L. FUCHS

Sur les fonctions provenant de l'inversion des intégrales des solutions des équations différentielles linéaires

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 328-336

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_328_1>

SUR LES FONCTIONS PROVENANT DE L'INVERSION DES INTÉGRALES DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;

PAR M. L. FUCHS, à Heidelberg.

Dans une Communication, insérée dans les *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,* numéro de février 1880, p. 170 et suiv., j'ai défini des fonctions de plusieurs variables qui doivent leur naissance à l'inversion des intégrales des équations différentielles linéaires.

J'ai donné en ce lieu, et avec plus de détails dans le *Journal de Borchardt*, t. LXXXIX, p. 151, etc., un exemple des fonctions de cette sorte, en introduisant, pour le cas des équations différentielles du second ordre, les restrictions suivantes :

Les fonctions z_1, z_2 de u_1, u_2 doivent atteindre les points singuliers de l'équation différentielle pour des valeurs finies de u_1, u_2, tandis que dans la représentation des solutions de l'équation différentielle aux environs des points singuliers ne doivent pas entrer de logarithmes. De plus, tous ces points singuliers doivent avoir la propriété que les solutions y deviennent infinies ou bien y subissent des ramifications.

Il est manifeste que ces restrictions ne sont pas nécessaires toutes à la fois. Quant aux restrictions nécessaires, je les ai développées, pour des équations différentielles d'ordre quelconque, dans un travail qui doit paraître bientôt.

Le but de la Note actuelle est de présenter le Tableau des équations différentielles qui répondent aux restrictions faites pour les exemples dont je viens de parler. La Note déjà mentionnée, insérée dans les *Nachrichten* de Goettingue, à laquelle nous aurons à nous reporter, sera désignée par la lettre N.

Dans ce Tableau, que nous dressons ci-après, p et q désignent les coefficients de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + p\frac{d\omega}{dz} + q\omega = 0,$$

et A le nombre des points singuliers de l'équation différentielle (A) de N.

Pour toute équation différentielle admettant des intégrales algébriques, nous nous bornerons, pour abréger, à la remarque « intégrales algébriques », tandis que pour les autres nous donnons un système fondamental d'intégrales ω_1, ω_2 de l'équation différentielle en ω.

I. $A = 6$.

$$R = (z - a_1)(z - a_2)\dots(z - a_6), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega,$$

$$p = 0, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

II. $A=5$.

1° $$R=(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_5),\quad y=R^{-\frac{1}{2}}\omega,$$

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-a_4}+\frac{1}{z-a_5}\right),\quad q=-\frac{1}{4}\,\frac{1}{(z-a_4)(z-a_5)},$$

intégrales algébriques;

2° $$R=(z-a_1)\ldots(z-a_5),\quad y=R^{-\frac{1}{2}}\omega,$$

$$p=0,\quad q=0,$$

intégrales algébriques.

III. $A=4$.

1° $$R=(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)\quad y=R^{-\frac{1}{2}}\omega,$$

$$p=\frac{1}{2}\,\frac{d\log R}{dz},\quad q=\frac{\pi^2}{\Omega^2}\,\frac{1}{R},$$

Ω désignant un module de périodicité de l'intégrale elliptique $\int R^{-\frac{1}{2}}dz$,

$$\omega_1=e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz},\quad \omega_2=e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz};$$

2° $$y=[(z-a_1)(z-a_2(z-a_3)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_4)^{-\frac{2}{3}}\omega,$$

$$p=\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-a_2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-a_3}+\frac{2}{3}\,\frac{1}{z-a_4},$$

$$q=\left[\frac{1}{36}(2a_2+2a_3+a_4)-\frac{5}{36}z\right]\frac{1}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)},$$

intégrales algébriques;

3° $$y=[(z-a_1)\ldots(z-a_4)]^{-\frac{1}{2}}\omega,$$

$$p=\frac{1}{2}\,\frac{d\log R}{dz},\quad q=-\frac{1}{4}\,\frac{1}{R},$$

$$R=(z-a_3)(z-a_4),$$

intégrales algébriques;

