BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 385-415

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_385_0>

© Gauthier-Villars, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LIPSCHITZ (R.). — Lehrbuch der Analysis. Erster Band. Grundlagen der Analysis, 1877. 1 vol. in-8°, 594 pages.

Dans ce Volume, l'auteur traite de l'Arithmétique et des éléments de l'Algèbre; nous indiquons ci-dessous l'ordre qui a été suivi, et nous terminons en résumant l'intéressante démonstration donnée par M. Lipschitz du principe fondamental de la théorie des équations.

Section I : *Calcul des nombres déterminés.*

Chapitre I : Éléments de la science des nombres entiers (p. 1-22). Notion du nombre entier; opérations fondamentales; nombres premiers, nombres composés; plus grand commun diviseur; nombres premiers entre eux; décomposition en facteurs premiers; diviseurs d'un nombre; nombres premiers à un nombre donné et inférieurs à lui. Addition, soustraction, multiplication des nombres entiers positifs ou négatifs.

Chapitre II : Calcul des fractions (p. 23-27).

Chapitre III : Calcul des puissances des nombres entiers et fractionnaires; nombres rationnels et irrationnels (p. 28-60). Puissances d'une fraction donnée; racine $n^{\text{ième}}$ arithmétique; valeurs limites; limites d'une somme, d'un produit, etc.; définition des nombres rationnels et irrationnels; signification unique de la racine $n^{\text{ième}}$ arithmétique; calcul des radicaux; généralisation de la notion d'exposant.

Section II : *Éléments d'Algèbre.*

Chapitre I : Expressions entières et rationnelles; grandeurs constantes et variables (p. 61-66).

Chapitre II : Fonctions rationnelles entières d'une seule variable; équations algébriques à une seule inconnue (p. 66-295). Fonctions entières du premier et du second degré à une variable; équations du premier, du second degré. Introduction et calcul des quantités imaginaires; décomposition du trinôme du second degré en facteurs du premier degré. Équations binômes; résolution de ces équations; propriétés de leurs racines; division du cercle en n parties égales; représentation géométrique des quantités imaginaires. Racines d'une équation; décomposition d'une fonction entière en facteurs du premier degré; application aux équations binômes; transformation d'une fonction entière par le changement de la variable; dérivées des fonctions entières. Équations du troisième et du quatrième degré; équations résolvantes. Fonctions symétriques; produit des carrés des différences des racines d'une équation. Démonstration de ce que toute équation algébrique entière à une inconnue admet une racine réelle ou imaginaire.

Décomposition d'une fonction entière en facteurs; plus grand commun diviseur algébrique; fractions continues arithmétiques et algébriques.

Chapitre III : Fonctions rationnelles entières à plusieurs variables (p. 296-299).

Chapitre IV : Systèmes de n fonctions linéaires à n inconnues; résolution de n équations du premier degré à n inconnues; déterminants (p. 300-350).

Chapitre V : Fonctions homogènes entières à deux variables (p. 351-359).

Chapitre VI : Formes quadratiques (p. 360-450). Formes positives à deux variables; leur représentation dans le plan d'après Gauss; leur transformation; réduction d'une forme quadratique dont le déterminant est nul à un moindre nombre de variables; formes adjointes; décomposition en carrés; formes quadratiques ternaires positives; leur représentation dans l'espace d'après Gauss. Inertie des formes quadratiques.

Section III : *De la division poursuivie indéfiniment.*

Chapitre I : Suites récurrentes (p. 451-475). Division de deux fonctions entières; progressions géométriques; division au moyen des coefficients indéterminés; suites récurrentes; décomposition d'une fraction rationnelle en fractions élémentaires; décomposition d'une série récurrente en séries élémentaires; somme des puissances semblables des racines d'une équation. Formule d'interpolation. Développements de $(1+x)^m$ en série dans le cas de m entier négatif. Sommation d'une série récurrente indéfinie.

Section IV : *Fonctions exponentielle, logarithmique, trigonométrique directes et inverses* (p. 476-501).

Section V : *Séries et produits infinis.*

Chapitre I : Propriétés générales des séries et des produits infinis (p. 502-546). Séries; convergence. Continuité d'une fonction. Addition, soustraction, multiplication des séries. Convergence des produits infinis; applications.

Chapitre II : Séries ordonnées suivant les puissances entières de la variable qui représentent les fonctions fondamentales de l'Analyse (p. 547-591).

Voici maintenant, dans ses principaux traits, la démonstration donnée par M. Lipschitz du principe fondamental de la théorie des équations.

Non seulement cette démonstration prouve l'existence d'une racine pour toute équation entière, mais elle permet de construire une suite de nombres qui aient cette racine pour limite; la *méthode d'approximation,* qui constitue en quelque sorte la substance de cette démonstration, ne diffère pas, au fond, de la méthode donnée par Newton pour approcher de plus en plus d'une racine réelle; mais, si cette méthode se présentait naturellement à l'esprit, il y avait une difficulté réelle dans le choix du point de départ, de la première valeur imaginaire à laquelle on voulait appliquer la méthode pour former une suite de nombres ayant réellement une racine pour limite.

Soit

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

une équation entière du degré n; soient

$$L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_n$$

les modules des coefficients

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n.$$

On fera d'abord les remarques suivantes.

Si l'on détermine un nombre R qui satisfasse aux inégalités

$$\begin{aligned} R &> (n+1)L_1, \\ R^2 &> (n+1)L_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R^n &> (n+1)L_n, \end{aligned}$$

et si l'on décrit de l'origine comme centre un cercle (R) avec le rayon R, pour un point x situé à l'extérieur de ce cercle, le module de $f(x)$ est supérieur à $\frac{\mathrm{R}^n}{n+1}$ et celui de la fonction dérivée $f'(x)$ est supérieur à $\frac{n(n+3)}{2(n+1)}\mathrm{R}^{n-1}$, en sorte que les racines des équations $f(x)=0, f'(x)=0$ ne peuvent être situées qu'à l'intérieur de ce cercle. On trouve tout aussi aisément des limites supérieures, dépendant de R, pour les modules des valeurs que peuvent prendre, à l'intérieur du cercle, les fonctions $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$. Nous désignerons dans la suite ces limites par $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Admettant maintenant que la proposition qu'il s'agit de démontrer soit vraie pour les équations de degré $n-1$, en particulier pour l'équation $f'(x)=0$, il s'agit d'établir qu'elle subsiste pour l'équation de degré $n, f(x)=0$; il suffit évidemment d'examiner le cas où aucune des racines $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ de l'équation dérivée n'annule $f(x)$; on choisira une de ces racines, η_1, telle que le module de $f(\eta_1)$ soit inférieur ou égal aux modules des quantités $f(\eta_2), f(\eta_3), \ldots, f(\eta_{n-1})$, et c'est cette racine η_1 qui constitue le premier point de départ de M. Lipschitz.

On sait depuis longtemps déduire de la quantité η_1 une autre quantité z_1 telle que le module de $f(z_1)$ soit inférieur au module de $f(\eta_1)$; il est clair qu'en procédant de cette façon l'on ne tombera jamais sur aucune des racines $\eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ de l'équation dérivée, à cause de la façon dont on a choisi η_1; M. Lipschitz précise d'ailleurs comme il suit la façon dont on déduira z_1 de η_1.

