Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 33-43

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_33_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CAYLEY (A.). — TRATTATO ELEMENTARE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE, traduzione riveduta e accresciuta d'alcune Appendici da F. BRIOSCHI. Napoli, U. Hoepli; 1880.

Nous avons déjà signalé l'apparition du Traité élémentaire des fonctions elliptiques que M. Cayley a publié en 1876 ([1]). Cet excellent Ouvrage est devenu rapidement classique en Angleterre et en Amérique; c'est la meilleure préparation que l'on puisse désirer à la lecture des beaux travaux sur la multiplication et la transformation que Jacobi a publiés dans les premiers Volumes du *Journal de Crelle*. A la vérité, l'auteur a laissé de côté toutes ces considérations sur la théorie générale des fonctions qui tiennent tant de place dans la plupart des Traités modernes sur les fonctions elliptiques; mais il faut convenir, comme le fait remarquer M. Brioschi dans la Préface, que trop souvent, dans les publications consacrées aux fonctions elliptiques, c'est surtout le développement de la nouvelle doctrine et des propriétés générales des fonctions qui constitue l'objet principal. On peut ajouter, il nous semble, que les propriétés des fonctions elliptiques sont ainsi obtenues d'une manière si rapide et si complète, qu'on n'a peut-être pas le temps d'insister sur chacune d'elles et d'en marquer l'importance. Enfin et surtout, les méthodes modernes sont si différentes de celles des premiers créateurs de la théorie, en exceptant toutefois Abel, que l'on peut craindre que l'étude de leurs travaux impérissables soit un peu négligée.

Toutes ces raisons ont engagé M. Brioschi à entreprendre, avec l'autorisation de M. Cayley, une traduction italienne de la théorie élémentaire des fonctions elliptiques. Cette traduction, exécutée en grande partie par un des élèves les plus distingués de M. Brioschi, l'ingénieur Jorini, aidé dans la revision par M. Cazzaniga, de l'École Normale de Pavie, est enrichie de trois Appendices dus à la plume de M. Brioschi.

([1]) *Elementary Treatise on elliptic functions*, by Arthur Cayley. Cambridge, Deighton and Co; London, Bell and Sons, 1876. Voir *Bulletin*, I_1, 93.

Dans le premier, qui traite des formules relatives à la multiplication des fonctions elliptiques, M. Brioschi reprend et développe les recherches publiées sur ce sujet par Jacobi dans le Tome IV du *Journal de Crelle*, et il démontre en outre plusieurs résultats qu'il a communiqués en 1864, dans une Note, à l'Institut Lombard.

Le deuxième, qui traite de la transformation, doit être considéré comme une préparation au troisième, qui est véritablement important et qui contient un exposé systématique des belles recherches que M. Brioschi a publiées à diverses reprises sur la théorie de l'équation du cinquième degré. En substance, toute cette exposition coïncide avec celle qui a été exposée récemment par M. Brioschi dans le beau Mémoire *Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* (*Mathematische Annalen*, t. XIII), où l'auteur reprend et coordonne ses recherches antérieures sur ce sujet. Cet Appendice constituera donc une excellente lecture pour les géomètres qui veulent se mettre au courant de cette théorie de l'équation du cinquième degré et approfondir les rapports qu'elle présente avec la théorie des fonctions elliptiques.

Il ne nous reste plus, en terminant, qu'à exprimer un désir : c'est que l'on publie également une traduction française du Traité de M. Cayley et qu'on n'y oublie pas les additions dont s'est enrichie la traduction italienne.

G. D.

SCHELL (W.). — THEORIE DER BEWEGUNG UND DER KRÄFTE, ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik. T. I, 2e édition, 1 vol. in-8°, 580 pages; 1879.

La première édition du Livre de M. Schell date de 1870; elle formait un gros volume de neuf cent soixante-dix pages d'une impression compacte et dont une partie notable était en petit texte. Le succès qu'elle a eu est amplement justifié par la richesse des renseignements qu'on trouve dans ce Livre et par les qualités de l'exposition. La seconde édition paraît devoir être encore plus complète; elle sera divisée en deux Volumes, dont le premier seul est paru : c'est de lui que nous rendons compte.

Ce Volume est divisé en deux Parties : la première comprend la

Géométrie des systèmes de segments de droites (*Streckensysteme*) et la Géométrie des masses; la seconde contient la Géométrie du mouvement et la théorie des états de mouvement.

