Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

Arnold Sachse

Essai historique sur la représentation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une série trigonométrique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, n° 1 (1880), p. 43-64

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_43_1>

MÉLANGES.

ESSAI HISTORIQUE SUR LA REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION ARBITRAIRE D'UNE SEULE VARIABLE PAR UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE [2];

PAR M. ARNOLD SACHSE.

Depuis que Riemann, dans sa dissertation inaugurale publiée en 1854, a donné un aperçu historique sur les recherches antérieures

(1) Au sujet de ces recherches, *voir* KILLING, *Der Flächenbüschel zweiter Ordnung* (Berlin, 1872); HARNACK, *Ueber die Darstellung der Raumcurve 4. Ordnung* (*Annalen der Mathematik*, t. XII).

(2) *Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen einer Va-*

des géomètres concernant la représentation d'une fonction arbitraire d'une variable indépendante, on a publié tant de recherches fécondes sur ce sujet qu'il nous a paru utile d'exposer dans leurs points essentiels les résultats nouveaux qui ont été obtenus. Si l'on entend par ce mot de *fonction arbitraire* toute fonction dont la manière d'être dans un intervalle, quelque petit qu'il soit, n'entraîne aucune restriction relative à sa détermination dans tout autre intervalle, le problème le plus général qui constitue le point de départ et la tâche la plus importante des travaux sur la représentation d'une fonction arbitraire est le suivant : *Représenter une telle fonction sous une forme mathématique dans laquelle interviennent seulement les opérations fondamentales de l'Arithmétique, addition, soustraction, multiplication et division; ces opérations pouvant d'ailleurs être répétées soit un nombre fini, soit un nombre infini de fois.* L'extrême généralité du problème ainsi posé a naturellement limité les recherches entreprises en premier lieu au cas des fonctions d'une seule variable; et c'est de ce cas seulement que nous nous occuperons dans ce qui va suivre.

Dans le siècle dernier, les recherches sur les cordes vibrantes conduisirent à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

D'Alembert donna comme intégrale générale la somme suivante des deux fonctions entièrement arbitraires des variables x, t,

$$y = f(x + at) + \varphi(x - at),$$

et il montra qu'il doit subsister dans cette solution une seule fonction arbitraire, si y doit en outre satisfaire à la condition de s'annuler pour $x = 0$ et $x = l$. Daniel Bernoulli montra de son côté

---

riabeln durch trigonometrische Reihen : Inaugural-Dissertation, zur Erlangung der Doctorwürde der hohen philosophischen Fakultät der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen vorgelegt von ARNOLD SACHSE *aus Schwerin a/W.* Göttingen, 1879.

Nous avons cru devoir traduire cet intéressant travail, qui donnera à nos lecteurs une idée d'ensemble des travaux accomplis dans différentes directions sur ce sujet, surtout depuis Riemann. Nous rappellerons que déjà le Mémoire de Riemann se traduit dans le *Bulletin*, t. V, 1re série, p. 20 et 79.

que l'équation aux dérivées partielles, ainsi que les conditions aux limites, peuvent être vérifiées également par une série trigonométrique, et il affirma que cette série donnait la solution la plus générale.

La comparaison de ces deux solutions différentes conduisit Euler à formuler le problème suivant : *Une fonction entièrement arbitraire d'une variable peut-elle être toujours représentée par une série trigonométrique?*

Le but de notre travail est précisément d'indiquer tous les pas qui ont été faits jusqu'à notre époque vers la solution complète de ce problème.

A l'époque d'Euler, la notion de fonction arbitraire était entendue d'une manière beaucoup plus étroite que nous ne l'avons fait au début de notre travail. On partait de considérations purement géométriques et l'on avait seulement en vue les fonctions qui peuvent être représentées par une courbe formant un trait continu. On parlait de fonctions *déterminées graphiquement,* et cette expression a été employée plus tard par Riemann à cause du sens précis dont elle est susceptible. Euler nommait ces fonctions *functiones continuæ.* En ce qui les concerne, après une longue discussion, on crut être parvenu à ce résultat, qu'elles peuvent toujours être représentées par une série trigonométrique. On considérait aussi d'autres fonctions, celles qui s'interrompent brusquement en un point et qui sont continuées par une autre fonction. On ne les regardait pas comme formant une fonction proprement dite, mais plutôt comme formées de *parties de fonctions,* et l'on pensait que toutes les parties ensemble ne pouvaient pas être représentées par une même série trigonométrique. Aussi l'impression fut-elle profonde lorsque Fourier affirma que toute fonction arbitraire, soit simple, soit composée de parties de fonctions, peut être représentée par une série trigonométrique. Car cette proposition était en contradiction avec la notion de fonction telle qu'elle était acquise à l'époque de Fourier, et elle conduisait nécessairement pour l'avenir à regarder une fonction composée de différentes parties définies par des lois différentes comme une véritable fonction. C'est en 1807 que Fourier communiqua à l'Académie des Sciences la grande découverte qu'il venait de faire; ses recherches ultérieures sur la représentatiou des fonctions arbitraires, qui se rattachaient à des problèmes de la théorie de la chaleur, ont été publiées dans différents Mémoires et finalement réunies dans son grand Ouvrage, la *Théorie de la chaleur*, publié en 1822.

