du Calcul intégral : intégration des fonctions rationnelles, des différentielles binômes, intégrales multiples, et enfin les intégrales eulériennes, où M. Hoüel fait connaître la formule importante de Dirichlet, qui comprend comme cas particuliers un si grand nombre de déterminations de volumes, d'aires, de centres de gravité. Ce Livre se termine par l'exposé de la formule de sommation de Maclaurin et d'Euler, et la démonstration de cette formule, d'après M. Imchenetsky. Des exemples numériques font sentir toute l'utilité de la formule. Un recueil d'exercices termine également ce Livre deuxième et le premier Volume de l'Ouvrage.

C'est dans le Livre troisième que sont abordées les applications géométriques, la théorie des tangentes, celle des asymptotes, la longueur d'un arc de courbe, les points d'inflexion, la courbure, les enveloppes, les points singuliers, etc. Mais nous insisterons sur un Chapitre, d'ailleurs élémentaire, consacré à la méthode des équipollences de M. Bellavitis. Cette belle théorie du géomètre italien se confond maintenant avec celle de la représentation par un point d'une variable complexe ; bien que les principes en soient devenus familiers, on n'insistera jamais trop, à notre avis, sur les avantages considérables qu'elle peut présenter en Géométrie. Nous signalerons aussi un Chapitre sur les courbes dans l'espace, la courbure des surfaces d'après le Mémoire de Gauss et sur les coordonnées curvilignes.

La première partie du Livre quatrième, consacré entièrement aux équations différentielles, forme le complément du deuxième Volume. Nous y signalerons particulièrement l'application à l'intégration de quelques équations linéaires de la belle méthode d'Euler et de Laplace qui consiste à représenter une fonction $f(x)$ par l'intégrale

$$\int e^{ux}\varphi(u)\,du,$$

prise entre des limites déterminées ; dans la rédaction de cette partie, M. Hoüel a mis à profit l'Ouvrage de M. S. Spitzer : *Vorlesungen*, etc. Nous remarquons aussi dans ce Livre l'heureux emploi des notations symboliques et des fonctions entières de la caractéristique de dérivation D_x. Il nous semble qu'il y a un réel intérêt à faire connaître aux élèves ces procédés de démonstration, qui les prépareront à l'étude de la théorie des formes où ils sont d'un usage continuel.

Quant à la démonstration du théorème fondamental, que toute équation différentielle a une intégrale, l'auteur a suivi la méthode si intéressante, due à Cauchy et dont nous devons la connaissance, un peu confuse, au *Calcul intégral* de M. l'abbé Moigno. Nous aurions désiré que l'auteur la présentât avec plus de développement et qu'il l'étendit à un nombre quelconque d'équations différentielles du premier ordre, comme l'a fait M. Lipschitz dans un important Mémoire dont nous avons autrefois publié la traduction. Mais, comme on peut toujours ramener à un tel système une équation d'un ordre quelconque contenant une seule fonction inconnue, il n'y a pas là une objection de fond.

On voit, par ce résumé trop succinct des matières contenues dans les deux premiers Volumes, que le Traité de notre excellent collaborateur et ami est un Ouvrage consciencieusement écrit, et nous sommes convaincu qu'il sera accueilli avec la même faveur que le Traité autographié qu'il est destiné à remplacer, et qui était devenu très rare et très recherché. Dans cette analyse rapide, nous avons négligé quelques points de détail sur lesquels nous aurions eu à faire quelques réserves ; mais, par compensation, nous n'avons pas signalé bien des théories secondaires qui sont réellement intéressantes et qui contribueront à augmenter la valeur de l'Ouvrage. Il ne nous reste plus qu'à exprimer le désir que l'Ouvrage soit promptement terminé et que l'apparition des deux derniers Volumes couronne dignement le travail considérable de notre collaborateur.

G. D.

BRIOT (C.). — Théorie des fonctions abéliennes. — In-4°, 181 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1879.

On sait quels importants progrès, depuis vingt-cinq ans environ, MM. Briot et Bouquet ont réalisés dans la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes : l'*Étude des fonctions d'une variable imaginaire*, les *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles*, insérées dans le XXXVI^e^ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, la *Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques* (1859), enfin la *Théorie des fonctions elliptiques* (1875) constituent une œuvre capitale, dont toutes les parties se tiennent étroitement et où l'on ne saurait trop admirer l'unité de la méthode, la fécondité de l'idée directrice, la richesse des développements et l'extrême clarté où toutes choses sont mises.

Cette œuvre se trouve achevée (si toutefois ce mot peut s'appliquer lorsqu'il s'agit de recherches scientifiques) par la publication de la *Théorie des fonctions abéliennes*, due à M. Briot seul, qui, pendant plusieurs années, avait pris cette théorie pour sujet de ses Leçons à la Sorbonne.

MM. Clebsch et Gordan ont publié sur ce sujet, en 1866, un Livre bien connu (*Theorie der Abelschen Functionen*), dans lequel ils traitent le cas particulier où l'équation proposée n'admet que des points critiques du second ordre ; M. Briot, au contraire, traite la question dans toute sa généralité, indépendamment de l'ordre des points critiques, de leur distribution dans le plan et de la loi de permutation des racines autour de ces points.

L'Ouvrage s'ouvre par une Introduction où l'auteur a rappelé les principes de la théorie des fonctions analytiques.