4° $$y=[(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{2}{3}}\omega,\quad R=(z-a_3)(z-a_4),$$

$$p=\frac{2}{3}\,\frac{d\log R}{dz},\quad q=-\frac{2}{9}\,\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques;

5° $$y = [(z-a_1)(z-a_2)(a-z_2)]^{-\frac{1}{2}}\omega,$$
$$p = \tfrac{3}{2}(z-a_4)^{-1}, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

IV. $A = 3$.

1° $$R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega,$$
$$p = \frac{1}{2}\,\frac{d\log R}{dz}, \quad q = \frac{\pi^2}{\Omega^2}\,\frac{1}{R},$$

Ω étant un module de périodicité de l'intégrale elliptique $\int R^{-\frac{1}{2}}dz$,

$$\omega_1 = e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz}, \quad \omega_2 = e^{-\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz};$$

2° $$y = [(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{2}{3}}\omega,$$
$$p = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-a_2} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{z-a_3}$$
$$q = \left[\frac{1}{36}(2a_1 + 2a_2 + a_3) - \frac{5}{36}z\right]\frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)},$$

intégrales algébriques;

3° $$y = R^{-\frac{2}{3}}\omega, \quad R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3),$$
$$p = \frac{2}{3}\,\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{2}{3}}dz;$$

4° $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{2}{3}}(z-a_3)^{-\frac{5}{6}}, \quad y = R\omega,$$
$$p = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-a_1} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{z-a_2} + \frac{5}{6}\,\frac{1}{z-a_3}; \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz;$$

5° $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{5}{6}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_3),$$
$$p = \frac{5}{6}\,\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{5}{36}\,\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques;

6° $$y=(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{2}{3}}\omega,\quad R=(z-a_2)(z-a_3),$$
$$p=\frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz},\quad q=-\frac{2}{9}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques;

7° $$y=(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}\omega,\quad R=(z-a_2)(z-a_3),$$
$$p=\frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz},\quad q=-\frac{1}{36}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques;

8° $$y=(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{2}{3}}\omega,$$
$$p=\frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2}+\frac{2}{3}\frac{1}{z-a_3},\quad q=-\frac{1}{18}\frac{1}{(z-a_2)(z-a_3)},$$

intégrales algébriques;

9° $$y=[(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{2}{3}}\omega,$$
$$p=\tfrac{2}{3}(z-a_3)^{-1},\quad q=0,$$

intégrales algébriques.

V. $A=2$.

1° $$R=(z-a_1)^{-\frac{2}{3}}(z-a_2)^{-\frac{5}{6}},\quad y=R\omega,$$
$$p=\frac{2}{3}\frac{1}{z-a_1}+\frac{5}{6}\frac{1}{z-a_2},\quad q=0,$$
$$\omega_1=\text{const.},\quad \omega_2=\int R\,dz;$$

2° $$R=(z-a_1)(z-a_2),\quad y=R^{-\frac{1}{4}}\omega,$$
$$p=\frac{3}{4}\frac{d\log R}{dz},\quad q=0,$$
$$\omega_1=\text{const.},\quad \omega_2=\int R^{-\frac{3}{4}}dz.$$

3° $$R=(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{5}{6}},\quad y=R\omega,$$
$$p=\frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1}+\frac{5}{6}\frac{1}{z-a_2},\quad q=0,$$
$$\omega_1=\text{const.},\quad \omega_2=\int R\,dz;$$

4°
$$R=(z-a_1)(z-a_2),\quad y=R^{-\frac{2}{3}}\omega,$$
$$p=\frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz},\quad q=0,$$
$$\omega_1=\text{const.},\quad \omega_2=\int R^{-\frac{2}{3}}dz;$$

5°
$$R=(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{3}{4}},\quad y=R\omega,$$
$$p=\frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1}+\frac{3}{4}\frac{1}{z-a_2},\quad q=0,$$
$$\omega_1=\text{const.},\quad \omega_2=\int R\,dz;$$