Supposons que l'on veuille représenter une fonction $f(x)$ par une série trigonométrique de telle manière que l'on ait, pour chaque valeur de x,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{k=\infty}(a_k \sin kx + b_k \cos kx).$$

Fourier détermine les coefficients a_n, b_n, en multipliant les deux membres successivement par $\sin nx$, $\cos nx$, et en intégrant de $-\pi$ à $+\pi$. Il croit pouvoir énoncer en toute généralité la proposition suivante : Si, dans la série $\Sigma\,(a_k \sin k\,x + b_k \cos k\,x)$, on a

$$b_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha,$$

la série représente la fonction pour toute valeur de x, dans l'intervalle entre $-\pi$ et $+\pi$. On a depuis appelé *séries de Fourier* les séries trigonométriques dont les coefficients sont déterminés par les intégrales précédentes, et finalement on a donné le même nom à toutes les séries trigonométriques. C'est seulement dans ces derniers temps qu'à la suite de M. Heine [1] on a commencé à distinguer de nouveau les séries trigonométriques avec des coefficients quelconques des séries de Fourier, et à admettre qu'il puisse exister des fonctions d'une nature particulière, représentées par des séries trigonométriques, n'ayant pas leurs coefficients déterminés par les intégrales précédentes.

Tout ce qui concerne l'origine des séries trigonométriques et leur emploi dans certains problèmes de Physique mathématique a été traité d'une manière détaillée par Riemann ; nous nous contenterons d'appeler l'attention sur deux points différents.

Le mérite de Fourier n'est pas, à notre avis, dans la découverte

---

(1) *Journal de Borchardt*, t. LXXI, p. 354.

d'un moyen général de détermination des coefficients, mais plutôt dans cette remarque, qu'il a faite le premier, qu'une série trigonométrique, ayant les coefficients déterminés par les intégrales définies données plus haut, peut représenter une fonction entièrement arbitraire. En effet, la détermination des coefficients par des intégrales ne lui appartient pas. Lagrange avait déjà fait connaître cette méthode en 1766 dans les *Miscellanea Taurinensia* (1), à la vérité sans se rendre pleinement compte de son importance et sans la conduire jusqu'au bout. Il résout le problème de faire passer une courbe, dont l'équation a la forme

$$y = \alpha \sin x + \ldots + \lambda \sin nx,$$

par les n sommets d'une ligne brisée donnée, et il dit expressément que la ligne précédente et cette ligne brisée se rapprocheront à mesure que l'on prendra un plus grand nombre de points, en sorte qu'en prenant un nombre infini de points on obtiendrait l'expression d'une courbe continue qui serait identique à la courbe donnée. La méthode d'interpolation de Lagrange est, au fond, celle de Fourier; seulement le procédé employé par Lagrange pour la détermination des coefficients est plus fécond; aussi a-t-il été employé avec avantage par Dirichlet (2) et par Riemann (3) dans leurs démonstrations. Mais il y a plus, la méthode de multiplication employée par Fourier ne lui appartient pas en propre. Il semble avoir échappé à Riemann qu'Euler, dans un Mémoire de 1777 publié dans les *Nova Acta Acad. Scient. Petrop.*, t. XI, 1798, p. 114, avait indiqué le procédé de détermination des coefficients par la multiplication et les intégrales définies. Jacobi a, du reste, déjà signalé ce fait (4). Comme, dans le troisième Volume des *Misc. Taur.*, où le Mémoire de Lagrange a été publié, se trouvent aussi des travaux d'Euler, il n'est pas douteux qu'Euler ait connu la formule de Lagrange; il n'est pas moins certain que Fourier a connu les résultats d'Euler; car il indique lui-même (*Théorie de la chaleur*, art. 428) que l'on trouve chez presque tous les mathémati-

(1) *Voir* LAGRANGE, *Œuvres*, t. I, p. 551.
(2) DOVE et MOSER, *Repertorium für Physik*, t. I, p. 152-174; 1837.
(3) RIEMANN, *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen*.
(4) *Journal de Crelle*, t. 2, p. 2.

ciens de cette époque, Daniel Bernoulli, Clairaut, Euler, Lagrange, des résultats et des développements analogues aux siens.

Peut-être devrait-on aussi ajouter à l'exposé historique de Riemann que Poisson a fait connaître une méthode particulière de détermination des coefficients qui mérite l'attention à cause des nombreuses recherches et des conséquences auxquelles elle a donné lieu. Poisson part de la formule (¹)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\alpha)+r^2}\,d\alpha$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n(x-\alpha)\,d\alpha,$$

qui est exacte toutes les fois que r est plus petit que 1; il y fait $r=1$, et il cherche à prouver que l'intégrale du premier membre a pour limite la valeur de la fonction $f(x)$.

Fourier n'a pas prouvé que la série trigonométrique qu'il obtient pour la représentation de la fonction converge réellement vers la valeur de la fonction. A la vérité, il donne (*Théorie de la chaleur,* art. 177) une définition rigoureuse de la convergence d'une série; mais il regarde, dans le cas actuel, la démonstration de la convergence comme facile, et il laisse au lecteur le soin de la trouver. Dans les cas particuliers que l'on avait surtout à considérer et pour des valeurs particulières de la variable, on reconnaissait qu'en réalité la série convergeait vers la valeur de la fonction; mais Cauchy paraît être le premier qui ait senti la nécessité d'une démonstration rigoureuse, indépendante de la forme de la fonction et applicable à toutes les valeurs de la variable (²).

Il communiqua, en 1826, à l'Académie des Sciences une démonstration de la formule de Fourier. Il y amène le terme général de la série à une forme qui prouve que le rapport de ce terme à la quantité $A\frac{\sin nx}{n}$, où A est une constante indépendante de n, dif-

(¹) *Journal de l'École Polytechnique,* Cahier XIX, p. 404, 1823; *Mémoires de l'Académie des Sciences*, p. 574, 1823, et *Théorie de la chaleur.* Une étude rigoureuse des conditions d'existence de la formule se trouve dans un Mémoire de M. A. Schwarz : *Zur Integration der part. Differentialgl.* $\Delta u=0$ (*Journal de Borchardt,* t. LXXIV, p. 226; 1872).