Posant $z_1=\eta_1+\xi$, on aura

$$f(\eta_1+\xi)=f(\eta_1)+\xi f'(\eta_1)+\frac{\xi^2}{1.2}f''(\eta_1)+\ldots+\frac{\xi^n}{1.2\ldots n}f^n(\eta_1).$$

Le terme en $f'(\eta_1)$ est nul; plusieurs des termes suivants peuvent s'annuler aussi. Soit $f^i(\eta_1)$ la première dérivée qui n'est pas nulle; on aura

$$f(\eta_1+\xi)=f(\eta_1)+\frac{\xi^i}{1.2\ldots i}f^i(\eta_1)+\ldots+\frac{\xi^n}{1.2\ldots n}f^n(\eta_1).$$

Désignant maintenant par h une quantité réelle et comprise entre 0 et 1 (on restreindra davantage dans un instant les valeurs qu'on peut attribuer à h), on déterminera ξ par l'équation binôme

$$hf(\eta_1) + \frac{\xi^i}{1.2\ldots i}f^i(\eta_1) = 0.$$

Si ζ désigne une quelconque des racines de l'équation binôme

$$f(\eta_1) + \frac{\zeta^i}{1.2\ldots i}f^i(\eta_1) = 0,$$

on aura

$$\xi = \zeta h^{\frac{1}{p}},$$

le symbole $h^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{h}$ ayant le sens arithmétique; on aura alors

$$f(\eta_1 + \xi) = f(\eta_1)(1 - h) + \lambda + i\mu,$$

$\lambda + i\mu$ étant une quantité imaginaire dont le module sera inférieur à

$$\mathrm{P}\left(h^{\frac{i+1}{i}} + h^{\frac{i+2}{i}} + \ldots + h^{\frac{n}{i}}\right),$$

où P désigne un nombre réel quelconque supérieur aux modules des quantités

$$\frac{\zeta^{i+1}}{1.2\ldots(i+1)}f^{i+1}(\eta_1), \quad \ldots, \quad \frac{\zeta^n}{1.2\ldots n}f^n(\eta_1);$$

le module de $\lambda + i\mu$ sera donc inférieur à

$$(n - i)\mathrm{P}h^{1+\frac{1}{i}}.$$

Si donc on astreint h à satisfaire à l'inégalité

$$|f(\eta_1)| - (n - i)\mathrm{P} - h^{\frac{1}{i}} > 0 \quad (^1),$$

on aura

$$|f(\eta_1 + \xi)| < |f(\eta_1)|(1 - h) + (n - i)\mathrm{P}h^{1+\frac{1}{i}}$$

ou

$$< |f(\eta_1)| - h\left[|f(\eta_1)| - (n - i)\mathrm{P}h^{\frac{1}{i}}\right],$$

---

(1) Ici et plus loin $|a|$ désigne le module de a.

et le module de $f(z_1)$, où

$$z_1 = \eta_1 + \zeta h^{\frac{1}{i}}$$

sera bien inférieur à celui de $f(\eta_1)$. On partira maintenant de la valeur z_1 et on la traitera de la même façon; seulement il faut remarquer que l'équation binôme qu'on a à résoudre est maintenant du premier degré et que, si l'on continue de la même façon, il en sera toujours ainsi. Si donc on pose

$$z_2 = z_1 + \xi_1,$$

$$\zeta_1 = -\frac{f(z_1)}{f'(z_1)},$$

et si l'on désigne par h_1 une quantité réelle comprise entre o et 1, satisfaisant en outre à l'inégalité

$$|f(z_1)| - (n-1)P_1 h_1 > 0,$$

P_1 désignant un nombre réel quelconque supérieur aux modules des quantités

$$\frac{\zeta_1^2}{1.2} f''(z_1), \quad \frac{\zeta_1^3}{1.2.3} f'''(z_1), \quad \ldots, \quad \frac{\zeta_1^n}{1.2\ldots n} f^n(z_1),$$

on aura

$$|f(z_1 + \xi_1)| < |f(z_1)| - h_1[|f(z_1)| - (n-1)P_1 h_1],$$

et le module de $f(z_2)$ sera bien inférieur à celui de $f(z_1)$; on continuera de la même façon, et l'on obtiendra ainsi une suite de quantités

$$\begin{array}{l} z_2,\ \zeta_2,\ h_2,\ P_2, \\ z_3,\ \zeta_3,\ h_3,\ P_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

analogues à z_1, ζ_1, h_1, P_1. Nous montrerons tout à l'heure que les quantités P_1, P_2, P_3, ... peuvent être prises inférieures à un nombre positif Q, convenablement déterminé; rien n'empêche dès lors de prendre toutes ces quantités égales à Q. Si maintenant on désigne par δ_1, δ_2, δ_3, ... les modules des quantités $f(z_1)$, $f(z_2)$, $f(z_3)$, ..., et si l'on prend

$$h_1 = \frac{\delta_1}{2(n-1)Q}, \quad h_2 = \frac{\delta_2}{2(n-1)Q}, \quad \ldots,$$

on aura

$$\delta_2 = \delta_1\left[1 - \frac{\delta_1}{4(n-1)Q}\right],$$
$$\delta_3 = \delta_2\left[1 - \frac{\delta_2}{4(n-1)Q}\right],$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

d'où

$$\delta_m = \delta_1\left[1 - \frac{\delta_1}{4(n-1)Q}\right]\left[1 - \frac{\delta_2}{4(n-1)Q}\right]\cdots\left[1 - \frac{\delta_{m-1}}{4(n-1)Q}\right],$$

et l'on en conclut de suite qu'on peut prendre l'indice m assez grand pour que, pour cet indice et les indices supérieurs, on ait

$$\delta_m < \delta,$$

quelque petit que soit le nombre δ.

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, les quantités $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m-1}$, qui forment une suite décroissante, seraient toutes supérieures à δ, en sorte que l'on aurait

$$\delta_m < \delta_1\left[1 - \frac{\delta}{4(n-1)Q}\right]^{m-1}.$$

Or le second membre, lorsque m augmente indéfiniment, tend vers zéro.

Lors donc que m augmente indéfiniment, il est certain que le module de $f(z_m)$ tend vers zéro.

Il reste à prouver ce qui a été admis relativement aux nombres $P_1, P_2, \dots$, à savoir qu'ils peuvent être regardés comme inférieurs à un nombre déterminé Q; P_m, par exemple, est assujetti à être plus grand que le plus grand des modules des quantités

$$\frac{\zeta_m^2}{1.2} f''(z_m), \quad \dots, \quad \frac{\zeta_m^n}{1.2\dots n} f^m(z_m).$$

Or, d'une part, les modules des quantités

$$f''(z_m), \quad \dots, \quad f^n(z_m)$$

restent inférieurs aux quantités

$$\varphi'', \quad \dots, \quad \varphi^{(n)},$$

et cela quel que soit l'indice m, puisque les points $z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots$ restent toujours à l'intérieur du cercle (R); d'un autre côté,

$$\zeta_m = -\frac{f(z_{m-1})}{f'(z_{m-1})}$$

a un module qui reste inférieur à une quantité déterminée : d'une part, en effet, le module du numérateur est inférieur à φ; de l'autre, on peut décrire des points $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ comme centres, avec des rayons $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ suffisamment petits, des cercles tels que les points $z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots$ ne se trouvent jamais à l'intérieur de l'un de ces cercles; ces rayons, en effet, peuvent être pris assez petits pour que, dans l'intérieur du cercle décrit de γ_k comme centre, par exemple, le module de $f(z)$ diffère aussi peu qu'on le veut du module de $f'(\gamma_k)$, et, en particulier, en diffère d'une quantité moindre que

$$|f(\gamma_1)| - |f(z_1)|,$$

quantité qui, elle-même, est moindre que

$$|f(\gamma_k)| - |f(z_m)|.$$

Le point z_m sera donc à l'extérieur de ce cercle; il en résulte que le module de $f'(z_{m-1})$ ou de $n(z_{m-1}-\gamma_1)(z_{m-1}-\gamma_2)\ldots(z_{m-1}-\gamma_n)$ est inférieur à

$$n\rho_1\rho_2\ldots\rho_{n-1} = \psi,$$

et par conséquent, enfin, les modules des quantités

$$\frac{\zeta_m^2}{1.2}f''(z_m), \quad \ldots, \quad \frac{\zeta_m^n}{1.2\ldots n}f^n(z_m)$$

restent toujours inférieurs à un nombre déterminé Q.