6°
$$R=(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{2}{3}},\quad y=R\omega,$$
$$p=\frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1}+\frac{2}{3}\frac{1}{z-a_2},\quad q=0,$$
$$\omega_1=\text{const.},\quad \omega_2=\int R\,dz;$$

7°
$$R=(z-a_1)(z-a_2),\quad y=R^{-\frac{5}{6}}\omega,$$
$$p=\frac{5}{6}\frac{d\log R}{dz},\quad q=-\frac{5}{36}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques;

8°
$$y=(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{5}{6}}\omega,$$
$$p=0,\quad q=0,$$

intégrales algébriques.

Pour les équations différentielles qui admettent des intégrales algébriques, z est une fonction rationnelle $\chi(\zeta)$ de ζ. En substituant dans l'équation (B) de N

$$z_1=\chi(\zeta_1),\quad z_2=\chi(\zeta_2),$$

on obtient, pour la détermination des ζ_1, ζ_2 comme fonctions de u_1, u_2 les équations qui ont lieu pour les fonctions hyperelliptiques du premier ordre.

Pour les cas IV 3°, 4°, V 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, il résulte du Mémoire de MM. Briot et Bouquet (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI, p. 222) que z est une fonction uniforme et doublement périodique $\chi(\zeta)$ de ζ.

De même, pour les cas III 1°, IV 1°, z représente une fonction uniforme $\chi(\zeta)$ de ζ, telle que

$$\chi(2\pi i\zeta) = \chi(\zeta), \quad \chi\left(\frac{\Omega_1}{\Omega}2\pi i\zeta\right) = \chi(\zeta),$$

où Ω_1 désigne un second module de périodicité de l'intégrale $\int R^{-\frac{1}{2}}dz$, différent de Ω. En substituant dans les équations (B) de N

$$z_1 = \chi(\zeta_1), \quad z_2 = \chi(\zeta_2),$$

ces équations deviennent, pour les cas III 1°, IV 1°,

$$\zeta_1^{\frac{1}{2}} + \zeta_2^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi i}{\Omega}u_1,$$

$$\zeta_1^{-\frac{1}{2}} + \zeta_2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\pi i}{\Omega}u_2,$$

tandis que, pour les cas IV 3°, 4° et V 1°, 2°, ..., 6°, elles deviennent

$$\zeta_1 + \zeta_2 = u, \quad \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = u_2,$$

de sorte que pour tous ces cas les coefficients de l'équation quadratique pour z_1, z_2 (N, p. 174) sont représentables au moyen des fonctions elliptiques.

Heidelberg, juin 1880.

Extrait d'une Lettre adressée par M. Fuchs à M. Borchardt.

Dans un résumé des résultats de mon travail *Sur une classe de fonctions*, etc., que j'ai publié dans les *Nachrichten* de Goettingue (février 1880, p. 170-176), se trouve (p. 173) la proposition suivante :

I. *Si $f(z)$ et $\varphi(z)$ forment un système fondamental arbitraire de solutions d'une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre à coefficients rationnels, et que pour tout point singulier les racines r_1, r_2 de l'équation fondamentale déterminatrice correspondante satisfassent aux conditions*

$$r_2 = r_1 + 1 \quad \text{ou} \quad r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad r_2 = -1 + \frac{2}{n}$$

(*n étant un nombre entier positif*), *tandis que les racines* ρ_1, ρ_2 *de l'équation fondamentale déterminatrice correspondante à* $z = \infty$ *satisfont aux conditions*

$$\rho_2 = \rho_1 + 1, \quad ou \quad \rho_1 = 1 + \frac{1}{\nu}, \quad \rho_2 = 1 + \frac{2}{\nu}$$

(*ν étant un nombre entier positif*), *et que de plus les développements des solutions de l'équation différentielle aux environs des points singuliers ne contiennent pas de logarithmes, l'équation*

$$\text{(F)} \qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta$$

détermine z comme fonction uniforme de ζ.