(²) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VI, p. 603 et suiv.

fère d'autant moins de l'unité positive que n est plus grand. De ce que la série dont le terme général est $A\frac{\sin nx}{n}$ est convergente, Cauchy conclut qu'il en est de même pour la série de Fourier. Dirichlet a montré que cette conclusion est inexacte ([1]). Cauchy reconnaissait aussi lui-même que sa méthode est insuffisante dans bien des cas, et qu'elle exige que le terme général soit déterminé pour $n = \infty$. D'ailleurs, la transformation que Cauchy fait subir à la série et contre laquelle Dirichlet élève des objections repose, comme Riemann le fait remarquer (*loc. cit.*, art. 2), seulement sur la supposition qu'il existe une fonction $\varphi(x+yi)$ de l'argument complexe $x+yi$, qui demeure finie pour toutes les valeurs positives de y, et dont la partie réelle se réduit pour $y=0$ à la fonction arbitraire donnée $f(x)$. Riemann ajoute à ce sujet : « Si l'on admet ce théorème qui, en fait, est exact, alors la voie suivie par Cauchy conduit au but; de même que, réciproquement, ce théorème peut se déduire de la série de Fourier. »

Dans un Mémoire déjà cité (*Journal de Borchardt*, t. LXXIV, p. 232), M. Schwarz appelle l'attention sur cette affirmation de Riemann et engage à l'examiner. On ne peut pas admettre que Riemann ait voulu dire que, le théorème une fois admis, la démonstration de Cauchy devient irréprochable, puisque les objections de Dirichlet aux autres parties de la démonstration conservent toute leur valeur.

La remarque de Riemann ne peut donc recevoir que le sens suivant : Étant données une fonction $f(a)$ et la série de Fourier correspondante Σ, il est toujours possible de trouver une fonction $\varphi(x+yi)$ de l'argument complexe $x+yi = re^{i\alpha}$ qui soit développable en une série Σ' ordonnée suivant les puissances de cet argument complexe, série dont la partie réelle se réduira, pour une valeur déterminée de r, à la série Σ, en sorte que la convergence de cette série résulte de la convergence de la première. Or on a la série

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\gamma)\,d\gamma + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} r^n \int_{-\pi}^{+\pi} f(\gamma)\cos n(\alpha-\gamma)\,d\gamma,$$

([1]) *Journal de Crelle*, t. 4, p. 158.

qui est convergente dans l'intérieur d'un cercle de rayon 1 et qui, pour $r = 1$, se réduit à la série de Fourier. La question est de savoir si l'on peut faire $r = 1$. Cette question et les questions connexes ont été complètement résolues dans deux Mémoires parus presqu'en même temps : le premier de M. A. Schwarz [1], le second de M. Prym [2]. M. A. Schwarz démontre le théorème suivant, déjà donné dans ses parties essentielles par Riemann :

Considérons sur un cercle de rayon 1 *une fonction réelle de l'argument* α *qui soit finie, continue et uniforme et qui reprenne la même valeur quand l'argument* α *augmente de* 2π, *mais qui ne soit assujettie à aucune autre condition; il existe toujours une fonction, et une seule,* u, *continue à l'intérieur et sur la circonférence du cercle, dont les dérivées* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *sont, dans l'intérieur du cercle, des fonctions uniformes et continues de* x *et de* y, *qui satisfait à l'équation* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, *et qui est égale pour tous les points du cercle à la fonction* $f(\alpha)$. La démonstration de ce théorème ne se déduit pas toutefois de la considération de la série; elle repose sur l'emploi de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-x)+r^2}\,d\alpha.$$

Cette intégrale est parfaitement déterminée pour tous les points à l'intérieur du cercle; elle est égale à la série donnée plus haut, et elle constitue la partie réelle de l'intégrale suivante :

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{e^{\alpha i}+z}{e^{\alpha i}-z}\,d\alpha,$$

qui, pour toutes les valeurs de $z = re^{\alpha i}$ dont le module est plus petit que 1, offre les caractères d'une fonction entière et uniforme

---

(1) *Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft zu Zürich*, 15e année: *Ueber die Integration der Dffgl.* $\Delta u = 0$ *für die Fläche eines Kreises*. Un extrait de ce Mémoire, avec la continuation et le développement des recherches qui y sont contenues, a paru dans le *Journal de Borchardt*, t. LXXIV; 1872.

(2) *Ueber die Dffgl.* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (*Journal de Borchardt*, t. LXXIII; 1871).

de l'argument complexe $x+yi$. L'intégrale de Poisson cesse d'avoir un sens déterminé seulement pour les points du cercle; mais, si l'on admet que la fonction qui cesse d'être déterminée par cette intégrale coïncide avec la fonction $f(\alpha)$ en tous les points du cercle, il est aisé de montrer qu'il y a continuité et que la valeur de l'intégrale tend vers celle de $f(\alpha)$ lorsqu'on s'approche de la circonférence. En d'autres termes, la partie réelle de la fonction $\varphi(x+yi)$ définie ainsi à l'intérieur du cercle se transforme d'une manière continue dans la fonction $f(\alpha)$ quand on s'approche du contour.

D'autre part, il résulte d'un théorème bien connu d'Abel ([1]) que le développement en série, pour les points à l'intérieur du cercle de la partie réelle de $\varphi(z)$, se transforme dans la série de Fourier pour les points du cercle. Toutes les fois donc que cette série sera convergente, elle sera nécessairement égale à la valeur correspondante de $f(\alpha)$. Mais l'on n'a aucun moyen de savoir si la série sera convergente, et la proposition précédente ne permet de rien affirmer à cet égard.