A coup sûr, il y a bénéfice pour l'enseignement à détacher, comme le fait M. Schell, de la Statique et de la Cinématique cette partie commune, qui concerne la composition des forces et des couples ou des rotations et des translations. Il y a là une théorie des systèmes de *segments de droites* que l'on peut faire indépendamment de toute idée de force ou de mouvement; il est clair que les notions de somme géométrique, de résultante, de moment d'un segment de droite par rapport à un point ou à un axe, de couple de segments, de systèmes équivalents et par suite de la réduction d'un système de segments de droites peuvent être présentées d'une façon purement géométrique : la réduction d'un système de segments à deux segments donne la notion de droites conjuguées; la réduction à un couple et un segment donne la notion de la correspondance de chaque point de l'espace à un plan passant par lui et dont ce point est le *pôle*, ou encore la notion du complexe linéaire qui correspond à tout système de segments de droites, complexe qu'on peut aussi regarder comme l'ensemble des lignes qui coïncident avec leurs conjuguées. M. Schell consacre une soixantaine de pages à ces divers sujets.

Il n'y a pas non plus d'inconvénient à débarrasser la Statique et la Dynamique de la théorie du centre de gravité et des moments d'inertie : telles sont les matières traitées sous le titre de *Géométrie des masses* (p. 72-143). Naturellement la masse d'un point est simplement regardée comme un coefficient numérique attaché à ce point; ce coefficient peut d'ailleurs être positif, nul ou négatif. Si l'on considère deux points O et M_i, dont le second est affecté de la masse m_i, le segment dont la grandeur est $m_i\,OM_i$ et dont la ligne d'action est la droite Om_i est dit le moment polaire du premier degré de la masse m_i par rapport au point O; la résultante $\Sigma\, m_i\, OM_i$ des segments analogues relatifs à un système de points (M_i) est le moment polaire du premier degré de ce système de points par rapport au point O; le centre de masse de ce système de points est défini par cette propriété que, si on l'affecte de la masse Σm_i, son moment polaire du premier degré par rapport à un point quelconque O sera égal au moment polaire du premier degré du système par rapport à ce même point; le produit $m_i r_i^2$ de la masse d'un point par le carré de sa distance à un point O est le moment polaire quadratique de m_i par rapport au point O; la somme $\Sigma m_i r^2$ est le moment polaire quadratique d'un système de points (M_i) par rapport au pôle O. Il existe, entre les moments polaires quadratiques d'un système de points par rapport à un point O et à son centre de masse, le moment polaire quadratique du centre de masse affecté de la masse totale par rapport au point O, la somme des produits des masses de deux points du système par le carré de leur distance, des relations bien connues. La notion des moments polaires quadratiques conduit à celle des moments d'inertie, à la théorie desquels M. Schell consacre deux Chapitres.

La seconde Partie débute par l'étude (p. 144-187) des propriétés concernant deux figures identiques situées dans deux positions différentes ou, suivant le langage de l'auteur, deux systèmes congruents et les déplacements qui permettent de passer de l'un à l'autre. L'existence d'un point double (de deux points homologues coïncidents) entraine celle d'un plan double passant par ce point, et, réciproquement, tous les points de la droite passant par le point et perpendiculaires au plan sont doubles, et l'on peut passer d'un système à l'autre par une rotation autour de cette droite. Dans le cas général, deux systèmes congruents ont une droite double, mais dont les points situés à distance finie sont simples; un mouvement de torsion autour de cette droite permet de passer d'un système à l'autre. Deux déplacements sont équivalents quand les positions initiales du système déplacé coïncident ainsi que les positions finales. Dans le cas où les déplacements considérés se réduisent à des rotations et à des translations, leur réduction s'opère par des règles simples qui se simplifient encore quand on suppose les déplacements infiniment petits.

C'est arrivé à ce point que l'auteur fait intervenir la notion de temps et définit la vitesse. Après avoir donné les formules usuelles, la méthode de Roberval pour le tracé des tangentes, les règles de la composition des vitesses, des rotations, translations, etc., il traite du mouvement hélicoïdal et développe, dans le sens de la Cinématique, les propriétés des droites conjuguées, du complexe linéaire formé par l'ensemble des normales aux trajectoires de tous les points du système, du pôle et de la caractéristique de chaque plan, etc., propriétés dont il a été question, à un autre point de vue, dans la première Partie (p. 187-218).