Dans mon travail inséré dans votre Journal (t. 89, p. 151, et suiv.), dans lequel j'ai développé les résultats mentionnés, la proposition précédente a été présentée (p. 159) comme proposition I, sous une forme un peu modifiée, laquelle, étant d'une moindre clarté, n'éloigne pas la possibilité d'une mésintelligence. C'est M. H. Poincaré, professeur à la Faculté des Sciences de Caen, qui par une aimable Communication a attiré mon attention sur cette circonstance.

Je prends maintenant la liberté de joindre ici quelques éclaircissements sur cette proposition.

Soit menée dans le plan des z, par chacun des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ de l'équation différentielle, une coupure quelconque, la coupure q_i par le point a_i. Que toutes ces coupures soient supposées continuées jusqu'au point $z = \infty$ et soumises seulement à la restriction de ne pas se croiser ni avec elles-mêmes ni entre elles. Désignons par T le plan des z ainsi découpé. Si pour une valeur arbitraire $z = z_0$ on attribue à $f(z)$ et $\varphi(z)$, ainsi qu'à leurs premières dérivées, des valeurs arbitraires, ces fonctions, ainsi que ζ, se trouvent déterminées uniformément dans toute l'étendue de T. En franchissant successivement les diverses coupures $q_1, q_2, \ldots, q_\rho$ dans un ordre quelconque et un nombre quelconque de fois chacune, on obtient des surfaces que l'on peut désigner par $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Ces surfaces sont en nombre infini quand les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne sont pas algébriques. Dans chacune de ces surfaces T_i, ζ est une fonction uniforme de z. Établissons maintenant au moyen de l'équation (F) la représentation des diverses feuilles T, T_1, T_2, ... sur le plan des ζ. Soit désignée par S_i la surface qui représente ainsi sur le plan des ζ la surface T_i. Tant que, sur une feuille T_i, $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne sont pas *identiquement* infinis, c'est-à-dire infinis pour toute valeur de z, S_i, qui correspond à T_i, remplira également une surface, soit que T_i provienne d'un nombre fini de transgressions des coupures q_1, q_2, ..., q_p, soit qu'il provienne d'un nombre infini. Au contraire, si $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont identiquement infinis sur une feuille T_i provenant d'un nombre infini de transgressions des coupures q, la représentante S_i de T_i se réduira en un point.

L'ensemble des représentantes S, S_1, S_2, ... forme une surface non découpée (*zusammenhängend*) dans le plan des ζ. Celles de ces représentantes qui ne correspondent pas à des surfaces T_i sur lesquelles $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont identiquement infinis *n'admettent pas de points de ramification* d'après les développements de mon Mémoire (p. 158-160 de votre Journal); *l'ensemble de ces représentantes constitue donc sur le plan des ζ une surface σ, qui couvre ce plan partout simplement.* Sur les bornes de cette surface σ se trouvent les points qui jouent le rôle des représentantes des surfaces T_i dans l'intérieur desquelles $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont identiquement infinis parce que ces points peuvent être obtenus par le passage à la limite des surfaces qui constituent σ.

Le sens de la proposition I de mon travail (p. 161 de votre Journal) revient maintenant à ce que z est une fonction méromorphe de ζ *dans l'intérieur de la surface* σ. De là découle le corollaire immédiatement suivant, dont il est fait usage dans la partie ultérieure du même travail, que $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ ne peut pas admettre une même valeur pour deux valeurs différentes de z, étant supposé nécessairement que ce quotient n'est pas indépendant de z, ou, ce qui est la même chose, que $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne sont pas identiquement infinis.

Si maintenant un des points limites est entouré en tous sens par des surfaces S, il faut, en dehors des restrictions déjà mentionnées, qu'une autre relation ait lieu encore entre les constantes contenues dans les coefficients de l'équation différentielle.

Heidelberg, 7 juin 1880.