La suite des égalités

$$\zeta_1 = -\frac{f(z_1)}{f'(z_1)},$$

$$\zeta_2 = -\frac{f(z_2)}{f'(z_2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\zeta_m = -\frac{f(z_m)}{f'(z_m)}$$

prouvent que les modules des quantités $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_m$, tendent vers zéro avec $\frac{1}{m}$, puisqu'il en est ainsi des modules des quantités

$$f(z_1),\ f(z_2),\ \dots,\ f(z_m),\ \dots$$

et que les modules des quantités

$$f'(z_1),\ f(z_2),\ \dots,\ f'(z_m),\ \dots$$

restent supérieurs à ψ.

On peut enfin remarquer qu'on peut pousser les opérations assez loin pour que, à partir d'un certain moment, on puisse prendre toujours les quantités h égales à l'unité; à partir de ce moment, on applique réellement la méthode d'approximation de Newton.

Si, en effet, on se reporte à l'égalité

$$f(z_p+\xi_p) = f(z_p) + \xi_p f'(z_p) + \frac{\xi_p^2}{1.2} f''(z_p) + \dots + \frac{\xi_p^n}{1.2\dots n} f^n(z_p),$$

on voit qu'on pourra prendre

$$\xi_p = \zeta_p = -\frac{f(z_p)}{f'(z_p)},$$

pourvu que le module de

$$\frac{\zeta_p^2}{1.2} f''(z_p) + \dots + \frac{\zeta_p^n}{1.2\dots n} f^n(z_p)$$

soit inférieur au module δ_p de $f(z_p)$. Or, puisque les quantités δ_p décroissent constamment et indéfiniment avec $\frac{1}{p}$, on peut prendre l'indice p assez grand pour que l'on ait

$$\left(\frac{\delta_p}{\psi}\right) \frac{\varphi''}{1.2} + \dots + \left(\frac{\delta_p}{\psi}\right)^{n-1} \frac{\varphi^{(n)}}{1.2\dots n} < c\psi,$$

c étant un nombre réel quelconque compris entre 0 et 1; s'il en est ainsi, on aura

$$|f(z_p+\zeta_p)| < c\psi|\zeta| < c|f(z_p)|,$$

et cette inégalité subsistera pour les valeurs de l'indice supérieures à p.

Si donc on prend $z_{p+1} = z_p + \zeta_p + \ldots$, on aura

$$\begin{aligned} \delta_{p+1} &< c\delta_p, \\ \delta_{p+2} &< c\delta_{p+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit immédiatement que les quantités

$$\delta_{p+1},\ \delta_{p+2},\ \delta_{p+3},\ \ldots$$

tendent vers zéro quand l'indice augmente indéfiniment.

Maintenant on a

$$z_{p+m} = z_p + \zeta_p + \zeta_{p+1} + \ldots + \zeta_{p+m};$$

d'ailleurs,

$$\begin{aligned} |\zeta_{p+1}| &< \frac{\delta_p}{\psi}, \\ |\zeta_{p+2}| &< \frac{\delta_{p+1}}{\psi} < \frac{c\delta_p}{\psi}, \\ |\zeta_{p+3}| &< \frac{c^2\delta_p}{\psi}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |\zeta_{p+m}| &< \frac{c^{m-1}\delta_p}{\psi}, \end{aligned}$$

$$|\zeta_p + \zeta_{p+1} + \ldots + \zeta_{p+m}| < \frac{\delta_p}{\psi}\,\frac{1}{1-c},$$

et l'on voit qu'on peut toujours prendre p assez grand pour que le module de la différence $z_{p+m} - z_p$ soit, quelque grand que soit m, inférieur à une quantité donnée, si petite qu'elle soit. Les termes de la suite

$$z_p,\ z_{p+1},\ \ldots,\ z_{p+m},\ \ldots$$

tendent donc, quand l'indice augmente indéfiniment, vers une certaine limite z, et il est clair que le module de $f(z)$ est nul. La proposition est donc démontrée.

C. SCHILLING. — SUR LA SURFACE MINIMA DE CINQUIÈME CLASSE (¹).

Dans le Mémoire *Ueber die Flächen deren mittlere Krümmung überall gleich null ist*, M. Weierstrass s'est occupé de ce problème : *Trouver toutes les surfaces minima qui sont algébriques et d'une classe déterminée* (²).

Ce problème, dans le cas où la classe de la surface est un nombre premier ou le double d'un nombre premier, a été résolu par M. Sophus Lie dans deux Mémoires où la méthode employée diffère dans une certaine mesure de celle de M. Weierstrass (³).

Dans le cours de ses recherches, M. Lie donne une preuve nouvelle du théorème établi par M. Henneberg (⁴), relativement à la non-existence de surfaces minima réelles de classe inférieure à la cinquième.

M. Weierstrass a annoncé oralement l'existence d'une surface minima de la cinquième classe, et fait cette remarque, que l'on peut passer d'une face à l'autre par un chemin continu.

M. Henneberg est parvenu à la même surface (⁵) en cherchant à déterminer la surface minima qui admet pour lignes géodésiques les développées de la parabole. Il a montré plus tard qu'elle était de la cinquième classe (⁶). Il a démontré ensuite de deux façons différentes que cette surface est du dix-septième ordre. M. Lie a donné au contraire le nombre 15 pour l'ordre de cette surface : la suite de ce travail confirme cette détermination.

Dans ce qui suit, on se propose d'établir les points principaux des recherches de M. Lie, en modifiant d'ailleurs la méthode d'exposition, et l'on s'occupe particulièrement de la recherche de la surface minima de la cinquième classe.

(¹) Ce qui suit a été, pour la majeure partie, traduit du Mémoire de M. Schilling; plusieurs passages ont été abrégés ou légèrement modifiés.

(²) *Monatsberichte der Berl. Akad. d. Wissenschaften*, p. 612-619; 1866.

(³) *Mathem. Annalen*, t. XIV, p. 331-416, et t. XV, p. 463-506.

(⁴) *Annali di Matem.*, 2ᵉ serie, t. IX, p. 54-57; *Bestimmung der niedrigsten Klassenzahl der algebraischen Minimalflächen*.

(⁵) *Ueber solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene Curve zur geodätischen Linie haben*. Zurich, 1875.

(⁶) *Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellsch. in Zürich*, Jahrg. 21, p. 66-70 : *Ueber diejenige Minimalfläche*, etc.

ÉTABLISSEMENT DE QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES ; LEMMES CONCERNANT LES SURFACES MINIMA ALGÉBRIQUES.

1. *Recherches générales ; définition des courbes minima.* — Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point, t une variable réelle, et

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \psi_1(t), \quad z = \chi_1(t)$$

les équations d'une courbe, où φ, ψ, χ désignent des fonctions analytiques de t ; soient de même

$$x = \varphi_2(\tau), \quad y = \psi_2(\tau), \quad z = \chi_2(\tau)$$

les équations d'une seconde courbe ; les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \varphi_1(t) + \varphi_2(\tau), \\ y &= \psi_1(t) + \psi_2(\tau), \\ z &= \chi_1(t) + \chi_2(\tau) \end{aligned} \right.$$

représenteront une surface engendrée par le mouvement de translation de l'une des deux courbes le long de l'autre.

Dans le cas où t et τ désignent des variables imaginaires, M. Lie conserve le nom de *surface* à la figure analytique définie par les équations (1).

Une suite de restrictions convenables permet de réduire cette *surface* à une surface minima réelle.

On suppose d'abord que l'on a

$$[\varphi'_1(t)]^2 + [\psi'_1(t)]^2 + [\chi'_1(t)]^2 = 0,$$
$$[\varphi'_2(\tau)]^2 + [\psi'_2(\tau)]^2 + [\chi'_2(\tau)]^2 = 0,$$

et l'on obtient alors une *surface analytique* qui satisfait aux équations qui, d'après Monge, définissent les surfaces minima.