L'auteur étudie ensuite (p. 218-312), au point de vue de la vitesse, des propriétés des normales aux trajectoires, de la représentation du mouvement par le roulement d'une surface cylindrique, conique, réglée sur une autre surface cylindrique, conique, réglée, le mouvement continu d'un système de forme invariable, soit qu'un plan de ce système glisse sur un plan fixe, soit qu'un de ses points soit fixe, soit enfin qu'aucune de ces particularités n'ait lieu.

Vient ensuite l'étude de l'accélération et du mouvement d'un point libre (p. 312-387). Il n'est pas question d'ailleurs des causes de ce mouvement, qui est regardé comme défini par trois équations entre les coordonnées, la vitesse et l'accélération. M. Schell examine les cas où ces équations sont telles que le principe des aires et celui des forces vives aient lieu; il dit même quelques mots du principe du dernier multiplicateur, dont, dans la première édition, il avait traité à cette place, et développe les problèmes classiques sur le mouvement d'un point pesant ou attiré vers un centre fixe : les *forces* sont simplement remplacées par les accélérations correspondantes; comme dans chaque problème il n'entre qu'une seule force, il n'y a à cela aucune difficulté.

M. Schell ne sort pas de la Cinématique, au sens où il entend ce mot, en traitant (p. 387-441) du mouvement d'un point sur une courbe ou une surface : cela n'est pas sans choquer nos habitudes. Il a eu soin, d'ailleurs, de prévenir qu'il prétendait écarter systématiquement toute spéculation sur les causes du mouvement, se couvrant en cela de la grande autorité de Jacobi. « Ces causes », dit-il dans son Introduction, « s'appellent *forces :* la cause de la vitesse d'un point est une force instantanée; la cause de l'accélération est une force continue, ou plus simplement une force; les causes des accélérations d'ordre supérieur sont de même des forces d'ordre supérieur; un système de forces instantanées est un état de vitesse; un système de forces continues est un état d'accélérations, etc. » Et il a rappelé auparavant ces paroles de Jacobi : « *Theoria Mechanices analytica causam agnoscere nullam potest, quidni, sicuti differentialia prima velocitatis nomine, secunda virium, insignimus, simile quid ad altiora quoque differentialia adhibeatur; de quibus theoremata proponi possint prorsus ana-*

loga iis, quæ de vi et de velocitate circumferuntur. » Sans doute toute difficulté ne disparaît pas quand on se place à ce point de vue; mais ce n'est pas à propos des matières contenues dans ce premier Volume qu'il y a lieu de traiter cette question.

Quoi qu'il en soit, pour en revenir au point assujetti à se mouvoir, par exemple, sur une ligne, on regardera cette ligne comme la cause d'une accélération qui se compose avec l'accélération que le point aurait s'il était libre; peu importe d'ailleurs comment se fait cette composition, puisque l'accélération qui remplace la condition imposée est entièrement inconnue, et rien n'empêche d'écrire les équations

$$\frac{dv}{dt} = \psi_t - \mathrm{R}_t, \quad \left(\frac{v^2}{\rho}\right) = \left(\psi_n\right) + \left(\mathrm{N}\right),$$

ψ_t et ψ_n étant les composantes tangentielle et normale de l'accélération donnée, R_t et N étant des quantités entièrement inconnues. Pour pouvoir tirer parti de ces équations, on leur « joint habituellement l'équation de condition $\mathrm{R}_t = f\mathrm{N}$ », f étant un coefficient constant qui est nul s'il n'y a pas de frottement; au fond, cela revient à écrire les équations du mouvement d'un point sur une courbe en supprimant toute explication à ce sujet. C'est ainsi que Jacobi, invoquant l'autorité de Gauss, comme M. Schell invoquait la sienne, écrivait, au début de ses *Leçons de Mécanique analytique,* l'équation

$$\sum\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - \mathrm{X}\right)\delta x + \ldots = 0$$

en la regardant comme l'expression d'un « principe qu'il est inutile de démontrer ». M. Schell développe la théorie du pendule circulaire et sphérique et donne diverses autres applications.