Il nous reste à revenir sur la seconde partie de la remarque de Riemann, à savoir que le théorème qui joue un rôle fondamental dans l'analyse de Cauchy peut se déduire de la série de Fourier. Cette marche a été suivie par M. Neumann dans son écrit : *Das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen* ([2]). Mais elle est soumise à des difficultés qui ont été signalées de différents côtés. M. Heine a donné l'impulsion et a fait remarquer qu'en laissant même de côté différentes objections, la méthode de M. Neumann lui paraît incertaine; car elle con-

---

([1]) Ce théorème, démontré dans le célèbre Mémoire sur la série du binôme, est le suivant : Toutes les fois que la série

$$c_0 + c_1 + \ldots$$

est convergente, elle est la limite de la série

$$c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \ldots,$$

où r tend vers l'unité par des valeurs réelles inférieures à l'unité.

Voir aussi la démonstration de Dirichlet, *Journal de Liouville*, t. VII, 2e série, p. 253-255.

([2]) *Journal de Borchardt*, t. LXXI, p. 361.

duirait, sans aucune hypothèse nouvelle, à cette conclusion, que toute fonction serait développable d'une seule manière en série trigonométrique. M. Prym, dans le travail déjà cité, a appuyé sur les différentes objections qu'on peut présenter. Il ne semble donc pas qu'on puisse partir de la série de Fourier si l'on veut démontrer le théorème dans toute sa généralité, parce qu'on n'a pas la démonstration que la série de Fourier converge pour toutes les fonctions continues. La deuxième partie de la remarque de Riemann ne parait donc pas justifiée.

II.

La tentative de Cauchy était la seule que Dirichlet connût, lorsqu'il publia, en 1829, son Mémoire sur les séries trigonométriques, que Riemann regarde à juste titre comme la première recherche solide sur ce sujet. On avait remarqué que les méthodes regardées auparavant comme rigoureuses se montraient défectueuses et insuffisantes dans les cas particuliers, sans qu'on pût trouver une faute dans les calculs, et l'on en avait conclu que l'erreur ne pouvait se trouver que dans les principes. Les principaux représentants de cette période, dans laquelle on soumit à une revision tous les principes de l'Analyse infinitésimale, sont Cauchy, Abel et Dirichlet. Dans une Lettre de 1826 (¹), Abel insiste sur l'insuffisance des démonstrations de la théorie des séries infinies, et, en particulier, il trouve étonnant que l'on étende sans démonstration aux séries infinies toutes les règles qui s'appliquent aux fonctions formées à l'aide d'un nombre limité d'opérations. Il indique ainsi la véritable origine des paradoxes si nombreux que l'on rencontrait alors en Analyse.

Riemann, dans son travail, a mis en évidence, d'une manière magistrale, les points fondamentaux de la démonstration de Dirichlet, qui repose précisément sur la découverte, due à Dirichlet et signalée par lui à différentes reprises, de la distinction essentielle qui sépare les séries absolument convergentes et celles qui cessent de l'être quand on prend tous les termes avec leurs valeurs

(¹) ABEL, *Œuvres complètes*, t. II, p. 265.

absolues. Dirichlet, en employant dans la théorie des séries trigonométriques la définition la plus précise des notions fondamentales de l'Analyse, a donné naissance, par cela même, à l'extension et aux éclaircissements que ces principes ont reçus à la suite des recherches ultérieures, relatives aux séries trigonométriques.

En dehors du Mémoire déjà cité, Dirichlet en a publié un autre sur les séries trigonométriques, dans le *Repertorium* de Dove; mais ce second travail n'est, en somme, qu'une exposition développée des méthodes exposées seulement d'une manière incomplète dans son premier travail.

Dirichlet se propose le problème de rechercher dans quel cas la série de Fourier converge, et il suit la méthode suivante : il recherche comment doit se comporter une fonction $\varphi(x)$, pour que la somme des $2n+1$ premiers termes de la série de Fourier

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\cos kx\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\sin kx\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi+x}{2}}\varphi(x-2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta \\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi-x}{2}}\varphi(x+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta \end{aligned}$$

converge, lorsque n croît, vers la valeur de la fonction $\varphi(x)$. La recherche revient à la détermination de la limite suivante :

$$\lim_{k=\infty}\int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta, \quad 0 < h \leq \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on suppose que $f(\beta)$ soit constamment finie et déterminée entre 0 et h, et ensuite qu'elle soit constamment positive et ne décroisse jamais, l'intégrale est décomposable en une suite d'intégrales partielles, dont chacune est telle que la fonction sous le signe d'intégration garde le même signe dans tout l'intervalle. Dans chaque intervalle on peut appliquer alors un théorème connu, et l'on obtient une suite alternée formée de termes décroissant indéfiniment. Par suite de cette propriété de la série, on peut trouver deux quantités comprenant l'intégrale et qui toutes les deux convergent vers la limite $\frac{\pi}{2}f(o)$, quand n croît indéfiniment. On a donc

$$\text{(I)} \qquad \lim_{k=\infty}\int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta = \frac{\pi}{2}f(o), \quad o < h \leqq \frac{\pi}{2},$$

et il suit de là immédiatement que l'on a

$$\text{(II)} \qquad \lim_{k=\infty}\int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta = o, \quad o < g < h \leqq \frac{\pi}{2}.$$

A l'aide du théorème II, on peut étendre le théorème I à toutes les fonctions continues qui ont seulement un nombre fini de maxima et de minima. Dirichlet dit qu'une fonction est continue si elle demeure finie et déterminée entre o et h, et si, en outre, $f(\beta+\delta)-f(\beta)$ décroît indéfiniment avec δ. Dans la suite, nous adopterons partout la définition suivante, qui est plus précise : Une fonction $f(\beta)$ est continue pour un point β si, pour chaque valeur de ε, ε étant une quantité différente de zéro, mais aussi petite qu'on le voudra, il existe une quantité δ' telle que, pour toutes les grandeurs δ'' dont la valeur absolue est inférieure à δ', la différence $f(\beta+\delta'')-f(\beta)$ soit inférieure en valeur absolue à ε.