Dans la première Partie (p. 1-78), l'auteur traite des intégrales abéliennes de première espèce, en suivant d'ailleurs la même voie que MM. Clebsch et Gordan, mais en laissant de côté les considérations géométriques qu'ils ont employées.

La formation des intégrales de première espèce, la détermination de leur nombre sont obtenues en suivant une marche due à M. Elliot (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IV, 1875) (1). M. Briot étudie ensuite la formation des systèmes de *lacets fondamentaux* de première et de seconde espèce, ainsi que les *circuits* de première et de seconde espèce. Les périodes d'une intégrale abélienne de première espèce sont les valeurs de l'intégrale définie relatives aux différents *cycles* simples, formés chacun d'un certain nombre de lacets fondamentaux et d'un seul lacet non fondamental ; suivant que l'on considère les cycles de première ou de seconde espèce, on obtient les périodes de première ou de seconde espèce ; p étant le nombre des intégrales de première espèce, tous les cycles se ramènent à $2p$ cycles simples : tel est donc le nombre des périodes de première ou de seconde espèce pour chaque intégrale abélienne de première espèce ; d'ailleurs, les périodes de chaque système s'expriment linéairement au moyen des périodes de l'autre.

L'auteur établit ensuite la relation bilinéaire entre les périodes ω et ε de deux intégrales de première espèce u et v,

$$\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{i=2p} \sum_{k=1}^{k=2p} \mathrm{C}_{ik}\,\omega_i \varepsilon_k = 0,$$

par la considération de la somme

$$\mathrm{P} = \sum_{h=0}^{h=m-1} \int u_h\, dv_h,$$

où les intégrations sont effectuées le long d'un contour simple, con-

(1) Voir *Bulletin*, I_1, 270.

venablement choisi, à l'intérieur duquel les fonctions u, v sont holomorphes et où les indices se rapportent aux m valeurs initiales différentes des fonctions u, v convenablement définies. La considération de la somme

$$Q = \sum_{h=1}^{h=m-1} \int v_h du_h$$

montre que l'on a

$$C_{ki} = -C_{ik}, \quad C_{ii} = 0,$$

et qu'ainsi le déterminant des quantités C_{ik} est un déterminant gauche égal à $+1$. Une série de transformations simples des périodes permet ensuite de ramener ce déterminant à la forme *canonique,* où tous les éléments sont nuls, sauf les éléments contigus à la diagonale, dont les uns sont égaux à $+1$, les autres à -1; on parvient ainsi à la notion des périodes *normales,* puis des intégrales *normales,* pour lesquelles les périodes normales à indices impairs sont toutes nulles, sauf une qui est égale à $2\pi\sqrt{-1}$. Toutes ces considérations s'appliquent sans difficulté aux intégrales hyperelliptiques. La démonstration du théorème d'Abel termine la première Partie.

La deuxième Partie (p. 79-172) débute par la démonstration, donnée par M. Bouquet dans le *Bulletin* (Ire Partie, t. III, p. 265), de l'existence des fonctions définies par un système d'équations aux différentielles totales, démonstration qui repose sur les principes dont MM. Briot et Bouquet se sont servis pour établir l'existence des fonctions définies par un système d'équations différentielles à une seule variable indépendante.

Les équations différentielles *abéliennes* sont ensuite données sous la forme

$$\sum_{h=1}^{h=p} \frac{Q_i(x_h, y_h)}{F'_y(x_h, y_h)} dx_h = du_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où F'_y est la dérivée par rapport à y du premier membre d'une équation irréductible $F(x, y) = 0$ de degré n, et où $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ désignent les p polynômes entiers en x et y de degré $n-3$ qui entrent dans la formation d'un système d'intégrales abéliennes de première espèce.

L'étude des cas où le déterminant formé avec les coefficients des différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_p$ dans les équations différentielles précédentes peut devenir nul montre que, à l'exception des valeurs des variables pour lesquelles il y a indétermination, toute fonction rationnelle et symétrique des p quantités $x_1, x_2, \ldots, x_p$ est une fonction monotrope et méromorphe des p variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_p$: une telle fonction est dite *abélienne*.

Pour effectuer l'inversion, l'auteur suit une méthode analogue à celle qu'il avait suivie avec M. Bouquet dans le cas des fonctions elliptiques. Après avoir établi les principales propriétés de la fonction Θ à p variables,

$$\Theta = \mathrm{S}e^{2(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots + m_p v_p) + \mathrm{P}},$$

où les p nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$ doivent prendre toutes les valeurs et où les $\frac{p(p+1)}{2}$ constantes α qui figurent dans le polynôme homogène et du second degré

$$\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{h=1}^{h=p} m_i m_h \alpha_{i,h}$$

sont telles que la partie réelle de ce polynôme soit négative pour toutes les valeurs réelles des nombres m, M. Briot définit la fonction

$$\Theta\left[u^{(i)}(x, y) - \mathrm{G}_i\right],$$

où

$$u^{(i)}(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\mathrm{Q}_i(x, y)}{\mathrm{F}'_y(x, y)}\, dx$$

est une intégrale normale de première espèce. On a établi précédemment que les périodes normales de rangs pairs $2\alpha_{i,h}$ des intégrales normales de première espèce, telles que $u^{(i)}$, satisfont précisément à la condition imposée aux coefficients du polynôme P pour la convergence de la série Θ. Quant aux quantités G_i, ce sont des constantes arbitraires. L'étude de la fonction ainsi définie conduit successivement l'auteur aux théorèmes suivants :

La fonction $\Theta\left[u^{(i)}(x, y) - \mathrm{G}_i\right]$ *admet* p *zéros.*

Ces p zéros satisfont aux relations

$$\sum_{h=1}^{h=p} u^{(i)}(x_h, y_h) - G_i = C_i,$$

dans lesquelles les quantités G_i *sont indépendantes des arbitraires* G_i.