M. Lie désigne sous le nom de *courbes minima* les courbes pour lesquelles on a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

La seconde restriction consiste à prendre pour t et τ des valeurs conjuguées et pour les fonctions φ_2, ψ_2, χ_2 les fonctions conjuguées de φ_1, ψ_1, χ_1; les équations de M. Lie coïncident alors avec les équations données par M. Weierstrass et représentent toutes les surfaces minima réelles.

Les équations (1), dont la signification est ainsi restreinte, correspondent aux équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \int (1-s^2)\,F(s)\,ds + \int (1-s_1^2)\,F_1(s_1)\,ds_1,\\ y &= i\int (1+s^2)\,F(s)\,ds - i\int (1+s_1^2)\,F_1(s_1)\,ds_1,\\ z &= \int 2s\,F(s)\,ds \quad + \int 2s_1 F_1(s_1)\,ds_1, \end{aligned}\right.$$

écrites avec les notations de M. Weierstrass et où, comme dans le Mémoire de ce dernier, $F(s)$ désigne une fonction analytique de s et $F_1(s_1)$ la fonction conjuguée de la variable conjuguée s_1.

Les recherches de M. Weierstrass ont montré que, pour obtenir une surface minima algébrique, il était nécessaire et suffisant de prendre pour $F(s)$ la dérivée troisième d'une fonction algébrique de s; $F_1(s_1)$ a, par suite, une détermination analogue. On parvient aussi, par une voie semblable, en partant des équations (1), aux surfaces minima algébriques, en prenant pour φ_1, ψ_1, χ_1 comme pour φ_2, ψ_2, χ_2 des fonctions algébriques des variables.

II. *Fondements des recherches de M. Lie. Définition et nature des surfaces doubles.* — L'idée fondamentale des recherches de M. Lie consiste à effectuer analytiquement, en quelque sorte, dans le cas où les variables t et τ sont imaginaires, les opérations qui, comme la translation d'une courbe, la génération d'une surface par la translation d'une courbe le long d'une autre courbe, n'ont de sens géométrique que dans le cas où l'on a affaire à des variables réelles.

Soit donc

$$x=\varphi_1(t),\quad y=\psi_1(t),\quad z=\chi_1(t)$$

une courbe minima; la translation (au sens analytique) de cette courbe le long d'une autre courbe minima

$$x=\varphi_2(\tau),\quad y=\psi_2(\tau),\quad z=\chi_2(\tau)$$

engendrera la surface minima réelle.

Avec les notations de M. Weierstrass, les équations d'une courbe minima sont

$$x = \int (1 - s^2) F(s)\, ds,$$

$$y = i \int (1 + s^2) F(s)\, ds,$$

$$z = \int 2s\, F(s)\, ds.$$

En donnant aux trois intégrales une même limite inférieure s_0, on obtient une courbe spéciale du faisceau, qui peut être regardée comme le type de toutes les courbes de ce faisceau.

Dans ce mode de représentation, par chaque point d'une courbe minima de première espèce passe une courbe minima de seconde espèce. En général, on doit concevoir les deux faisceaux de courbes comme distincts et comme constituant, pour ainsi dire, un réseau uniforme sur la surface; mais il peut se faire que la translation des courbes d'un faisceau le long d'une courbe de l'autre fasse coïncider les deux faisceaux, en sorte que chaque courbe minima d'un faisceau coïncide avec une courbe minima de l'autre faisceau et que les deux faisceaux n'en fassent plus, en réalité, qu'un seul. Les surfaces minima de cette nature ont reçu de M. Lie la dénomination de *surfaces doubles*.

Si l'on se trouve dans ce cas, on doit pouvoir, en désignant par t_0 et τ'_0 des valeurs convenablement choisies des deux systèmes de variables, faire correspondre ces variables de façon que l'on ait

$$\varphi_1(t) + \varphi_2(\tau'_0) = \varphi_1(t_0) + \varphi_2(\tau'),$$
$$\psi_1(t) + \psi_2(\tau'_0) = \psi_1(t_0) + \psi_2(\tau'),$$
$$\chi_1(t) + \chi_2(\tau'_0) = \chi_1(t_0) + \chi_2(\tau'),$$

d'où

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi_1(t) - \varphi_2(\tau') &= C_1,\\ \psi_1(t) - \psi_2(\tau') &= C_2,\\ \chi_1(t) - \chi_2(\tau') &= C_3,\end{aligned}\right.$$

où C_1, C_2, C_3 sont des quantités indépendantes des variables t et τ'. (La dernière de ces variables a été affectée d'un accent, parce que, dans le mode de correspondance qui nous occupe, les variables t et τ' ne sont plus conjuguées.)

En revenant aux formules de M. Weierstrass, on trouve, pour les mêmes conditions,

$$(4)\quad \begin{cases} (1-s^2)\,F(s)\,ds = \quad (1-s_1'^2)\,F_1(s_1')\,ds_1', \\ (1+s^2)\,F(s)\,ds = -(1+s_1'^2)\,F_1(s_1')\,ds_1', \\ \qquad 2s\,F(s)\,ds = 2s_1'\,F_1(s_1')\,ds_1', \end{cases}$$

d'où

$$(5)\quad \begin{cases} s = -\dfrac{1}{s_1'}, \\ \dfrac{1}{s^2}\,F_1\left(-\dfrac{1}{s}\right) = -s^2\,F(s). \end{cases}$$

En satisfaisant à ces conditions, on obtiendra une surface double.

Aux points s et $-\frac{1}{s}$ (ou s_1') du plan (s) correspond, sur la sphère qui est la projection stéréographique de ce plan, deux points diamétralement opposés; mais, si l'on se reporte à la relation uniforme qui lie chaque point de la surface à un point correspondant de la sphère (ayant pour coordonnées les cosinus directeurs de la normale au point de la surface minima), on voit que des normales de directions opposées correspondent au point de la surface déterminé par la valeur s de la première variable (et la valeur conjuguée s_1 de la seconde variable) et au point de la surface déterminé par la valeur $s_1' = -\frac{1}{s}$ de la seconde variable $\left(\text{et la valeur conjuguée } s' = -\frac{1}{s_1} \text{ de la première variable}\right)$; mais il résulte des conditions précédentes que les portions de surfaces qui correspondent aux domaines de ces deux points peuvent être amenées l'une sur l'autre par une translation; si elles ne coïncidaient pas effectivement, la surface serait périodique et par conséquent transcendante, cas que nous excluons. Ainsi, ces deux portions de surface (pour lesquelles les directions des normales sont opposées) coïncident, mais doivent être regardées comme appartenant à des faces opposées de la surface minima; par suite :

De toute surface double minima algébrique on peut détacher une portion finie telle qu'on puisse passer par un chemin continu d'une face à l'autre, sans traverser le contour.

A chaque point de cette surface situé à l'intérieur d'un contour déterminé correspondent deux points de la sphère; on doit donc concevoir en quelque sorte la surface comme double, et la dénomination adoptée par M. Lie est ainsi justifiée.

III. *Classe et ordre des surfaces minima.* — Pour déterminer la classe et l'ordre des surfaces minima algébriques, on s'appuie sur ce que certaines conceptions et conclusions relatives aux figures géométriques réelles sont indépendantes de la réalité de ces figures, tant qu'elles sont déterminées par des équations algébriques.

On a le théorème général suivant (1) :

Si l'on prend sur une surface minima quelconque une courbe minima quelconque, et que l'on mène par tous les points de cette courbe les tangentes aux autres courbes minima qui passent par ces différents points, ces tangentes passent par un même point du cercle imaginaire à l'infini.

Si l'on prend maintenant sur ce cercle un point quelconque π, non singulier, et que l'on mène par ce point toutes les tangentes à la surface minima, leur ensemble forme le cône ou cylindre (les deux dénominations conviennent ici) mené du point π tangentiellement à la surface, et la classe de la surface sera la classe de ce cône.

Chacune de ces tangentes est aussi tangente à une courbe minima du premier faisceau K ou à une courbe minima du second faisceau K', car, si l'on mène le plan tangent en un point quelconque de la surface minima, il coupera le cercle imaginaire à l'infini en deux points auxquels correspondent les deux tangentes aux deux courbes minima qui passent par ce point de la surface.

