Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, n° 1 (1880), p. 337-342

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_337_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Dr J. ODSTRČIL. — KURZE ANLEITUNG ZUM RECHNEN MIT DEN (HAMILTON'SCHEN) QUATERNIONEN. — Halle, 1879.

Ce petit Volume de 79 pages n'est, comme le titre l'indique, qu'une sorte d'introduction très résumée au Calcul des quaternions; mais il serait difficile de trouver un Traité plus substantiel, car l'auteur, avec beaucoup de talent et une profonde connaissance du sujet, y a fait entrer tout ce qui est essentiel pour s'assimiler les principes de la méthode d'Hamilton.

L'auteur, avant d'entrer dans l'exposé du calcul, a cru devoir débuter en quelques pages par certaines considérations générales sur les quantités et les nombres. Il insiste avec grande raison sur la notion de qualité, qui s'introduit dans le calcul algébrique à côté de la notion de grandeur et donne naissance d'abord aux quantités négatives, puis aux quantités imaginaires. Au point de vue purement philosophique, c'est un grand progrès dans la Science que cette généralisation des quantités et des nombres; on est conduit à substituer l'idée de rapport, c'est-à-dire de comparaison mesurable, à celle de grandeur absolue, et, dans cette comparaison, rien n'empêche d'imaginer que certaines qualités des objets que l'on considère pourront figurer à côté de la grandeur absolue de ces objets.

Les symboles qui représenteront le résultat de cette comparaison complexe devront garder la trace des diverses quantités comparées entre elles. C'est ainsi que le rapport de deux quantités imaginaires nous donne à la fois le rapport des longueurs de deux droites dans un plan et l'angle qu'elles forment l'une avec l'autre.

C'est en cherchant à généraliser cette notion des imaginaires et à créer un algorithme pour la Géométrie de l'espace que le célèbre William Rowan Hamilton a été conduit à imaginer son algèbre des quaternions, si intéressante, si féconde, et qui semble commencer à se répandre, malgré la défaveur relative dans laquelle ce calcul semble avoir été tenu assez longtemps.

L'Ouvrage de M. Odstrčil est divisé en sept Chapitres :

I. Composition et décomposition des vecteurs.

II. Construction d'un quaternion.

III. Addition et soustraction des quaternions.

IV. Multiplication des vecteurs.

V. Multiplication des quaternions.

VI. Produits de trois ou plusieurs vecteurs.

VII. Exemples et applications.

Le premier Chapitre, dont l'exposition est très claire et très bien ordonnée du reste, ne saurait présenter au lecteur la moindre difficulté.

C'est dans les Chapitres suivants, principalement dans les Chapitres IV et V, que se trouve, on peut le dire, contenue toute la méthode. Nous pourrions, à la rigueur, adresser à l'auteur une légère critique pour avoir introduit un Chapitre sur la construction d'un quaternion avant d'arriver à la multiplication et à la division des vecteurs.

Il nous semble que la marche logique doit être celle-ci : montrer tout d'abord avec quelle facilité se font l'addition et la soustraction des vecteurs ; arriver à la multiplication, en montrer les difficultés ; indiquer comment Hamilton les a surmontées, grâce à la conception du *rapport géométrique* de deux vecteurs (ou de la *biradiale*) ; enfin, en combinant les biradiales par des opérations géométriques et en cherchant à traduire symboliquement ces opérations diverses, se trouver conduit au symbole analytique de la biradiale, qui est le quaternion.

C'est du reste, à très peu près, ce que fait l'auteur, malgré la critique que nous venons d'élever, et qui est beaucoup moins de fond que de forme.

Ainsi que nous l'indiquions plus haut, le lecteur qui possède parfaitement les Chapitres II, III, IV et V (vingt-huit pages en tout dans l'Ouvrage dont il s'agit) peut se considérer comme maître de la méthode. Le reste ne saurait plus être qu'une affaire de perfectionnements, de pratique, d'applications, s'acquérant par la lecture d'Ouvrages plus complets, et surtout par la résolution de nombreux problèmes.