Si la fonction β est discontinue pour la valeur zéro, l'intégrale précédente converge encore, mais vers la valeur

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\pi}{2}[f(o+\varepsilon)+f(o-\varepsilon)].$$

Cela a encore lieu s'il existe en outre dans l'intervalle de o à h un nombre quelconque, mais fini, de points de discontinuité.

Si l'on assujettit maintenant la fonction $\varphi(x)$ aux mêmes conditions que $f(\beta)$, on reconnaît sans difficulté que la somme S converge, pour chaque valeur de x comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, vers la valeur $\lim\limits_{\varepsilon=0}\frac{\varphi(x+\varepsilon)+\varphi(x-\varepsilon)}{2}$, et, pour les limites mêmes, vers la valeur

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\varphi(-\pi+\varepsilon)+\varphi(\pi-\varepsilon)}{2}.$$

Nous avons donc le théorème suivant :

La série de Fourier relative à une fonction qui 1° ne devient jamais infinie, 2° n'a pas un nombre infini de discontinuités, 3° n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, converge vers la valeur de la fonction à toutes les places où il n'y a pas de discontinuité, et, pour les points de discontinuité, elle converge vers la moyenne des deux valeurs de la fonction prises de part et d'autre de ce point. Les conditions auxquelles est ici assujettie la fonction s'appellent le plus souvent *les conditions de Dirichlet.*

Proposons-nous maintenant de rechercher ce que l'on doit entendre par cette expression : *La série représente la fonction.* Si nous entendions par là que, pour chaque point pris dans l'intervalle, la valeur de la série coïncide avec celle de la fonction, nous devrions déjà renoncer, même pour les fonctions qui satisfont aux conditions de Dirichlet, à une représentation par les séries de Fourier. Nous proposerons donc la définition suivante : *Une série représente une fonction dans un intervalle donné, si ses valeurs coïncident avec celles de la fonction pour tous les points pris dans l'intervalle, à l'exception d'un nombre limité de points connus.* Alors une fonction satisfaisant aux conditions de Dirichlet peut être considérée comme représentée par une série de Fourier, et les points d'exception correspondent aux discontinuités. Il est encore plus avantageux d'admettre avec Riemann qu'en un point de discontinuité on donnera à la fonction une valeur égale à la demi-somme des valeurs limites $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Autrement une fonction qui posséderait des discontinuités en nombre infini ne pourrait pas être représentée par une série de Fourier. Si l'on fait cette supposition, alors une fonction satisfaisant aux conditions de Dirichlet sera représentée par la série pour tous les points; et de plus, on n'exclut pas la possibilité de représenter une fonction avec un nombre infini de points de discontinuité par une série de Fourier.

On pourrait encore adopter comme définition qu'une série représente une fonction, même en renonçant à l'égalité de la fonction et de la série pour un nombre infini de valeurs de x. Riemann parait avoir fait cette supposition (voir en particulier *loc. cit.,* à la fin de l'article 12), bien qu'il n'ait jamais donné dans son Mémoire une définition de l'expression : Une série représente une fonction. Comme il s'agit en tout ceci d'une question de mots, je garde la première définition, car elle me paraît la plus naturelle.

Jusqu'ici il a été question, pour plus de simplicité, seulement de la représentation entre $-\pi$ et $+\pi$ d'une fonction ayant 2π pour période. A ces limites on peut aisément en substituer d'autres quelconques et étendre les théorèmes précédents aux fonctions ayant une période arbitraire. Ils ont lieu aussi pour une fonction non périodique, si elle satisfait aux conditions reconnues comme nécessaires, entre des limites quelconques, puisque la variation d'une fonction arbitraire dans un intervalle déterminé n'impose aucune condition aux valeurs que l'on peut attribuer à la fonction en dehors de cet intervalle.

Nous avons encore à insister sur un point de la démonstration de Dirichlet, à savoir que la série de Fourier converge, pour tous les points de discontinuité, vers la moyenne des valeurs-limites à droite et à gauche, $f(x+0), f(x-0)$. M. Schläfli n'a pas cru que cette conclusion fût légitime ([1]). M. Schläfli s'appuie de l'autorité de Duhamel ([2]). Il lui semble que, dans son Mémoire, le géomètre français a eu la pensée qu'il serait plus naturel d'attribuer, en un point de discontinuité, toutes les valeurs comprises entre $f(x-0)$ et $f(x+0)$ à la fonction représentée par la série trigonométrique. Il est vrai que Duhamel énonce le théorème suivant : *Si l'on fait la somme des n premiers termes d'une série dont tous les termes sont des fonctions continues de x, et que l'on y mette à la place de x une fonction de n qui jouisse de la propriété de tendre, lorsque n croît indéfiniment, vers la valeur x, pour laquelle la continuité de la fonction est interrompue, on peut choisir cette fonction de n de telle manière que la somme converge vers toute*

([1]) *Einige Zweifel an der allgemeinen Darstellbarkeit einer wilkürlichen periodischen Function einer Variebelen durch eine trigonometrische Reihe*, Berne, 1874; Universitäts-Programm, p. 15, et *Journal de Borchardt*, t. LXXII, *Ueber die part. Differentialgl.* $\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, p. 284.