Considérons maintenant l'ensemble des surfaces formées par les tangentes à une courbe minima K_1 du premier faisceau; soit M la multiplicité du cercle imaginaire à l'infini pour l'une quelconque de ces surfaces : du point π on pourra mener M tangentes parallèles à la courbe K_1 du premier faisceau. Si l'on effectue maintenant le

(1) Sophus Lie, *loc. cit.*, th. 9.

mouvement de translation qui a été expliqué au début, on voit que, par ce mouvement, chacune de ces tangentes engendre un cône (ou cylindre) circonscrit à la surface minima le long d'une courbe du second faisceau; le nombre de ces cônes circonscrits est ainsi M; à ces M cônes correspondent M′ cônes circonscrits à la surface le long des courbes du premier faisceau, en désignant par M′ le degré de multiplicité du cercle imaginaire à l'infini pour une surface engendrée par les tangentes à une courbe du second faisceau.

La classe d'un cône pris isolément est égale au nombre des plans tangents qu'on peut lui mener par une droite passant par le sommet du cône non singulière; elle est ainsi égale, dans ce cas, au rang de la courbe minima (c'est-à-dire au degré de la surface des tangentes à cette courbe), diminué de la multiplicité du point π, relativement à la surface des tangentes.

Soient donc R et R′ les rangs des courbes des deux faisceaux; on a M cônes de la classe R′ — M′ et M′ cônes de la classe R — M.

La classe de la surface minima est

$$M'(R - M) + M(R' - M').$$

Si la surface minima est réelle, les deux faisceaux de courbes minima sont conjugués et l'on a

$$R = R', \quad M = M';$$

la classe est $2M(R - M)$.

Si, en particulier, la surface minima est une surface double, on parviendra par un raisonnement analogue à M cônes circonscrits de la classe R — M; la classe de la surface est donc M(R — M).

Il suit de là que les surfaces minima algébriques dont la classe est impaire, et en particulier un nombre premier, sont des surfaces doubles.

Puisqu'il n'existe pas de courbe dont le rang soit inférieur à 4 et que les surfaces minima de classes 3 et 4 sont toujours imaginaires, comme l'a montré M. Lie, on voit que la classe la moins élevée possible pour les surfaces minima réelles est 5.

L'ordre d'une surface minima déterminée par les équations

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \varphi_1(t) + \varphi_2(\tau), \\ y = \psi_1(t) + \psi_2(\tau), \\ z = \chi_1(t) + \chi_2(\tau) \end{cases}$$

est égal au nombre de points d'intersection, à distance finie, de la surface et de la droite

$$x = a + \alpha\rho, \quad y = b + \beta\rho, \quad z = c + \gamma\rho,$$

les constantes a, b, c, α, β, γ ayant des valeurs quelconques.

Si l'on désigne par m_1, m_2 les ordres des deux courbes minima, on voit sans peine que l'ordre de la surface minima est

$$m_1 m_2 - \omega,$$

ω désignant le nombre des points communs aux deux courbes situés à l'infini.

Dans le cas d'une surface réelle, $m_1 = m_2 = m$ et l'ordre est $m^2 - \omega$; enfin, dans le cas d'une surface double, il est

$$\frac{1}{2}(m^2 - \omega).$$

Dans le cas des surfaces réelles, ω peut aussi être regardé comme le nombre des points à l'infini d'une courbe minima dont les conjugués appartiennent à la même courbe.

IV. *Détermination de l'ordre, du rang et de la classe des courbes minima sous la supposition* $M = 1$. — Ce qui précède ne fournit point de procédé pratique pour déterminer dans le cas général les nombres R, M, m; lorsque M est égal à 1, M. Lie a donné un moyen simple pour déterminer les autres nombres.

La supposition $M = 1$ entraîne cette conséquence que les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe minima, et par suite aussi la fonction $F(s)$, doivent être des fonctions rationnelles de s; inversement, s'il en est ainsi, on a $M = 1$, puisqu'à chaque point du cercle imaginaire à l'infini ne correspond qu'une seule valeur de s.

Dans ce cas, les courbes minima sont des courbes unicursales.

La décomposition en fractions simples permet de mettre la fonction $F(s)$ sous la forme

$$F(s) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_i^{(k)}}{(s - a_k)^i} + C_0 + C_1 s + \ldots + C_n s^n.$$

Si C_n, où $n > 0$, est différent de zéro, x, y, z sont infinis en même temps que s, et la valeur $s = \infty$ appartient aux valeurs singulières ; on évite cette circonstance par une rotation convenable du système d'axes coordonnés. En général, les formules n'entraînent aucune particularisation, quand on y suppose tous les C nuls et que, par suite, on augmente q d'une unité.

Les coordonnées x, y, z devant être des fonctions rationnelles de s, il doit en être de même des trois premières intégrales de $F(s)$, au moyen desquelles x, y, z s'expriment rationnellement ; il en résulte que pour toutes les valeurs de k on doit avoir

$$A_1^{(k)} = 0, \quad A_2^{(k)} = 0, \quad A_3^{(k)} = 0.$$

Ainsi, la fonction $F(s)$ doit, pour les valeurs de s qui la rendent infinie, être infinie du quatrième ordre au moins.

En remplaçant maintenant $m_k - 3$ par m_k, on obtient la fonction $F(s)$ sous la forme

$$F(s) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{m_k} \frac{A_\lambda^{(k)}}{(s - a_k)^{\lambda+3}};$$

inversement, toute fonction $F(s)$ de cette forme fournit une courbe minima qui satisfait aux conditions énoncées et qui est déterminée par les équations

$$x = \int (1 - s^2)\, F(s)\, ds,$$

$$y = i \int (1 + s^2)\, F(s)\, ds,$$

$$z = \int 2s\, F(s)\, ds.$$

Sous ces suppositions, on peut déterminer aisément l'ordre, le rang et la classe de la courbe minima.

L'ordre du numérateur de la fonction $F(s)$ est

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_q + 3q - 4,$$

et celui du dénominateur

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_q + 3q.$$

Les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe minima dépendent donc, en vertu de ce qui précède, de la quantité s par des équations entières du degré

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_q + 2q.$$

Tel est donc l'ordre m de la courbe minima.

Les coordonnées x, y, z sont infinies en même temps que $F(s)$, à savoir pour $s = a_k$; le plan à l'infini rencontre ainsi la courbe en q points, tous situés sur le cercle imaginaire à l'infini et dont celui qui correspond à la valeur $s = a_k$ doit compter pour $m_k + 2$ points d'intersection.

Les points pour lesquels $F(s)$ est nul sont, en général, des points singuliers d'une courbe minima quelconque, puisque l'on a pour ces points $\frac{dx}{ds} = 0$, $\frac{dy}{ds} = 0$, $\frac{dz}{ds} = 0$; ce sont des rebroussements, et leur nombre est

$$p = m_1 + m_2 + \ldots + m_q + 3q - 4.$$

Quant au rang r d'une telle courbe (nombre de tangentes qui rencontrent une droite donnée quelconque), à sa classe c (nombre des plans osculateurs qu'on peut lui mener sur un point donné quelconque), leur détermination s'effectue en cherchant le degré de certaines équations entières en s qu'il est aisé de former; on trouve ainsi

$$r = m_1 + m_2 + \ldots + m_q + q + 2,$$
$$c = m_1 + m_2 + \ldots + m_q + 2.$$

Ces divers nombres p, r, c sont liés par les relations

$$p + c + 2 = m + r - 2,$$
$$m + c - 2r + 2 = 0.$$

V. *Détermination de l'ordre d'une surface minima algébrique sous la supposition* $M = 1$. — Cette détermination s'effectue facilement dans ce cas, en s'appuyant sur ce que les courbes minima sont unicursales; si l'on désigne par m leur degré, on voit de suite que l'ordre de la surface est en général m^2, diminué du nombre de points à l'infini communs à deux courbes minima de faisceaux différents. Cet ordre est donc au plus égal à m^2 et, en excluant les singularités particulières, au plus égal à $m^2 - m$. Dans le cas des surfaces doubles, le nombre des points à l'infini communs aux deux courbes est évidemment égal à m, et, puisqu'à chaque point de la surface correspondent deux couples de valeurs pour s, s_1, l'ordre est $\dfrac{m^2 - m}{2}$.