On peut déterminer ces p arbitraires G_i *de façon que les p zéros soient donnés.*

La fonction

$$\Theta\left[\sum_{h=1}^{h=p-1} u^{(i)}(x_h, y_h) - G_i\right]$$

de $p-1$ *variables indépendantes* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{p-1}, y_{p-1})$ *est identiquement nulle.*

La somme des valeurs d'une intégrale abélienne normale $u^{(i)}(x, y)$ *aux points d'intersection de la courbe* $F = 0$ *et d'une courbe variable de degré* $m - 3$, *satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques, est équivalente à la quantité constante* $2C_i$.

La fonction

$$\Theta\left[u^{(i)}(x, y) + \sum_{h=1}^{h=p-1} u^{(i)}(x_h, y_h) - u^{(i)}(\xi, \eta) - C_i\right]$$

admet le zéro (ξ, η) *et* $p-1$ *autres zéros indépendants du premier.*

Étant données deux courbes $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ *du degré n, si l'on désigne par* (ξ_h, η_h) *les mn points d'intersection de la première et de la courbe proposée* $F(x, y)$, *et par* (ξ'_h, η'_h) *les points d'intersection de la seconde et de la même courbe* $F(x, y) = 0$, *si de plus* $u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h)$ *sont les valeurs qu'acquièrent les intégrales abéliennes* $u^{(i)}(\xi_h, \eta_h)$ *quand on passe de la première courbe à la seconde par une variation continue, la fonction*

$$W = \prod_{h=1}^{h=mn} \frac{\Theta\left[\sum_{h=1}^{h=n} u^{(i)}(x_h, y_h) - u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - C_i\right]}{\Theta\left[\sum_{h=1}^{h=n} x^{(i)}(x_h, y_h) - u^{(i)}(\xi_h, \eta_h) - C_i\right]}$$

est égale à une fonction rationnelle des p points x_h, y_h, qui n'est autre que la fonction

$$E\prod_{h=1}^{h=p}\frac{\psi(x_h, y_h)}{\varphi(x_h, y_h)},$$

où E *est un facteur constant.*

Cette dernière proposition conduit immédiatement à l'expression des fonctions abéliennes et à l'intégration des équations différentielles abéliennes.

Le Volume se termine par deux Notes, l'une relative au théorème de Green, l'autre à la démonstration de cette proposition :

Étant donnée une équation algébrique irréductible $F(x, y) = 0$ *du degré m, toute fonction analytique et monotrope du point* (x, y) *et qui sur toute la sphère relative à la variable x n'admet pas de points singuliers autres que des pôles et des points critiques algébriques est égale à une fonction rationnelle de x et de y.*

J. T.

SCHUBERT (H.). — KALKÜL DER ABZÄHLENDEN GEOMETRIE. — 1 vol. in-8°, 359 pages; 1879.

On trouvera dans ce Volume, exposés d'une façon systématique, un grand nombre de résultats appartenant à cette *Géométrie numérique* qui a son origine dans les travaux de M. Chasles, à laquelle les recherches subséquentes de son illustre fondateur, celles de MM. Zeuthen, Clebsch, Halphen, de Jonquières, Sturm, Maillard, Voss, Brill, etc., et celles de M. Schubert lui-même ont, depuis une quinzaine d'années, donné une extension si considérable.

L'originalité du Livre de M. Schubert consiste surtout dans l'emploi continuel d'un système de notations et d'opérations symboliques dont il convient d'exposer le principe.

Après avoir donné une classification des figures simples engendrées par les éléments essentiels de l'espace (point, plan, droite), l'auteur explique le système de notations dont il se sert pour désigner les diverses conditions fondamentales relatives à ces figures.

Ainsi, p désignant un point, le même symbole p exprime la condition pour que ce point soit dans un plan, le symbole p_g la condition pour qu'il soit sur une droite donnée, et le symbole P, la condition pour que le point p soit donné. De même, les symboles e, e_g, E, qui se rapportent à un plan e, expriment que ce plan passe par un point donné, ou par une droite donnée, ou encore est donné; enfin les symboles g, g_e, g_p, g_s, G, relatifs à une droite g, expriment que cette droite rencontre une droite donnée, est contenue dans un plan donné, contient un point donné, appartient à un faisceau de droites donné ou est donnée complètement.

Si maintenant on considère une condition *composée*, ou, si l'on veut, l'ensemble de deux conditions, on l'exprimera par le *produit* des deux symboles des deux conditions composantes; le carré d'un symbole de condition veut dire que deux conditions identiques doivent être remplies à la fois par la figure à laquelle se rapporte ce symbole de condition; les produits d'un nombre quelconque de symboles, la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un symbole s'expliquent de même. Ainsi, g^2 veut dire que la droite g doit couper deux droites données; hh_p, où h désigne une droite, veut dire que cette droite rencontre une droite donnée et passe par un point donné.