Le Chapitre VI renferme quelques formules, choisies parmi les plus importantes et les plus usitées dans les applications, et qui ont rapport à des produits de trois ou plusieurs vecteurs.

Enfin, les applications du Chapitre VII sont aussi nombreuses qu'il est possible en si peu d'espace. Très élémentaires pour la plupart, se rapportant seulement aux matières traitées dans les Chapitres de doctrine, elles ont trait surtout à la Géométrie et à la Trigonométrie. Deux ou trois exemples empruntés à la Statique montrent cependant avec quelle facilité le calcul d'Hamilton s'adapte à ces sortes de questions. L'auteur a eu soin de ne pas passer sous silence la représentation des rotations, auxquelles l'algorithme des quaternions s'applique d'une façon si heureuse et si simple.

Nous aurions été heureux de voir figurer dans ce petit Ouvrage quelques notions sur la différentiation et aussi sur les équations du premier degré, l'une des parties de la méthode qui font certainement le plus d'honneur au génie de l'inventeur des quaternions ; mais l'auteur a cru évidemment nécessaire de sacrifier beaucoup à la brièveté et à la simplicité. Tel qu'il est, son Livre doit rendre un véritable service et contribuer à répandre en Allemagne la culture de cette méthode. C'est tout au moins une première et très complète initiation, qui prépare à la lecture des Ouvrages originaux.

Nous ne dirons rien des notations : M. Odstrčil s'est exactement conformé à celles de l'inventeur et de ses disciples d'Angleterre.

Nous croyons, au contraire, que les modifications introduites par M. Hoüel dans sa remarquable *Théorie des quantités complexes*, où il traite des quaternions d'une manière très complète, sont un perfectionnement réel et sérieux, qu'il est désirable de voir maintenir dans les Ouvrages français; mais cela ne touche pas au fond même.

En terminant, nous aurions à exprimer le désir de voir paraître en France des Ouvrages conçus dans le même esprit que celui de M. Odstrčil et propres à répandre les principes du Calcul des quaternions dans le public mathématique et peut-être même dans l'enseignement supérieur. Mais ce désir est à moitié réalisé déjà ; nous croyons savoir en effet qu'une *Introduction à la méthode des quaternions*, de M. Laisant, est sur le point de sortir des presses de M. Gauthier-Villars [1], et que la même maison a entrepris également la publication d'une traduction française, par M. Plarr, du

---

[1] Depuis la rédaction de ce compte rendu, l'Ouvrage dont nous parlons a été publié; il se compose d'un volume in-8° de XXII-242 pages. Il en sera rendu compte ultérieurement dans le *Bulletin*

remarquable Ouvrage de M. Tait, *An elementary Treatise on Quaternions*. A. L.

LIE (SOPHUS). — BEITRÄGE ZUR THEORIE DER MINIMALFLÄCHEN ([1]).

Sous le titre général qu'on vient de lire, les Tomes XIV et XV des *Mathematische Annalen* contiennent deux Mémoires remarquables, destinés à jeter une grande lumière sur la théorie des surfaces minima.

Le premier de ces deux articles, intitulé *Projectivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen* (*Math. Ann.*, Bd. XIV), présente le plus grand intérêt, et est d'une portée considérable.

L'auteur y est parvenu à donner des méthodes projectives pour la génération des surfaces minima et, en s'appuyant sur ces méthodes, à fonder une nouvelle théorie de ces surfaces. Le point principal de ces recherches consiste dans la démonstration de ce théorème que *les surfaces minima se déduisent du groupe de surfaces*

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A_1(\tau), \\ y &= B(t) + B_1(\tau), \\ z &= C(t) + C_1(\tau) \end{aligned}$$

toutes les fois que les deux courbes

$$\begin{aligned} x &= A\ (t), \quad y = B\ (t), \quad z = C\ (t), \\ x &= A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau), \end{aligned}$$

dont le mouvement de translation engendre la surface, sont des courbes minima, c'est-à-dire toutes les fois que les fonctions arbitraires qui entrent dans ces équations satisfont aux équations différentielles

$$\begin{aligned} dA^2 + dB^2 + dC^2 &= 0, \\ dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