En vertu de ce qui précède, on voit que, si l'on se donne la classe ou l'ordre d'une surface minima sous la supposition $M = 1$, la détermination de la fonction $F(s)$ dépend de la résolution en nombres entiers d'un certain nombre d'équations; les valeurs de q, m_1, $m_2, \ldots, m_q$ étant ainsi trouvées, on obtient une fonction $F(s)$ correspondante, dans laquelle les quantités $A^{(k)}$, a_k restent arbitraires, et l'on en déduit les équations d'une surface minima qui, en général, n'est pas une surface double.

VI. *Surfaces doubles.* — Pour que la surface minima soit double, il doit exister certaines relations entre les $A^{(k)}$ et les a_k.

Pour une telle surface, les points qui correspondent aux deux valeurs s et $-\dfrac{1}{s_1}$ de la première variable (où s_1 désigne la quantité conjuguée de s) doivent coïncider; cette circonstance doit avoir lieu encore lorsque la valeur s correspond à un point à l'infini; il suit de là que, si a_k est un infini de $F(s)$, il doit en être de même de la valeur

$$\mathfrak{a}_k = -\frac{1}{\bar{a}_k},$$

où $\bar{a}_k$ désigne la quantité conjuguée de a_k; par suite, le nombre q doit être pair et peut être représenté par $2g$, et les infinis de $F'(s)$ peuvent être séparés en deux groupes correspondants

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_g,$$
$$\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{a}_g,$$

en sorte qu'on puisse écrire $F(s)$ sous la forme

$$F(s) = \sum_{k=1}^{g} \sum_{\lambda=1}^{m_k} \left[\frac{A_k^{(\lambda)}}{(s - a_k)^{\lambda+1}} + \frac{\mathfrak{A}_k^{(\lambda)}}{(s - \mathfrak{a}_k)^{\lambda+1}} \right]. \tag{7}$$

La détermination des quantités $\mathfrak{A}^{(k)}$ et $\mathfrak{a}_k$ résulte de la condition établie plus haut pour la surface double, à savoir que l'on ait

$$\frac{1}{s^4} F_1\left(-\frac{1}{s}\right) = -F(s).$$

En désignant par $\bar{a}_k$, $\bar{\mathfrak{a}}_k$, $\bar{A}^{(k)}$, $\bar{\mathfrak{A}}^{(k)}$ les valeurs conjuguées de a_k, $\mathfrak{a}_k$, $A^{(k)}$, $\mathfrak{A}^{(k)}$, on trouve

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{a}_k = -\frac{1}{\bar{a}_k},\\ &\frac{1}{s^4}\sum_{k=1}^{g}\sum_{\lambda=1}^{m_k}\left[\frac{\bar{A}_\lambda^{(k)}}{\left(-\frac{1}{s}-\bar{a}_k\right)^{\lambda+3}} + \frac{\bar{\mathfrak{A}}_\lambda^{(k)}}{\left(-\frac{1}{s}-\bar{\mathfrak{a}}_k\right)^{\lambda+3}}\right]\\ &\quad = -\sum_{k=1}^{g}\sum_{\lambda=1}^{m_k}\left[\frac{A_\lambda^{(k)}}{(s-a_k)^{\lambda+3}} + \frac{\mathfrak{A}_\lambda^{(k)}}{(s-\mathfrak{a}_k)^{\lambda+3}}\right].\end{aligned}\right.$$

Ces équations contiennent les relations cherchées entre a_k, $\mathfrak{a}_k$, $A^{(k)}$, $\mathfrak{A}^{(k)}$.

En particulier, si $m_k = 1$, on doit avoir

$$\frac{\bar{A}^{(k)}(\bar{a}_k)^{-4}}{\left(s+\frac{1}{\bar{a}_k}\right)^4} + \frac{\bar{\mathfrak{A}}^{(k)}(\bar{\mathfrak{a}}_k)^{-4}}{\left(s+\frac{1}{\bar{\mathfrak{a}}_k}\right)^4} = -\frac{A^{(k)}}{(s-a_k)^4} - \frac{\mathfrak{A}^{(k)}}{(s-\mathfrak{a}_k)^4},$$

d'où

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\bar{A}^{(k)}(\bar{a}_k)^{-4} = -\mathfrak{A}^{(k)}, \quad \bar{\mathfrak{A}}^{(k)}(\bar{\mathfrak{a}}_k)^{-4} = -A^{(k)},\\ &F(s) = \sum_{k=1}^{g}\left[\frac{A^{(k)}}{(s-a_k)^4} + \frac{\bar{A}^{(k)}(\bar{a}_k)^{-4}}{\left(s+\frac{1}{\bar{a}_k}\right)^4}\right].\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose maintenant

$$A^{(k)} = R_k e^{i\vartheta_k}, \qquad a_k = r_k e^{i\vartheta_k},$$
$$\mathfrak{A}^{(k)} = \mathfrak{R}_k e^{i\Theta_k}, \qquad \mathfrak{a}_k = r_k e^{id_k},$$

il résulte de la relation

$$\mathfrak{a}_k = -\frac{1}{\bar{a}_k}$$

que l'on a

$$(10^a) \qquad r_k = -\frac{1}{v_k}, \quad d_k = -\partial_k + 2n\pi;$$

puis des autres relations on tire

$$R_k v_k^{-\frac{1}{4}} e^{i(-D_k+4\partial_k)} = -\mathfrak{R}_k e^{i\mathfrak{D}_k},$$

$$\mathfrak{R}_k r_k^{-\frac{1}{4}} e^{i(-\mathfrak{D}_k+4d_k)} = -R_k e^{iD_k},$$

d'où

$$(10^b) \qquad \begin{cases} \mathfrak{D}_k = -D_k + 4\partial_k + 2n\pi, \\ \mathfrak{R}_k = -R_k r_k^{-\frac{1}{4}}. \end{cases}$$

En résumé, on a pour ces surfaces le Tableau suivant :

	Courbe minima.	Surface.
Ordre.	$m = 2(m_1 + m_2 + \ldots + m_g) + 4g$	$O = \frac{m(m-1)}{2}$.
Rang.	$r = 2(m_1 + m_2 + \ldots + m_g) + 2g + 2$	
Classe.	$c = 2(m_1 + m_2 + \ldots + m_g) + 2$	$C = r - 1 = \frac{m+c}{2}$.
Nombre des rebroussements.	$p = 2(m_1 + m_2 + \ldots + m_g) + 6g + 4$	

$$F(s) = \sum_{k=1}^{g} \sum_{\lambda=1}^{m_k} \left[\frac{A_\lambda^{(k)}}{(s - a_k)^{\lambda+3}} + \frac{\mathfrak{A}_\lambda^{(k)}}{(s - \mathfrak{a}_k)^{\lambda+3}} \right].$$

Aux valeurs de $m = 6, 8, 10, \ldots$ correspondent respectivement les valeurs de

$$\begin{aligned} r &= 6, \ 8, \ 12, \ \ldots, \\ c &= 4, \ 6, \ 8, \ \ldots, \\ p &= 4, \ 6, \ 8, \ \ldots, \\ C &= 5, \ 7, \ 9, \ \ldots, \\ O &= 15, \ 28, \ 45, \ \ldots. \end{aligned}$$

SURFACE MINIMA DE CINQUIÈME CLASSE.