([2]) *Journal de Liouville*, t. XIX, 1854; *Note sur la discontinuité des séries et sur les moyens de la reconnaître.*

valeur comprise entre les deux limites $f(x_1+0), f(x_1-0)$. Il dit en même temps qu'il y a deux moyens de déterminer la somme de la série pour la valeur x_1 de la variable. On peut ou bien faire tout de suite $x = x_1$ et effectuer la sommation : on trouvera alors une valeur déterminée, et c'est la méthode que l'on emploie pour calculer la valeur numérique de la série ; ou bien considérer la somme des n premiers termes, y remplacer x par une valeur qui tend vers x_1 quand le nombre des termes croît indéfiniment. Duhamel reconnaît, comme cela est vrai, que pour les fonctions continues les deux méthodes conduisent au même résultat, et que pour les fonctions discontinues on est conduit au théorème énoncé plus haut. Mais la seconde méthode de sommation n'est pas admissible, parce qu'on ne peut pas affirmer que la somme obtenue par le second procédé coïncide avec la valeur de la série pour $x = x_1$. Il y a une objection décisive à faire à cette seconde méthode : c'est sa complète indétermination. Il est donc seulement permis d'adopter la première, et par suite la série de Fourier converge seulement vers la valeur moyenne.

M. P. du Bois Reymond ([1]) a aussi cherché à établir que la série de Fourier, aux points de discontinuité, peut prendre toutes les valeurs comprises entre les limites $f(x+0), f(x-0)$. Il donne comme valeur de la série de Fourier, pour $x = x_1$,

$$\frac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)]$$
$$+[f(x_1+0)-f(x_1-0)]\lim_{\substack{n=\infty \\ x=x_1}} \int_0^{n(x-x_1)} \frac{\sin\alpha}{\pi\alpha}\,d\alpha.$$

Si l'on fait d'abord $x = x_1$, puis $n = \infty$, on obtient la valeur de Dirichlet ; si l'on fait d'abord $n = \infty$, puis $x = x_1$, on obtient l'une ou l'autre des deux limites $f(x_1+0), f(x_1-0)$, suivant que x s'approche de x_1 par des valeurs supérieures ou par des valeurs inférieures ; si on laisse arbitraire le passage à la limite, on obtient toutes les valeurs intermédiaires. C'est en cela que consiste, d'a-

([1]) *Math. Annalen*, t. VII, 1873, *Ueber die sprungweisen Werthveränderungen analytischer Functionen.*

près M. du Bois-Reymond, *la détermination précise de la somme de la série de Fourier*. Il résulte de ce qui précède que cette détermination repose sur une définition, qui ne paraît pas admissible, de la somme d'une série. Il ne peut y avoir qu'une manière d'opérer : faire $x = x_1$ et ensuite $n = \infty$, et alors disparaît ce que l'on a appelé l'*indétermination continue* de la série ([1]).

On a été conduit à cette opinion erronée, que la détermination de Dirichlet n'est pas absolument exacte, par la considération déjà rappelée d'une fonction de x et de r, définie à l'intérieur du cercle de rayon 1 par l'intégrale de Poisson. Si la série identique à l'intégrale de Poisson se transforme pour tous les points du cercle en une fonction finie continue et bien déterminée, ce passage a lieu d'une manière continue; j'ajoute que le théorème de M. Schwarz a encore lieu quand la fonction est discontinue pour un nombre limité de points du contour. Si l'on ne considère que les points pour lesquels la fonction est continue, M. Prym, dans le Mémoire cité, a étudié comment s'effectue le passage à la valeur-limite $r = 1$ pour les points de discontinuité, et il montre que pour ces points l'intégrale de Poisson peut tendre vers toutes les valeurs comprises entre les limites $f(x+0)$, $f(x-0)$, et que sa valeur-limite dépend de la direction-limite de la droite qui joint le point variable à sa position-limite sur le cercle. La série de Fourier, au contraire, converge seulement vers la valeur moyenne assignée par Dirichlet, parce qu'il s'agit ici de fonctions d'une seule variable.

Les conditions de Dirichlet ne sont en aucune façon nécessaires; elles sont seulement suffisantes. Il restait à examiner si une fonction qui 1° devient infinie en un ou plusieurs points, 2° qui a un nombre infini de discontinuités, 3° qui a un nombre infini de maxima et de minima, peut encore être représentée par la série de Fourier.

Si la fonction devient infinie pour un point c, Dirichlet, dans un autre Mémoire ([2]), indique la convergence de l'intégrale $\int f(x)\,dx$

([1]) Il y a ici encore une question de mots et de définition. L'auteur a choisi entre les deux définitions de la somme celle qui est la meilleure; mais il n'a nullement l'intention de méconnaître l'intérêt du théorème de Duhamel et de la curieuse formule de M. du Bois-Reymond. G. D.

([2]) *Journal de Crelle*, t. 17, p. 54.

étendue de part et d'autre du point c comme condition pour que la série de Fourier représente encore la fonction. Pourtant Dirichlet a voulu présenter cette condition non comme nécessaire, mais seulement comme suffisante. Si l'intégrale est absolument convergente, cette condition est en effet suffisante, comme l'a remarqué M. P. du Bois-Reymond ([1]).

Pour ce qui concerne les deux autres cas d'exception, Dirichlet, à la fin de son premier Mémoire (*loc. cit.*, p. 169), affirmait qu'ils peuvent être ramenés à ceux qu'il avait examinés. Il annonce qu'une fonction, ayant un nombre infini de discontinuités ou de maxima et de minima, pourra toujours être représentée par la série de Fourier pourvu que, dans un intervalle quelconque (a, b), on puisse toujours en placer un autre (r, s) dans lequel la fonction demeurera continue. « Mais », dit-il en terminant son Mémoire, « la chose, pour être faite avec toute la clarté qu'on peut désirer, exige quelques détails liés aux principes fondamentaux de l'Analyse infinitésimale, et qui seront exposés dans une autre Note, dans laquelle je m'occuperai aussi de quelques autres propriétés assez remarquables de la série de Fourier ». Dirichlet n'a pas tenu cette promesse. Quant à la restriction qu'il formule relativement aux fonctions discontinues un nombre infini de fois, elle résulte d'après lui de la notion de l'intégrale définie, et l'on peut par conséquent conclure que, dans l'opinion de Dirichlet, toutes les fonctions intégrables dans le sens qu'il a donné à ce mot peuvent être représentées par la série de Fourier.