La somme de deux symboles de conditions imposées à une figure signifie que l'une ou l'autre de ces conditions doit être remplie.

Les conditions imposées à une figure Γ doivent être divisées en deux classes suivant que ces conditions se rapportent à une figure donnée Γ' ou qu'elles ont un caractère invariant; c'est dans cette dernière classe, par exemple, qu'il faudrait ranger la condition imposée à une courbe plane ponctuelle générale d'avoir un point double.

La *dimension* d'une condition est le nombre d'équations entre les constantes qui déterminent la figure à laquelle elle est imposée, par lesquelles on exprime cette condition; ainsi la dimension des conditions p, e, g est 1, celle des conditions p_g, e_g, g_e, g_p est 2, celle des conditions P, E, g_s est 3, enfin la condition G est quadruple. Si l'on considère une figure dont la détermination dépend de c constantes, c est l'ordre de multiplicité (*Stufe*) du système formé par les ∞^c figures obtenues en donnant aux c constantes toutes les valeurs possibles; si l'on impose à ces figures une condition dont la dimension est α, le système des figures qui satisfont à cette condition a pour ordre de multiplicité $c - \alpha$.

Par exemple, le système de points ou de plans situés sur un axe ou passant par un axe a pour ordre de multiplicité 1, un complexe de droites a pour ordre de multiplicité 3, etc.

Ces définitions établies, l'auteur expose un principe qui est fondamental dans ses recherches et auquel il donne le nom de *principe de la conservation du nombre* (*Princip von der Erhaltung der Anzahl*).

Soit Γ une figure dont la détermination dépende de c constantes; si on lui impose une condition de la $c^{\text{ième}}$ dimension, il y aura en général un nombre fini N de figures Γ satisfaisant à la condition imposée. Or, en supposant que celle-ci appartienne à la première catégorie, c'est-à-dire, se rapporte à une figure Γ' que l'on regarde comme donnée, ce nombre N restera le même, à moins de devenir infini, quelles que soient les diverses positions particulières que l'on assigne aux éléments de la figure Γ'. Ce principe est lié à ce fait que, dans une équation algébrique entière à une inconnue, le nombre des racines ne dépend pas des valeurs spéciales des coefficients, mais reste toujours le même, à moins que, tous les coefficients devenant nuls, il ne devienne infini ; par exemple, il y a évidemment deux droites qui satisfont à cette condition de rencontrer quatre droites dont les deux premières et aussi les deux dernières sont dans un même plan : il y aura donc toujours deux droites, ou une infinité, satisfaisant à la condition de rencontrer quatre droites données ; il est à peine utile de dire que l'application de ce principe demande quelques précautions.

Voici maintenant en quoi consistent les équations symboliques de M. Schubert.

Les deux membres d'une telle équation représentent les nombres de figures qui satisfont à certaines conditions ; ces conditions sont exprimées, comme il a été expliqué précédemment, par des lettres ou des produits de facteurs ; les conditions exprimées par chaque *monôme* symbolique doivent être de la même dimension, et, si cette dimension est égale à l'ordre de multiplicité du système des figures considérées, rien n'empêche de considérer ce monôme comme représentant, non plus la condition imposée à la figure, mais le nombre de figures du système qui satisfont à cette condition. On conçoit dès lors sans difficulté ce que signifie une équation dont les deux membres sont des sommes ou des différences de tels monômes.

M. Schubert introduit aussi des équations dans lesquelles la dimension α des conditions représentées par chaque monôme est inférieure à l'ordre de multiplicité c du système considéré.

Une telle équation doit devenir toujours une identité quand on multiplie chacun des symboles de conditions α^{uples} qui y figurent par un même facteur symbolique représentant une condition de dimension $c - \alpha$, d'ailleurs entièrement arbitraire.

Ainsi, relativement à une courbe plane du $n^{\text{ième}}$ ordre dépendant de c constantes, l'auteur établit l'équation symbolique

$$P = \mu\nu - n\mu^2,$$

où P représente la condition (double) pour que la courbe passe par un point donné, μ la condition (simple) pour que son plan passe par un point donné et ν la condition (simple aussi) pour que la courbe rencontre une droite donnée ; en sorte que P, $\mu\nu$, μ^2 sont bien des conditions de même dimension. Si $c = 2$, le sens de cette équation, où l'on considère P, $\mu\nu$, μ^2 comme les nombres de courbes du système considéré (dont l'ordre de multiplicité est 2) qui satisfont aux conditions doubles P, $\mu\nu$, μ^2, est évident. Le nombre de courbes d'un tel système qui passent par un point donné est égal au nombre de celles dont le plan passe par un point donné et qui rencontrent une droite donnée, diminué de n fois le nombre de celles dont le plan passe par deux points donnés. Si maintenant c est supérieur à 2, l'équation

$$Py = \mu\nu y - n\mu^2 y,$$

où y représente une condition de dimension $c - 2$, devra être identiquement satisfaite quelle que soit d'ailleurs cette condition. Il est clair, d'après cela, qu'on peut multiplier tous les termes d'une même équation par un facteur symbolique quelconque.