On rentre à coup sûr dans la Cinématique proprement dite en étudiant le mouvement d'un corps solide au point de vue des accélérations (p. 441-516). Les propositions relatives à la courbure des trajectoires trouvent là leur place naturelle; viennent ensuite le théorème de Coriolis et ses applications (p. 517-544). Enfin les deux derniers Chapitres (p. 544-571-580) sont consacrés aux accélérations d'ordre supérieur et aux systèmes variables; ce dernier Chapitre, où l'auteur traite des systèmes qui restent semblables, collinéaires à eux-mêmes, et particulièrement surtout en *affinité* avec eux-mêmes, manquait dans la première édition.

Les nombreux renseignements bibliographiques donnés par M. Schell ajoutent encore à la valeur et à l'utilité de son Livre.

J. T.

WESTPHAL (G.). — Ueber das simultane System zweier quaternaeren Formen 2-ten Grades und eine allgemeine algebraische Parameterdarstellung der Raumcurve 4-ter Ordnung, p. 1. — *Mathematische Ann.*, t. XIII, 1878.

I. Si l'on désigne, suivant la notation d'Aronhold et de Clebsch, par $a_x^2 = b_x^2 = \ldots$ et $\alpha_x^2 = \beta_x^2 = \ldots$ les équations des deux surfaces du second ordre qui ont pour intersection la courbe du quatrième ordre, les deux autres points où un plan mené par la tangente à un point y de la courbe coupe cette courbe seront représentés par la résultante des formes

$$a_x^2 = 0, \quad \alpha_x^2 = 0, \quad \varkappa a_x a_y + \lambda \alpha_x \alpha_y = 0, \quad w_x = 0,$$

sous la condition $a_y^2 = 0$, $\alpha_y^2 = 0$, tandis qu'on peut séparer de cette résultante le facteur w_y^2. Mais cette élimination entre deux formes quadratiques et deux formes linéaires peut être remplacée, comme le fait voir l'auteur, par une autre plus simple. Les covariants

$$\mathrm{H}_x^2 = \alpha_x \beta_x (\alpha abc)(\beta abc) - \frac{\Theta}{2}\alpha_x^2, \quad [\Theta = (abc\alpha)^2]$$

$$\mathrm{I}_x^2 = a_x b_x (a\alpha\beta\gamma)(b\alpha\beta\gamma) - \frac{\Theta_1}{2} a_x^2, \quad [\Theta_1 = (\alpha\beta\gamma a)^2],$$

jouissent de cette propriété remarquable que l'on a, pour toutes les valeurs de x et de y,

$$\alpha_x^2 \mathrm{H}_y^2 + \alpha_y^2 \mathrm{H}_x^2 - a_x^2 \mathrm{I}_y^2 - a_y^2 \mathrm{I}_x^2 = 2(\alpha_x \alpha_y \mathrm{H}_x \mathrm{H}_y - a_x a_y \mathrm{I}_x \mathrm{I}_y).$$

De cette identité, écrite sous la forme

$$\begin{aligned}&\alpha_x^2 \mathrm{H}_y^2 + \alpha_y^2 \mathrm{H}_x^2 - a_x^2 \mathrm{I}_y^2 - a_y^2 \mathrm{I}_x^2 \\ &\quad = \frac{2}{\varkappa}[\alpha_x \alpha_y (\varkappa \mathrm{H}_x \mathrm{H}_y + \lambda \mathrm{I}_x \mathrm{I}_y) - \mathrm{I}_x \mathrm{I}_y (\varkappa a_x a_y + \lambda \alpha_x \alpha_y)],\end{aligned}$$

résulte ce théorème :

Si l'on fait tourner, autour de la tangente en un point y de la courbe, un plan $\varkappa a_x a_y + \lambda \alpha_x \alpha_y = 0$, *alors par ses deux points de rencontre avec la courbe gauche, lesquels varient avec* $\varkappa : \lambda$, *passera toujours le plan* $\varkappa H_x H_y + \lambda I_x I_y = 0$.

On conclut encore de là que *le plan osculateur au point y a pour équation* $H_y^2 \alpha_x \alpha_y - I_y^2 a_x a_y = 0$; *les quatre plans du tétraèdre polaire commun aux deux surfaces sont* $(a\alpha HI) a_y \alpha_y H_y I_y = 0$.