Le développement rigoureux de la démonstration a été donné par M. Lipschitz ([3]).

Pour ce qui concerne les fonctions ayant un nombre infini de discontinuités, M. Lipschitz interprète certainement d'une manière fidèle les vues de Dirichlet en considérant le cas unique d'un nombre limité de points singuliers, dans le voisinage desquels existent une infinité de points de discontinuité. Dans ce cas encore la série représente la fonction, comme le démontre M. Lipschitz.

([1]) *Journal de Borchardt*, t. LXXIX, 1874, *Allgemeine Lehrsätze über den Giltigkeitsbereich der Integralformeln, die zur Darstellung willkürlicher Functionen dienen*, p. 43-46, et *Abhandl. der Bayerischen Akad.*, t. XII, II, *Math. physik. Classe*, p. 43-44.

([2]) *Journal de Borchardt*, t. LXIII, 1864, p. 296 : *De explicatione per series trigonometricas*, etc.

Mais la démonstration n'indique rien relativement aux valeurs singulières, et nous n'avons aucun moyen de reconnaître si pour ces valeurs particulières la série est égale à la fonction.

Si l'on a maintenant une fonction ayant un nombre infini de maxima et de minima, rien n'empêche de former la série de Fourier pour cette fonction, si les coefficients ont un sens et si la série est convergente. Mais on ne peut affirmer que la série ainsi formée représente la fonction qu'après avoir prouvé que la série a les mêmes valeurs que la fonction, sauf pour un nombre fini de points déterminés.

Les fonctions qui ont un nombre infini de maxima et de minima peuvent être divisées en deux classes : les unes qui ont dans le voisinage d'un point déterminé une infinité d'oscillations avec une amplitude infiniment petite, et les autres pour lesquelles les amplitudes sont finies. Les premières peuvent être des fonctions continues; les autres sont des fonctions discontinues. Dirichlet regardait toutes les fonctions continues comme susceptibles d'être représentées par la série de Fourier, *sans aucun point d'exception*, et, d'après une communication verbale de M. Weierstrass à laquelle fait allusion M. P. du Bois-Reymond (1), nous pouvons penser qu'il a toujours conservé cette opinion. Riemann aussi paraît avoir accepté cette affirmation de Dirichlet, comme on peut le reconnaître en plusieurs endroits de ses écrits (2). H. Hankel pense même qu'il a été démontré par Dirichlet, Lipschitz et Riemann que toutes les fonctions continues sont développables en une série de Fourier (3). L'inexactitude de cette opinion a été reconnue par M. P. du Bois-Reymond qui, après plusieurs essais infructueux pour démontrer le théorème, a été conduit à penser qu'il pourrait bien être inexact. Dans un travail développé (4) il a fait connaître des conditions compliquées sous lesquelles la série de Fourier, qui représente d'ailleurs la fonction, cesse de lui être égale pour un

(1) *Abhandl. der Bayer. Akad.*, t. XII, II, p. 8.

(2) *OEuvres complètes*, p. 3 : « Neuere Untersuchungen haben, ... », et p. 223 : « In der That für alle Fälle der Natur, ... »; p. 224 : « Wenn man die unnöthige Voraussetzung, etc. »

(3) *Ueber die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen*. Tübingen, 1870, Universitätsschrift, § 3.

(4) *Abh. der Bayer. Akad.*, t. XII, *Math. phys. Classe*, 1876 : *Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln*, Chap. IV.

certain nombre de valeurs. Comme, pour nous, le résultat principal de ces recherches consiste dans la découverte de telles fonctions continues, nous donnerons à la fin de ce travail un exemple simple, que M. Schwarz a fait connaître dans ses Leçons et qu'il a bien voulu nous autoriser à publier. Cet exemple est formellement compris dans l'exemple plus général de M. du Bois-Reymond, mais il s'en distingue par une plus grande simplicité dans la définition comme dans la démonstration.

Cette supposition que la méthode de Dirichlet s'applique à toutes les fonctions continues a conduit Riemann à cette opinion que les fonctions auxquelles la méthode de Dirichlet ne s'étend pas ne se trouvent pas dans la nature (p. 223, 230 et 251 des *OEuvres complètes*). M. Heine [1] pense qu'il est inutile de rechercher si les fonctions discontinues se trouvent dans la nature. Ce qu'il y a de mieux peut-être à dire sur cette question philosophique, c'est que nous ne savons rien à son égard. Toutefois nous devons demeurer convaincus que ce serait ajouter une nouvelle hypothèse à toutes celles qui sont déjà admises en Physique que d'admettre la possibilité de développer une fonction rencontrée dans un problème en une série trigonométrique.

M. Lipschitz a étudié les fonctions ayant un nombre infini de maxima et de minima, mais satisfaisant pour le reste aux conditions de Dirichlet, et il en a fait connaître une classe pour laquelle la série de Fourier est convergente et en outre est toujours égale à la fonction. M. Lipschitz considère une fonction qui est finie et continue entre les limites extrêmes, ou du moins qui n'a qu'un nombre limité de solutions de continuité, mais qui possède un nombre illimité de maxima, soit en des points, soit en des segments. Les deux autres cas, que Dirichlet n'avait pas traités d'une manière complète, ne doivent pas avoir lieu ici : *quia duobus vel tribus casibus simul adcitis seriei species potius quam vis et natura mutatur*. Pourtant le caractère de la série se conserve seulement si plusieurs des singularités laissées de côté par Dirichlet ne se superposent pas en un point. M. Lipschitz appuie sa démonstration sur les théorèmes I, II de Dirichlet, donnés plus haut. Il montre qu'ils