On voit qu'on peut appliquer aux équations symboliques les règles habituelles tant que les transformations sont opérées par voie d'addition, de soustraction ou de multiplication. Ainsi, de l'équation précédente on tire, en multipliant par P, par $\mu\nu$, par μ^2, les équations suivantes :

$$\begin{aligned} P^2 &= \mu\nu P - n\mu^2 P, \\ \mu\nu P &= \mu^2\nu^2 - n\mu^3\nu P, \\ \mu^2 P^2 &= \mu^3\nu. \end{aligned}$$

Dans la dernière équation, on a supprimé le terme $n\mu^4 = 0$; en effet, il n'y a point de plan qui passe par quatre points donnés arbitrairement.

Entre les conditions fondamentales relatives au point, au plan, à la droite, il existe des relations symboliques aisées à obtenir; ainsi on a

$$p^2 = p_g, \quad p^3 = pp_g = \mathrm{P},$$
$$e^2 = e_g, \quad e^3 = ee_g = \mathrm{E},$$
$$g^2 = g_p + g_e,$$
$$gg_p = gg_e = g_s, \quad gg_s = g_p g_e = \mathrm{G}, \quad \ldots.$$

Il est facile de prévoir quel parti on peut tirer de ce calcul symbolique, quel degré de généralité et, pour ainsi dire, de condensation acquièrent les propositions relatives à la Géométrie numérique, combien enfin de telles propositions peut contenir un Livre comme celui de M. Schubert, entièrement rempli de formules où figurent quelques lettres et dont chacune équivaut à un théorème dont l'énoncé en langage ordinaire exigerait habituellement un grand nombre de lignes.

Il nous reste à exposer rapidement à quoi ces formules se rapportent.

La seconde Section (p. 25-41) contient les *formules d'incidence* (*Incidenzformeln*). Après les éléments fondamentaux de l'espace, point, droite et plan, les figures les plus simples que l'on puisse considérer sont formées de deux tels éléments, dont l'un contient ou rencontre l'autre; M. Schubert dit alors qu'ils sont *incidents* ou qu'ils forment une *incidence*. Ainsi les trois éléments forment quatre *incidences*, à savoir les figures formées : d'un point et d'une droite, le point étant sur la droite; d'un point et d'un plan, le point étant sur le plan; d'une droite et d'un plan, le plan passant par la droite; d'une droite et d'une droite qui la rencontre.

Pour l'incidence formée d'un point et d'une droite, on a l'équation fondamentale

$$pg = p^2 + g_e,$$

d'où l'on déduira, par la multiplication symbolique, des formules dont les dimensions seront 3, 4, 5. On saisira la portée de la méthode de M. Schubert par l'application qu'il donne de cette formule à l'*incidence* formée par la tangente à une courbe gauche et son point de contact, p désignant un point quelconque de cette courbe et g sa tangente en ce point: en sorte que, pour cette courbe, p^2 représentera la condition pour que l'un de ses points p soit à la fois sur deux plans donnés ou, ce qui revient au même, sur une droite donnée, ou encore la condition pour que la courbe rencontre une droite donnée; de même g_e sera la condition pour qu'elle touche un plan donné et pg la condition pour qu'elle rencontre un plan donné en un point tel que la tangente g en ce point rencontre une droite donnée.

En considérant un système de courbes d'ordre de multiplicité 1, et, par suite, d'ordre de multiplicité 2 par rapport aux éléments d'une de ces courbes (point, tangente, incidence formée par un point et une tangente), en identifiant ensuite les symboles de condition avec les nombres de courbes du système qui satisfont à ces conditions, on voit que l'équation fondamentale exprime le théorème suivant :

En ajoutant le nombre de courbes gauches d'un système d'ordre de multiplicité 1 qui rencontrent une droite donnée au nombre de celles qui touchent un plan donné, on obtient le nombre des courbes de ce système qui coupent un plan en un point tel que la tangente en ce point rencontre une droite donnée, ou, ce qui est la même chose, le degré de la courbe lieu des points de contact des tangentes qui rencontrent une droite donnée, ou encore le degré de la surface gauche lieu de ces mêmes tangentes.

Les autres formules d'incidence, relatives soit, comme la précédente, à l'incidence point-droite, soit aux autres incidences, donnent également lieu à de nombreuses applications.

La troisième Section (p. 42-89) contient les formules de coïncidence.

Deux éléments fondamentaux (point, plan, droite) forment une coïncidence quand ils sont infiniment voisins, et les problèmes que traitent l'auteur sont compris dans l'énoncé général que voici:

Exprimer les conditions de coïncidence d'un couple d'éléments au moyen des conditions fondamentales.

La solution de ces problèmes dépend du *principe de corres-*

pondance. Par exemple, pour la condition de coïncidence ε d'un couple de points p, q, on a l'équation fondamentale

$$\varepsilon = p + q - g,$$

g désignant la droite qui joint les deux points, *droite dont on suppose la position limite déterminée*. Cette formule et celles qui s'en déduisent s'appliquent à la détermination des nombres relatifs au contact de courbes planes et de surfaces. Les formules de coïncidence d'un couple de droites conduisent à des résultats importants dans la théorie des systèmes de génératrices des surfaces du second degré.