VII. *Développement de la fonction* F(*s*) *pour cette surface ; démonstration de ce que toutes les surfaces minima de cinquième* *classe sont semblables.* — Le cas le plus simple est celui où la surface est de la classe 5 et de l'ordre 15 ; on a alors $g = 1$, $m_1 = 1$.

$$\mathrm{F}(s) = \frac{\mathrm{A}}{(s-a)^4} + \frac{\mathcal{A}_0}{(s-\mathfrak{a})^4},$$

et les résultats précédents montrent qu'il faut prendre

$$\mathrm{F}(s) = \mathrm{R}\left[\frac{e^{\mathrm{D}i}}{(s - re^{di})^4} - \frac{e^{-\mathrm{D}i - 4di}}{(sr + e^{-di})^4}\right].$$

Les deux valeurs de s pour lesquelles $\mathrm{F}(s)$ est infini correspondent à deux points diamétralement opposés sur la sphère, qui fournit la représentation conforme de la surface minima ; l'un de ces deux points est arbitraire ; nous ferons $r = 0$; $\mathrm{F}(s)$ prend alors la forme

$$\mathrm{F}(s) = \mathrm{R}\left(\frac{e^{\mathrm{D}i}}{s^4} - e^{-\mathrm{D}i}\right),$$

et une rotation autour de l'axe des z permet de faire

$$\mathrm{F}(s) = \frac{1}{s^4} - 1,$$

en supposant en outre qu'on a pris R pour unité de longueur. On voit ainsi que toutes les surfaces minima de cinquième classe sont semblables.

VIII. *Courbes minima.* — Les équations d'une courbe minima sont, en remplaçant partout $\mathrm{F}(s)$ par $-3\mathrm{F}(s)$,

$$x = \frac{(1-s^2)^3}{s^3}, \quad y = \frac{i(1+s^2)^3}{s^3}, \quad z = \frac{3(1+s^4)}{s^2}.$$

La classe de cette courbe est 4, son ordre 6, son rang 6 ; elle possède quatre rebroussements qui correspondent aux quatre valeurs de s qui annulent $\mathrm{F}(s)$, savoir

$$s = +1, \quad -1, \quad +i, \quad -i ;$$

par la translation qui engendre la surface minima, ces quatre rebroussements engendrent quatre courbes de rebroussement (*Rückkehrcurve*) du sixième ordre. En engendrant la surface minima par la translation de la courbe minima dont les équations sont

$$x = \frac{(1 - s_1^2)^3}{s_1^3}, \quad y = -\frac{i(1 + s_1^2)^3}{s_1^3}, \quad z = \frac{3(1 + s_1^4)}{s_1^2},$$

les quatre rebroussements correspondants engendrent les mêmes courbes de rebroussement, en sorte que la surface minima possède quatre courbes de rebroussement du sixième ordre.

La courbe minima est située sur les cylindres suivants, dont les génératrices sont parallèles aux axes,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = -4,$$

$$y = 3x^{\frac{2}{3}} + 6,$$

$$z = 3y^{\frac{2}{3}} - 6,$$

et qui rencontrent les plans coordonnés suivant une astroïde imaginaire et deux paraboles de Neil.

IX. *Équations de la surface minima.* — La surface minima elle-même est déterminée par les équations suivantes :

$$x = \left(\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s_1^3}\right) - 3\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1}\right) + 3(s + s_1) - (s^3 + s_1^3),$$

$$y = i\left[\left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s_1^3}\right) + 3\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_1}\right) + 3(s - s_1) + (s^3 - s_1^3)\right],$$

$$z = 3\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s_1^2}\right) + 3(s^2 + s_1^2),$$

ou, en coordonnées polaires, en faisant

$$s = re^{qi}, \quad s_1 = re^{-qi},$$

$$x = 2\left(\frac{1}{r^3} - r^3\right)\cos 3q - 6\left(\frac{1}{r} - r\right)\cos q,$$

$$y = 2\left(\frac{1}{r^3} - r^3\right)\sin 3q + 6\left(\frac{1}{r} - r\right)\sin q,$$

$$z = 2\left(\frac{1}{r^2} + r^2\right)\cos 2q.$$

Ces équations montrent bien qu'aux couples de valeurs s, s_1

d'une part, $-\frac{1}{s_1}$, $-\frac{1}{s}$ de l'autre, correspondent le même point, que la surface est double et qu'on peut en détacher une portion finie telle qu'on puisse passer d'une face à l'autre sans traverser le contour.

Cette surface est du quinzième ordre; puisque l'on a $g=1$, $m_1=1$, on voit que le plan à l'infini rencontre la courbe minima génératrice en deux points situés sur le cercle imaginaire à l'infini et qui correspondent aux valeurs $s=0$, $s=\infty$; en chacun de ces points sont confondus $m_1+2=3$ points d'intersection de la courbe et du plan à l'infini, en sorte que ce plan est osculateur en deux points à la courbe; les formules montrent que ces points sont situés sur la droite de l'infini du plan des xy, qui doit être regardée comme une droite triple de la surface.

Ainsi qu'on l'a dit, on ne peut pas, des formules précédentes, déduire inversement des formules qui expriment uniformément les deux variables s, s_1 au moyen de x, y, z (supposés liés par l'équation de la surface); au contraire, à chaque point de cette surface correspondent pour s, s_1 deux couples de valeurs.

Cette circonstance ne se présente plus quand on change convenablement les variables; mais la propriété de la représentation précédente de la surface sur le plan, à savoir la conservation de la similitude pour les parties infiniment petites, n'a plus lieu.

Le choix des nouvelles variables est tout indiqué; on posera

$$\sigma = s - \frac{1}{s_1}, \quad \sigma_1 = s_1 - \frac{1}{s},$$

d'où

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{s}{s_1},$$

$$s = \frac{\sigma}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{\sigma\sigma_1}}\right), \quad s_1 = \frac{\sigma_1}{2}\left(1-\sqrt{1+\frac{4}{\sigma\sigma_1}}\right).$$

On obtient alors

$$x = (\sigma^3+\sigma_1^3) + 3(\sigma^2+\sigma_1^2)\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma_1}\right),$$

$$y = i\left[(\sigma^3-\sigma_1^3) + 3(\sigma^2-\sigma_1^2)\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma_1}\right)\right],$$

$$z = 3(\sigma^2+\sigma_1^2) + \frac{6}{\sigma\sigma_1}(\sigma^2+\sigma_1^2),$$

et, en faisant

$$\sigma = \rho e^{\varphi i}, \quad \sigma_1 = \rho e^{-\varphi i},$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} x &= 2\rho\cos\varphi[4(\rho^2+3)\cos^2\varphi - 3(\rho^2+4)], \\ y &= 2\rho\sin\varphi[4(\rho^2+3)\sin^2\varphi - 3(\rho^2+4)], \\ z &= 6(\rho^2+2)\cos 2\varphi. \end{aligned}$$

X. *Intersection de la surface par les plans de coordonnées et par le plan de l'infini.* — Partant de ces équations, on voit de suite les plans des xz et des yz sont des plans de symétrie de la surface et que l'intersection de cette dernière par le plan $z = 0$ se compose des deux droites $x \pm y = 0$, qui doivent être regardées comme des droites triples d'intersection de la courbe imaginaire du sixième ordre

$$\left(\frac{x^2+y^2}{96} + \frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{x^2-y^2}{32}\right)^2 = 0,$$

et enfin de la droite à l'infini, qui doit être comptée pour 3; de même, en cherchant l'intersection par le plan $x = 0$, on voit que l'axe des z doit être regardé comme une droite double de la surface; la portion qui s'étend depuis le point $z = -12$ jusqu'au point $z = 12$ est l'intersection de deux nappes réelles; les deux autres portions indéfinies de l'axe des z doivent être regardées comme isolées; cette intersection comprend en outre une parabole de Neil,

$$\left(\frac{z}{6}+2\right)^3 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 0,$$

dont le rebroussement est situé sur l'axe des z au point $z = -12$, et une courbe double de la surface unicursale et du cinquième ordre

$$y = \frac{3(\tau^4-9)}{\tau}, \quad z = \frac{3(\tau^4-2\tau^2-3)}{\tau^2}, \quad (\tau^2 = \rho^2+3).$$

On a, pour cette courbe,

$$\frac{dy}{dz} = -\tau;$$

de ses six points doubles, deux sont réels ($z = 12$, $y = 0$) et

$(z = 0, y = 0)$; les quatre autres, qui correspondent aux valeurs

$$\tau^2 = \pm i\sqrt{3},$$

sont des points de rebroussement. Cette courbe double est isolée à partir du point $z = -12$.