---

(1) *Handbuch der Kugelfunctionen*, 2e édition, t. I, p. 55.

sont encore vrais et par conséquent que la série de Fourier converge encore vers la valeur de la fonction, si, à toutes les places où la fonction oscille, la valeur absolue de la différence $f(\beta+\delta)-f(\beta)$ décroît plus rapidement, quand δ tend vers zéro, que le produit d'une constante B et d'une puissance de δ avec un exposant positif quelconque. Désignons par D la valeur absolue de la différence

$$f(\beta+\delta)-f(\beta);$$

alors la condition de M. Lipschitz est $D<\beta\,\delta^\alpha$, où l'on a $\alpha>0$. Cette condition est plus restrictive que l'hypothèse d'une continuité uniforme. Si l'on veut que la fonction soit uniformément continue, il doit y avoir pour toute valeur de β une valeur minimum δ' dépendante de β et telle que, pour toute valeur δ'' inférieure en valeur absolue à δ', $f(\beta+\delta'')-f(\beta)$ soit plus petit qu'une quantité σ donnée à l'avance et aussi petite qu'on le veut. La condition de M. Lipschitz exige plus que la continuité uniforme, car elle entraîne entre les deux quantités σ, δ' la relation $\sigma \leqq B\delta'^\alpha$ et par conséquent $\delta' \geqq \sqrt[\alpha]{\frac{\sigma}{B}}$. Or rien, dans la définition de la continuité uniforme, n'exige que cette relation soit vérifiée. La condition ne s'applique donc pas à toutes les fonctions continues.

La démonstration de M. Lipschitz ne s'applique pas seulement si la différence D s'approche plus rapidement de zéro que $B\delta^\alpha$. Il est aisé de reconnaître qu'elle exige seulement que l'on ait $\lim\limits_{\delta=0} D\log\delta = 0$, et cette dernière condition est plus générale que la première, car elle est remplie toutes les fois que la première l'est; mais la réciproque n'a pas lieu, et il suffit de prendre le cas où l'on aurait $D=\frac{1}{\log\delta\log\log\delta}$ pour reconnaître que la seconde condition peut être vérifiée sans qu'il en soit de même de la première. Dans son Mémoire (*Sopra la serie di Fourier*; Pise, 1872), M. Dini se sert sans aucune explication de la seconde. On peut donc dire que la série de Fourier représente toute fonction ayant un nombre infini de maxima et de minima, pourvu que l'on ait, à toutes les places où la fonction oscille, $\lim\limits_{\delta=0} D\log\delta = 0$. Si, pour un nombre *limité* de points d'oscillation, cette condition cesse d'être remplie, on peut dire encore que la série de Fourier représente la fonction; toutefois l'on doit renoncer à démontrer, par les moyens qui conduisaient au but dans les cas précédents, la convergence de la série de Fourier, en ces points singuliers, et son égalité avec la fonction. Le succès des recherches de M. Lipschitz sur l'extension des deux théorèmes relatifs à l'intégrale de Dirichlet nous apprend déjà que Riemann était dans l'erreur quand il pensait (*OEuvres*, p. 224) que ces théorèmes ne peuvent plus servir dans le cas où la fonction a un nombre infini de maxima et de minima. Il me semble que la question de savoir si la série de Fourier converge ou diverge ne peut en général être décidée que par l'emploi de ces deux théorèmes, tant que la fonction est intégrable. Si la fonction ne remplit plus la condition d'intégrabilité, alors, il est vrai, les deux théorèmes perdent toute signification; mais dans ce cas nous ne connaissons aucune méthode générale de recherche.

Les recherches de M. Lipschitz ont fait connaître une classe nouvelle de fonctions qui peuvent être représentées par la série de Fourier; mais, pas plus que celles de Dirichlet, elles ne nous ont rien appris sur la nature des conditions qui sont nécessaires pour la représentation d'une fonction par la série de Fourier. On n'a aucun moyen de reconnaître si une fonction qui ne satisfait ni aux conditions de Dirichlet ni à celles de M. Lipschitz est ou n'est pas susceptible d'être représentée par la série de Fourier. On peut objecter, il est vrai, que c'est peut-être trop exiger que de demander les conditions nécessaires pour qu'une fonction puisse être représentée par la série de Fourier. Quand on a donné la définition la plus générale d'une série à termes positifs en disant que la série est convergente lorsque la somme des n premiers termes tend, pour n croissant indéfiniment, vers une limite déterminée, il n'y aucune autre définition qui ait précisément la même étendue.

On pourra bien trouver des conditions de plus en plus étroites, des classes de plus en plus étendues de fonctions susceptibles d'être représentées par la série de Fourier; mais si l'on parvenait à trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour la représentation, elles pourraient fort bien être équivalentes à celles qui sont contenues dans la définition, et tout énoncé caractérisant les fonctions susceptibles d'une représentation par la série de Fourier pourrait se réduire purement et simplement à la définition même de la représentation.

Si une tentative d'obtenir des conditions plus étroites que celles de Dirichlet et de M. Lipschitz ne paraît pas devoir conduire à des résultats simples, il est néanmoins à désirer que l'on puisse obtenir un nombre illimité de classes de plus en plus étendues, absolument comme on a pour les séries à termes positifs des règles de convergence dont l'application peut être indéfiniment poursuivie. Une seule tentative a été faite dans cette voie par M. P. du Bois-Reymond dans son Mémoire : *Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungs-Formeln* (*loc. cit.*, Chap. I-III). Nous ne signalerons dans ce travail que le résultat suivant : il y a en réalité des fonctions qui ne satisfont pas à la condition énoncée par M. Lipschitz et pour lesquelles la série de Fourier est divergente.

(*A suivre*).