Ces deux Sections sont ainsi remplies par l'établissement de nombreuses équations symboliques; celle qui suit concerne au contraire des déterminations de nombres (p. 90-227) relatifs à des figures assujetties à des conditions dont les dimensions ont pour somme un nombre égal au nombre des constantes qui entrent dans la définition de ces figures (coniques, surfaces du second degré, courbes planes avec point de rebroussement ou point double, cubiques gauches, courbes planes du quatrième ordre situées dans un plan fixe, congruences linéaires, etc.). Ces nombres sont obtenus par la considération des dégénérescences (*Ausartungen*).

Par exemple, en désignant par η et δ les deux espèces de coniques dégénérées et aussi les conditions pour qu'une conique appartienne à l'une ou à l'autre de ces deux espèces, puis par μ, ν et ρ les conditions pour que cette même conique ait son plan passant par un point donné, ou bien rencontre une droite donnée, ou encore touche un plan donné, on trouve aisément les *nombres*

$$\eta\mu^m\nu^n\rho^{7-m-n},$$
$$\delta\mu^m\nu^n\rho^{7-m-n},$$

qui correspondent à des conditions de la huitième dimension, conditions par lesquelles la conique est déterminée; de ces résultats on peut s'élever à la détermination des nombres de la forme

$$\mu^m\nu^n\rho^{8-m-n}, \quad \ldots.$$

La cinquième Section (p. 228-270) concerne les coïncidences multiples (coïncidences des points d'intersection d'une droite et d'une surface, de plusieurs points sur une droite, de plusieurs droites d'un faisceau); elle est terminée par l'étude des singularités d'un complexe du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Enfin, la dernière Section (p. 271-332) contient la théorie des caractéristiques sous une forme très générale, relative à une figure quelconque Γ ou plutôt à un système Σ de telles figures et d'un ordre de multiplicité quelconque i_4. Le problème général que se pose M. Schubert consiste à exprimer, lorsque cela est possible, toute condition de dimension i au moyen d'un certain nombre de conditions i^{uples}, l'équation qui relie ces diverses conditions subsistant pour tout système d'ordre de multiplicité i, composé de figures Γ. Outre les coniques, M. Schubert s'occupe des figures formées par une droite et un point situé sur elle, des faisceaux de droites, des figures formées par une droite, un point situé sur elle et un plan passant par elle, des figures formées par une droite et n points situés sur elle, des figures formées par une droite et n droites qui la rencontrent. L'étude de cette dernière figure le conduit à d'importants résultats concernant la congruence de droites communes à deux complexes.

Le Volume se termine par quelques pages contenant d'assez nombreux renseignements historiques et bibliographiques. Signalons le regret exprimé par M. Schubert de n'avoir pu utiliser les récents travaux de M. Halphen sur la théorie des caractéristiques, travaux qu'il n'a pu connaître qu'après l'impression de son Livre.

BETTI (E.). — TEORICA DELLE FORZE NEWTONIANE E SUE APPLICAZIONI ALL' ELETTROSTATICA ED AL MAGNETISMO. — Pisa, T. Nistri, 1879.

Cet Ouvrage de M. Betti est la seconde édition, revue et fort augmentée d'une monographie, qui a paru en 1865 sous le titre : *Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton;* mais les changements introduits sont tels, qu'on peut regarder ce livre comme entièrement nouveau. L'Ouvrage est partagé en trois Chapitres, qui traitent respectivement des fonctions potentielles et des potentiels, de l'électrostatique et du magnétisme.

Dans le premier Chapitre, l'auteur, après avoir donné la définition de la fonction potentielle d'un système de masses qui agissent en raison inverse du carré des distances et proportionnellement aux masses, expose, suivant la méthode de Jacobi, la transformation de l'expression Δ^2 pour des variables quelconques, ce qui lui permet de donner immédiatement la fonction potentielle d'une masse homogène distribuée entre deux sphères concentriques, la fonction potentielle d'une surface sphérique homogène et celle d'une droite. L'auteur, au moyen des résultats obtenus dans les cinq premiers paragraphes, détermine les propriétés de la fonction potentielle et de ses dérivées premières et secondes, soit à l'extérieur, soit à l'intérieur des masses, soit lorsqu'on traverse les contours des masses; il démontre ensuite le théorème de Dirichlet, qui prouve que ces propriétés sont caractéristiques de la fonction potentielle.

Le § XI contient la démonstration du théorème de Green et de ceux qui ont été donnés par Gauss et qui peuvent facilement être déduits du premier.

Le § XII, outre le théorème de Stokes qui sert à transformer une intégrale double en une intégrale simple, contient les propriétés de la fonction potentielle d'une surface qui a sur une des faces une couche de matière attirante et sur la face opposée une couche égale de matière répulsive.

Lorsque l'on a déterminé les surfaces de niveau d'un système de corps donné, la fonction potentielle au delà d'une surface de niveau, qui renferme tous les corps donnés, est égale à la fonction potentielle d'une masse homogène, mais d'épaisseur variable, distribuée sur la surface de niveau. L'auteur résout alors ce problème : *Déterminer les conditions pour que, en prenant l'équation* $f(x, y, z, \lambda_0, h_0) = 0$, *dans laquelle* λ *et* h *sont des paramètres, et en supposant remplie de matière homogène la couche comprise entre les surfaces* $f(x, y, z, \lambda_0, h_0) = 0, f(x, y, z, \lambda_0, h_0 + \varepsilon) = 0$, *les surfaces de niveau dans l'espace extérieur à cette couche soient représentées par l'équation* $f(x, y, z, \lambda, h_0) = 0$, *dans laquelle on donne à* λ *toutes les valeurs comprises entre* λ_0 *et* ∞.