La théorie des surfaces minima est ainsi ramenée à l'étude des

([1]) *Mathematische Annalen*, t. XIV, p. 331-416, et t. XV, p. 465-506.

deux courbes minima qui, par leur translation, engendrent la surface. Cette représentation des surfaces minima de Lie a, en tous cas, l'avantage de fournir non seulement les surfaces réelles, mais encore les surfaces imaginaires ; elle est ainsi très générale. A l'aide de ce mode de génération, l'auteur parvient à déterminer la classe et aussi l'ordre d'une surface algébrique formée au moyen de deux surfaces minima données. Soient M, M' les classes, R, R' les rangs des deux courbes ; la classe de la surface sera donnée par cette formule simple :

$$M(R' - M') + M'(R - M).$$

En général, la surface est imaginaire ; elle devient réelle lorsque A et A_1, ainsi que B et B_1 et que C et C_1, sont des fonctions conjuguées. On a alors $M = M'$, $R = R'$, et il en résulte, pour la classe de la surface,

$$2M(R - M).$$

Il faut remarquer, en particulier, le cas spécial où l'on a, en outre, $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$. Ces surfaces sont des surfaces doubles, dont l'indice de la classe est

$$M(R - M).$$

La détermination de l'indice de l'ordre est plus compliquée, parce qu'elle ne dépend pas uniquement des ordres des deux courbes, mais aussi de la manière dont ces courbes se comportent à l'infini.

Maintenant l'auteur parvient à la solution complète de la question posée par M. Weierstrass, savoir, la détermination de toutes les surfaces réelles d'un indice de classe donné, dans le cas où cet indice est un nombre premier. Ces surfaces se présentent toutes comme surfaces doubles ; la classe des courbes minima se trouve égale à l'unité, et la fonction de Weierstrass $F(s)$ est une fonction rationnelle. Le calcul est développé pour quelques cas particuliers. On trouve, entre autres, comme indice de classe le moins élevé, le nombre 5, d'accord avec les recherches de M. Henneberg.

Il est plus difficile de déterminer toutes les surfaces d'un ordre donné. La possibilité de la solution est cependant mise en évidence, et le calcul est complètement achevé dans plusieurs cas. Pour la surface de cinquième classe étudiée par M. Henneberg, l'ordre se trouve être 15 et non 17. Toutefois il n'y a pas là de contradiction essentielle vis-à-vis des recherches de M. Henneberg, car les méthodes employées par ce dernier ne peuvent prétendre qu'à fixer un certain maximum pour l'indice de l'ordre. D'ailleurs, M. C. Schilling (1) est parvenu à séparer du déterminant dont M. Henneberg avait conclu l'indice d'ordre 17 un facteur du second degré et à réduire ainsi l'ordre de la surface au nombre indiqué par M. Lie. La suppression de ce facteur donne pareillement l'explication d'autres assertions contradictoires avec le beau travail fondamental de M. Lie.

II. *Metrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen* (*Math. Ann.*, Bd. XV).

Comme suite à l'élégante solution donnée par M. H.-A. Schwarz du problème de la détermination d'une surface minimum, touchée par une surface développable donnée, suivant une courbe donnée, M. Lie se pose le problème tout à fait général de chercher toutes les surfaces minima algébriques tangentes à une développable algébrique donnée. La solution générale de ce problème, il est vrai, n'est pas connue; toutefois, on a obtenu une solution élégante et complète de toute une suite de cas principaux. Par exemple, l'auteur a déterminé toutes les surfaces algébriques, en nombre doublement infini, qui touchent une surface conique algébrique. Il a, de plus, étudié les surfaces qui ont une courbe algébrique pour ligne de courbure. On obtient dans ces recherches un grand nombre de très beaux théorèmes. De ceux-ci découlent, comme cas tout à fait particuliers, les deux théorèmes établis par Henneberg sur les surfaces ayant une ligne géodésique plane donnée. On trouve également toutes les surfaces algébriques tangentes à une développable circonscrite à une surface minimum algébrique, et on les détermine par une construction commune.

---

(1) *Die Minimalflächen fünfter Classe.* Dissert. Göttingen, 1880.