On déduit ensuite de la résultante les équations cherchées qui donnent les coordonnées des deux points d'intersection. Comme la forme sous laquelle l'auteur présente le résultat final ne fait pas ressortir directement quels sont les couples du système simultané que l'on a à considérer dans cette recherche, nous nous permettrons de communiquer ici le résumé d'un calcul relatif à ce passage.

II. Si l'on se pose d'abord le problème de déterminer les deux points ξ et η où le plan tangent $a_x a_y = 0$ coupe la courbe gauche, il résulte de l'identité écrite plus haut ce théorème :

La résultante R *des formes* $a_x^2 = 0$, $\alpha_x^2 = 0$, $a_x a_y = 0$, $w_x = 0$ *est, après la séparation du facteur* w_y^2, *identique, à un facteur indépendant de* w, *avec la résultante* R' *des formes* $a_x^2 = 0$, $a_x a_y = 0$, $H_x H_y = 0$, $w_x = 0$.

On a

$$R = [b_y c_y (ba\alpha w)(ca\alpha w)]^2$$
$$- [c_y d_y (cabw)(dabw)][a_y b_y (a\alpha\beta w)(b\alpha\beta w)].$$

On en tire

$$c_y d_y (cabw)(dabw) = -\frac{1}{12} w_y^2 \Delta, \quad \Delta = (abcd)^2,$$

$$b_y c_y (ba\alpha w)(ca\alpha w) = w_y \left[\frac{1}{3} \alpha_y (abcw)(abc\alpha) - \frac{1}{6} w_y \Theta \right].$$

En posant

$$\alpha_y (abcw)(abc\alpha) = L = L_y w_l,$$
$$a_y b_y (a\alpha\beta w)(b\alpha\beta w) = P = P_y^2 w_p^2,$$

il vient

$$R = w_y^2\left[\left(\frac{1}{3}L - \frac{1}{6}w_y\Theta\right)^2 + \frac{1}{12}\Delta P\right].$$

On a ainsi l'équation

$$(1)\quad (ab\mathrm{H}w)(ac\mathrm{H}'w)b_y c_y \mathrm{H}_y\mathrm{H}'_y = m\left[\left(\frac{1}{3}L - \frac{1}{6}w_y\Theta\right)^2 + \frac{1}{12}\Delta P\right].$$

Le multiplicateur m indépendant de w se détermine de la manière la plus simple, en posant $w_x^2 = a_x^2$. On a

$$(ab\mathrm{H}d)(ac\mathrm{H}'d)b_y c_y \mathrm{H}_y\mathrm{H}'_y = -\frac{1}{12}\Delta[\mathrm{H}_y^2]^2,$$

$$a_y b_y(a\alpha\beta c)(b\sigma\beta c) = \frac{1}{3}\mathrm{H}_y^2,$$

$$\left(\frac{1}{3}L - \frac{1}{6}w_y\Theta\right)^2 = \frac{1}{36}\mathrm{H}_y^2\Delta, \quad (\text{pour } w_x^2 = a_x^2).$$

On trouve ainsi

$$m = -\frac{3}{2}\mathrm{H}_y^2,$$

et l'équation (1) devient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(ab\mathrm{H}w)(ac\mathrm{H}'w)b_y c_y \mathrm{H}_y\mathrm{H}'_y \\ &\quad = -\frac{3}{2}\mathrm{H}_y^2\left[\left(\frac{1}{3}L - \frac{1}{6}w_y\Theta\right)^2 + \frac{1}{12}\Delta P\right].\end{aligned}\right.$$

Pour parvenir maintenant à une représentation isolée des points ξ et η, désignons, pour abréger, la résultante qui forme le premier membre par $(a\rho\sigma w)^2$.

De l'équation

$$w_\xi w_\eta = (a\rho\sigma w)^2$$

on tire

$$w_\xi u_\eta + u_\xi w_\eta = 2(a\rho\sigma w)(a\rho\sigma u),$$

$$\begin{aligned} w_\xi u_\eta - u_\xi w_\eta &= \sqrt{[2(a\rho\sigma w)(a\rho\sigma u)]^2 - 4(a\rho\sigma w)^2(a\rho\sigma u)^2} \\ &= 2(\rho\sigma u w)\sqrt{-\frac{1}{2}(aa'\rho\sigma)^2},\end{aligned}$$

$$(3)\qquad w_\xi u_\eta = (a\rho\sigma w)(a\rho\sigma u) + (\rho\sigma u w)\sqrt{-\frac{1}{2}(aa'\rho\sigma)^2}.$$