Si ces conditions sont vérifiées pour toutes les valeurs de h comprises entre deux nombres donnés α et β, la fonction potentielle d'une masse distribuée par couches correspondantes aux valeurs de h comprises entre α et β, même si la densité varie de couche en couche, dépend seulement de quadratures. L'auteur, en appliquant cette méthode, trouve la fonction potentielle d'une masse homogène distribuée entre deux ellipsoïdes homothétiques infiniment voisins, et ensuite la fonction potentielle d'une masse qui remplit l'espace compris entre deux ellipsoïdes homothétiques et dont la densité varie de couche en couche. L'auteur vérifie ensuite les résultats obtenus au moyen du théorème de Dirichlet sur les propriétés caractéristiques. La fonction potentielle de l'ellipse, soit homogène, soit hétérogène, est déduite comme cas limite de celle de l'ellipsoïde, et l'auteur retrouve ainsi l'expression déjà donnée par M. Dini.

La détermination de la fonction potentielle d'une surface plane (§ XVI), ainsi que celle d'un polyèdre (§ XVII), conduisent à une série de théorèmes fort élégants, et la détermination de la fonction potentielle d'un cylindre circulaire droit homogène est une application fort intéressante de la méthode de Dirichlet.

Dans ces premiers paragraphes, l'auteur non seulement donne toutes les propriétés des fonctions potentielles des forces newtoniennes, mais, soit directement, soit au moyen du théorème de Dirichlet, il retrouve aussi les expressions de presque toutes les fonctions potentielles qui jusqu'à présent ont pu être données en termes finis.

Le potentiel d'un système de masses sur un autre et le potentiel d'un système sur lui-même sont définis dans le § XX, et, comme application, on y trouve le potentiel d'un ellipsoïde sur lui-même. Quand on a le potentiel d'un système de masses, on peut écrire les équations du mouvement et il est important de savoir quelles doivent être les conditions afin qu'aucune des distances mutuelles des points ne devienne pas infiniment grande ni infiniment petite. En posant $\Phi = \frac{1}{M}\Sigma m_s m_{s_1} r_{ss_1}^2$, où M est la somme de toutes les masses et r_{ss_1} la distance du point m_s au point m_{s_1}, Jacobi avait trouvé la relation $\frac{d^2\Phi}{dt^2} = P + 2h - MV^2$, dans laquelle P est la fonction homogène de degré -1 qui représente le potentiel, h la constante des forces vives et N la vitesse du centre de gravité ; de cette équation l'auteur déduit que, toutes les fois que les points du système restent à distance finie différente de zéro entre eux, tandis que leurs actions mutuelles suivent la loi de Newton, la force vive relative moyenne est constante et égale à la moitié du potentiel moyen.

La recherche des points de maxima et de minima de la fonction potentielle d'un système donné conduit à plusieurs théorèmes remarquables et celle des conditions afin que le potentiel soit fini montre qu'il est pour cela nécessaire que les masses occupent un espace d'au moins deux dimensions.

Le § XXIII est employé à l'étude des lignes de force ; on y trouvera les méthodes analytiques pour la solution du problème général et l'application à la détermination des lignes de force d'un ellipsoïde de révolution.

Le deuxième Chapitre commence par l'exposition de l'hypothèse fondamentale de la théorie mathématique de l'électricité et des conditions générales afin que l'électricité distribuée sur un conducteur soit en équilibre sous l'action simultanée d'autres conducteurs électrisés et de corps cohibents chargés d'électricité. Le premier problème d'équilibre électrique que résout l'auteur est celui de l'électricité distribuée sur une sphère qui se trouve sous l'action de forces électriques données. Le problème analogue pour deux sphères chargées d'électricité en présence l'une de l'autre est résolu à l'aide des coordonnées dipolaires. L'auteur donne la solution de ce problème au moyen des fonctions elliptiques lorsque cela est possible. Le cas limite de deux sphères qui viennent en contact est traité analoguement, en substituant aux coordonnées dipolaires d'autres coordonnées qui se présentent comme cas limite de celles-ci.

L'auteur détermine ensuite la distribution de l'électricité en équilibre sur un conducteur terminé par deux calottes sphériques et sur un ellipsoïde.

Le professeur W. Thomson a donné sans démonstration, dans le *Journal de Liouville*, les formules relatives à la fonction potentielle de l'électricité en équilibre sur une calotte sphérique et de l'électricité d'induction sur une calotte en communication avec la terre et qui se trouve sous l'action d'un point où est concentrée une masse électrique. Le professeur Lipschitz a démontré en partie ces résultats et, plus récemment, le professeur Beltrami a résolu complètement le problème pour un disque dans le cas que les forces électriques d'induction fussent symétriques par rapport à l'axe du disque. L'auteur reprend dans le § XIV de ce Chapitre le problème général proposé par Thomson et, suivant la voie tracée par M. Lipschitz, résout complètement le problème, en trouvant des formules analogues à celles qu'a données M. Beltrami, mais qui s'appliquent au cas général.