Enfin le plan de l'infini rencontre la surface suivant la droite, triple dans la surface, située à l'infini dans le plan des xy, laquelle, dans l'intersection, doit compter pour neuf droites, et suivant deux autres droites aussi triples dans la surface et situées dans les plans $x + yi = 0$, $x - yi = 0$. Ces résultats sont conformes avec la théorie, qui veut que les lignes analytiques d'une surface minima qui sont situées dans le plan à l'infini soient des droites.

XI. *Sur les faisceaux de cylindres circonscrits du sixième ordre.* — Aux grands cercles de la sphère qui donne la représentation conforme de la surface minima correspondent des courbes du sixième ordre tracées sur la surface.

L'équation d'un de ces grands cercles est

$$ss_1 - as - a_1 s_1 = 1,$$

où a et a_1 désignent des quantités conjuguées; on en déduit

$$s_1 = \frac{1 + as}{s - a_1}.$$

Ces valeurs, substituées dans les équations de la surface, donnent pour x, y, z des expressions du douzième degré en s; mais aux valeurs

$$s \quad \text{et} \quad -\frac{s - a_1}{1 + as}$$

correspondent deux points confondus de la courbe qui, ainsi, est du sixième degré. A la double infinité des grands cercles de la sphère correspond une double infinité de courbes du sixième ordre sur la surface; les normales à la surface le long d'une de ces courbes sont parallèles à un même plan, en sorte que le cylindre dont cette courbe est la directrice et dont les génératrices sont perpendiculaires à ce plan est circonscrit à la surface.

A ces courbes du sixième ordre appartiennent, comme cas limite, les lignes du troisième ordre qui correspondent aux méridiens de la sphère. Ces courbes sont les paraboles cubiques trouvées par M. Henneberg.

A la fin du travail de M. Schilling, on trouvera une vue stéréoscopique de la surface ou plutôt du quart de cette surface, dont on reproduira aisément les autres parties à cause de la symétrie par rapport aux deux plans des xz et des yz.

LECORNU. — Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles (¹).

M. Lecornu, après avoir rappelé les propositions de la Géométrie des surfaces dont il aura l'occasion de se servir dans la suite de son travail, cherche les équations d'équilibre d'une surface flexible et inextensible soumise à des forces extérieures quelconques, comparables toutefois aux éléments superficiels auxquels elles sont appliquées, en sorte qu'on peut toujours supposer ces forces rapportées à l'unité de surface.

Si dans une telle surface, supposée en équilibre, on découpe un contour fermé quelconque, la portion de surface détachée restera en équilibre si l'on applique sur le contour des forces *de tension* convenablement choisies, situées dans le plan tangent; on supposera ces forces de tension rapportées à l'unité de longueur. La force de tension qui s'exerce sur un élément de contour a une composante normale (force d'arrachement) et une composante tangentielle (force de cisaillement). On aperçoit de suite que les forces de cisaillement développées en un point donné sur deux éléments linéaires qui se coupent à angle droit sont égales; on reconnaît aussi aisément que, si en un point quelconque de la surface on considère dans le plan tangent deux directions rectangulaires, et que l'on désigne par n_1, n_2 les forces d'arrachement relatives à ces deux directions et par t la force commune de cisaillement, la conique qui, étant rapportée à ces deux directions comme axes coor-

(¹) Thèse soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris le 10 novembre 1880.

donnés, a pour équation

$$n_1 x^2 + 2 t x y + n_2 y^2 = 1,$$

jouit de cette propriété que, si l'on considère la force de tension relative à la direction d'un quelconque de ses diamètres, cette force de tension est dirigée suivant le diamètre conjugué; M. Lecornu donne à cette conique le nom d'*indicatrice des tensions*.

Supposant ensuite la surface rapportée à des coordonnées orthogonales quelconques λ, μ, et désignant par $L\,d\lambda$, $M\,d\mu$ les différentielles des arcs des courbes coordonnées qui passent par le point (λ, μ), l'auteur écrit que le petit élément de surface $LM\,d\lambda\,d\mu$, que l'on peut assimiler à un petit rectangle, est en équilibre sous l'influence des forces de tension relatives à son contour et des forces extérieures dont les composantes suivant les arêtes du trièdre trirectangle formé par les tangentes aux courbes coordonnées et la normale à la surface sont F_1, F_2, Φ, et à son contour. En désignant par n_1, n_2 les forces d'arrachement relatives aux directions des tangentes, par t la force commune de cisaillement, par R_1, R_2 les rayons de courbure des sections normales de la surface suivant les deux tangentes, par T le rayon de courbure géodésique, enfin par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure géodésique des deux courbes coordonnées, en sorte que, x, y, z étant les coordonnées rectangulaires du point (λ, μ) et X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale en ce point, on ait

$$\frac{L^2 M}{\rho_1} = \sum \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{LM^2}{\rho_2} = \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2},$$

$$\frac{L^2}{R_1} = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{M^2}{R_2} = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2}, \quad \frac{LM}{T} = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu},$$

M. Lecornu, par une application habilement faite du principe des vitesses virtuelles, parvient aux équations suivantes :

$$\frac{1}{L}\frac{\partial n_2}{\partial \lambda} - \frac{1}{M}\frac{\partial t}{\partial \mu} + \frac{n_1 - n_2}{\rho_2} + \frac{2t}{\rho_1} = F_1,$$

$$\frac{1}{M}\frac{\partial n_1}{\partial \mu} - \frac{1}{4}\frac{\partial t}{\partial \lambda} + \frac{n_2 - n_1}{\rho_1} + \frac{2t}{\rho_2} = F_2,$$

$$\frac{n_1}{R_2} + \frac{n_2}{R_1} - \frac{2t}{T} = \Phi.$$

Une première remarque consiste en ce que le nombre des inconnues n_1, n_2, t est égal au nombre des équations, en sorte que F_1, F_2, Φ ne sont assujettis à aucune condition, ce qui montre combien le problème traité par l'auteur diffère du problème de l'équilibre d'un fil flexible et inextensible.

De plus, ces équations ne diffèrent que par les seconds membres et par le nom des inconnues n_1, n_2, t des équations qu'on rencontre dans la théorie de la déformation infiniment petite des surfaces flexibles et inextensibles. Dans ces dernières équations, les variations l, m, θ des quantités $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{T}$ remplacent n_1, n_2, t.

Les équations étant linéaires, on voit que l'intégration des équations d'équilibre, en supposant traité le problème de la déformation, revient à trouver seulement une solution particulière. Dans le cas où la surface n'est pas développable, on voit aisément qu'on peut, par un changement de variable simple, changer les équations d'équilibre en d'autres semblables où le terme Φ n'existe plus ; on a alors affaire à deux équations linéaires en n_1, n_2, dont l'auteur fait une étude particulière. Dans cette étude, les lignes asymptotiques jouent, comme dans la théorie de la déformation, un rôle capital : leurs tangentes en un point de la surface sont conjuguées par rapport à l'indicatrice des tensions ; ce sont des fonctions arbitraires des paramètres de ces lignes qui figurent dans les expressions les plus générales de n_1, n_2, t qui satisfassent aux équations d'équilibre.

Enfin M. Lecornu donne de ces principes une suite d'applications, dont la plus importante concerne les surfaces réglées ; il rencontre, chemin faisant, plusieurs propositions géométriques intéressantes.