Donc

$$(4)\begin{cases} w_\xi u_\eta = -\frac{3}{2} H_y^2 \left[\left(\frac{1}{3} L_y w_l - \frac{1}{6} w_y \Theta \right) \left(\frac{1}{3} L_y u_l - \frac{1}{6} u_y \Theta \right) + \frac{1}{12} \Delta P_y^2 w_p u_p \right] \\ \qquad + (a H u w) a_y H_y - H_y^2 \sqrt{\frac{1}{24} \Delta}. \end{cases}$$

Si l'on pose, dans cette expression, $u_x = \alpha_x \alpha_y$, il vient, à la place de L,

$$\alpha_y \beta_y (abc\alpha)(abc\beta) = \mathrm{H},$$

à la place de $P_y^2 w_p u_p$,

$$a_y b_y v_y (a\alpha\beta w)(b\alpha\beta v) = \frac{1}{3} w_y a_y b_y (a\alpha\beta v)(b\alpha\beta v) = \frac{1}{3} w_y \mathrm{I},$$

et, en laissant de côté le facteur H_y^2, on obtient l'équation d'un point d'intersection :

$$(5)\quad \mathrm{M} w_\xi = -\frac{3}{2} \left[\left(\frac{1}{3} \mathrm{L} - \frac{1}{6} w_y \Theta \right) \frac{1}{3} \mathrm{H} + \frac{1}{36} w_y \mathrm{I} \Delta \right] - (a\alpha \mathrm{H} w) a_y \mathrm{H}_y \sqrt{\frac{1}{24} \Delta}.$$

Pour résoudre le problème général, on remplacera dans cette équation a_x^2 par la forme $\varkappa a_x^2 + \lambda \alpha_x^2$, et l'on aura

$$\begin{aligned} \Delta(\varkappa, \lambda) &= \varkappa^4 \Delta + 4\varkappa^3 \lambda \Theta + 6\varkappa^2 \lambda^2 \Phi + 4\varkappa \lambda^3 \Theta' + \lambda^4 \Delta', \\ \mathrm{H}(\varkappa, \lambda) &= \varkappa \mathrm{H}_y^2 + \lambda \mathrm{I}_y^2, \\ \Theta(\varkappa, \lambda) &= \varkappa^3 \Theta + 3\varkappa^2 \lambda \Phi + 3\varkappa \lambda^2 \Theta' + \lambda^3 \Delta', \\ \mathrm{L}(\varkappa, \lambda) &= \varkappa^3 \mathrm{L} + 3\varkappa^2 \lambda \mathrm{M} + 3\varkappa \lambda^2 \mathrm{N} + \frac{1}{4} \lambda^3 \Delta' w_y, \\ \mathrm{M} &= \alpha_y (ab\beta w)(ab\beta\alpha), \quad \mathrm{N} = \alpha_y (a\gamma\beta w)(a\gamma\beta\alpha). \end{aligned}$$

Après la substitution de ces valeurs, on pourra encore faire sortir le facteur $\varkappa$ des premières parenthèses.

III. Après avoir ensuite effectué la transformation de l'intégrale elliptique relative à la courbe en sa forme normale, suivant la méthode indiquée par Aronhold pour les courbes planes du troisième ordre, l'auteur démontre ce théorème :

La somme des deux intégrales prises depuis un point arbitraire de la courbe jusqu'aux points de sécance x et y d'une corde *est constante lorsque cette corde décrit l'une des séries de génératrices d'une surface du faisceau.*

A chaque valeur de la constante comprise dans le parallélogramme des périodes correspond une surface; cette correspondance peut être réglée de telle manière que la valeur opposée de la constante détermine la seconde série de génératrices de la surface. Au moyen de cette représentation, on obtient la solution de ce problème :

Trouver les surfaces du faisceau sur lesquelles on puisse construire des polygones d'un nombre pair de côtés, dont les sommets soient situés sur la courbe gauche et dont les côtés appartiennent alternativement à chacune des deux séries de génératrices de cette surface.

Si du sommet de l'un des cônes qui font partie du faisceau on projette ces polygones sur un plan, ils se changent en des polygones plans, inscrits à une section conique et circonscrits à une autre. Les théorèmes de Poncelet résultent des propriétés des polygones gauches (¹). Ax. H.