La théorie des condensateurs, c'est-à-dire la recherche de la fonction potentielle de l'électricité en équilibre distribuée sur deux corps minces, conducteurs, placés très près l'un de l'autre et séparés par une courbe cohibente, présente deux difficultés de genre différent. La première est relative à l'influence des bords des conducteurs sur la fonction potentielle, car il y a là une discontinuité; la seconde est relative à la détermination de la quantité d'électricité qui se porte sur la face extérieure des conducteurs. L'auteur commence par étudier la première, et suppose les deux conducteurs plans et tels qu'on puisse les considérer comme deux cylindres indéfinis ayant chacun une section formée par deux droites parallèles indéfinies dans un sens et réunies dans l'autre par une courbe : ce cas s'approche suffisamment de ce qui arrive dans la Physique expérimentale parce que l'influence des bords ne peut pas se faire sentir sur les parties éloignées du conducteur et par conséquent dans les condensateurs plans (Tableau de Franklin) on peut remplacer les conducteurs par deux plans comme ceux qui sont considérés dans cette théorie, tant qu'il s'agit seulement de calculer l'action des bords. Il faut alors déterminer une fonction qui, dans un plan, satisfasse à certaines conditions analytiques qui sont les mêmes qui se présentent dans la théorie des mouvements discontinus des fluides. Helmholtz et Kirchhoff ont résolu ce problème quand les courbes c et c' qui complètent les sections droites des cylindres ont une forme donnée. M. Betti trouve de ces conditions analytiques une solution plus générale, laquelle contient une constante arbitraire liée à la forme des courbes c et c'; il peut alors résoudre le problème pour un nombre plus grand de cas et déterminer la constante et, par suite, la forme des courbes c et c' de la façon la plus avantageuse. Après avoir donné la théorie générale des condensateurs, l'auteur résout la seconde difficulté en assignant les limites de l'épaisseur des conducteurs et de la couche interposée entre eux, dans lesquelles on peut négliger l'électricité qui se porte sur les faces des conducteurs qui ne sont pas en contact avec le corps cohibent.

Le troisième Chapitre contient l'application de la théorie du potentiel au magnétisme; dans cette application il est nécessaire de supposer les corps magnétiques comme composés d'éléments qui contiennent quantités égales de magnétisme boréal et de magnétisme austral, qui ne peuvent pas passer d'un élément à l'autre. Si l'on connaît la force à laquelle est due la magnétisation, on peut construire la fonction potentielle du magnétisme contenu dans chaque élément auquel on pourra assigner une forme déterminée. Gauss avait montré que, si sur la surface d'un corps magnétique on rencontre trois pôles, il y en a nécessairement un quatrième ; M. Betti, en cherchant la distribution des forces sur la surface d'un corps magnétique, démontre ce théorème : *Si le nombre des pôles est fini, il doit être pair.*

Le professeur W. Thomson avait montré que la distribution du magnétisme dans un corps pouvait être, ou lamellaire simple, ou lamellaire composée, ou solénoïdale ; l'auteur, en se servant du théorème que Jacobi a pris pour base de sa théorie du dernier multiplicateur, trouve les conditions analytiques auxquelles doivent satisfaire les composantes du moment magnétique afin que la distribution soit une de celles définies par Thomson, et ces conditions le conduisent au théorème : *Toute distribution magnétique peut être décomposée en une lamellaire simple et une lamellaire composée, ou bien en une lamellaire simple et une solénoïdale.*

Les composantes de l'action du magnétisme à l'intérieur d'un corps magnétique présentent un nombre infini de discontinuités, et par conséquent la détermination de la valeur de l'action en un point P n'est pas indépendante, comme dans la théorie de l'attraction de la forme de la surface σ au moyen de laquelle on sépare du corps un espace infiniment petit qui renferme le point P, espace que l'on fait diminuer d'une façon continue. L'auteur, après avoir montré quelles sont les composantes de l'action quand on laisse indéterminée la forme des surfaces σ, détermine complètement leur expression : 1° dans le cas où elles sont des sphères, 2° dans les cas où elles sont des surfaces de révolution avec l'axe incliné ou bien coïncident avec l'axe magnétique qui passe par le point P, 3° quand les σ sont les cylindres droits d'une hauteur infiniment petite relativement au rayon du cercle base. Le potentiel magnétique varie naturellement suivant que l'action est déterminée d'une façon ou de l'autre.

M. le professeur Maxwell a démontré, en se servant de certains résultats expérimentaux, que si l'on suppose, comme l'a fait Poisson, que les surfaces σ soient des sphères, quand le corps est magnétisé par induction, on arrive à des résultats qui contredisent l'idée que nous nous formons d'un corps, comme composé de molécules qui n'occupent qu'une partie pas bien grande du volume apparent. Cette contradiction disparaît si l'on suppose que les surfaces σ soient des cylindres très écrasés : c'est là une raison pour laquelle l'auteur croit devoir, entre toutes les surfaces σ, préférer les cylindres, d'autant plus que, dans un corps magnétisé par induction, la distribution magnétique est lamellaire simple et que l'hypothèse des cylindres est bien plus conforme que celle des sphères à la représentation géométrique d'une distribution lamellaire simple.

Les paragraphes successifs contiennent la détermination de la magnétisation d'un ellipsoïde et d'un corps terminé par deux sphères concentriques.

Dans le dernier paragraphe, on trouve l'application de la théorie du magnétisme à celle des corps diélectriques, et par suite l'explication des phénomènes connus sous le nom de *décharges de retour*, qu'on observe dans les condensateurs. E. P.