BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

CYPARISSOS STEPHANOS

Sur la théorie des connexes conjugués

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^{e} série, tome 4, n^{o} 1 (1880), p. 318-328
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_318_1>

SUR LA THÉORIE DES CONNEXES CONJUGUÉS;

PAR M. CYPARISSOS STEPHANOS.

Je vais essayer, dans cette Note, de donner un aperçu succinct des principaux résultats auxquels je suis parvenu en étudiant les connexes conjugués.

Pour mettre dans tout son jour la portée de cette théorie, je commencerai par quelques remarques générales.

L'idée fondamentale dont Clebsch a poursuivi le développement en ébauchant la théorie des connexes était, on le sait bien, de considérer comme élément du plan l'ensemble d'un point x et d'une droite u; un connexe apparait alors comme un système triplement infini de pareils éléments assujettis à une seule condition

$$f = (x_1, x_2, x_3)^m (u_1, u_2, u_3)^n = 0.$$

Toutefois, dans l'étude des propriétés projectives des connexes, il convient de distinguer deux espèces de formations covariantes d'un connexe : celles qui gardent le caractère de covariance pour deux transformations linéaires quelconques effectuées respectivement sur les deux séries de variables x et u de la forme f, et celles qui ne gardent ce caractère que si chacune des deux transformations auxquelles on soumet respectivement les deux séries de variables x et u est l'inverse de la transposée de l'autre, c'est-à-dire si ces deux transformations définissent une même homographie du plan porteur des points x et des droites u.

On voit bien que les formations de la première espèce se prêtent à une interprétation projective, même si l'on rapporte dans la forme f les variables x à des éléments (points ou droites) d'un plan et les variables u à des éléments d'un autre plan, etc., d'où il résulte qu'en étudiant ces formations on étudie en même temps les propriétés communes à plusieurs sortes de dépendances géométriques.

Ces dépendances géométriques, lorsqu'on veut se restreindre à la considération d'un seul plan, se présentent soit comme connexes, soit comme des *liaisons* entre deux éléments de même nature ; une *liaison* pouvant être définie comme un système triplement infini de *couples* de deux points ou de deux droites d'un plan.

Maintenant un des attributs les plus remarquables du connexe conjugué d'un connexe, c'est qu'il en constitue une formation covariante de la première espèce, de sorte qu'en interprétant autrement l'équation d'un connexe on reconnaît qu'à toute *liaison* entre deux points (ou droites) d'un plan correspond une autre liaison entre deux droites (ou points), qui en est la conjuguée.

Le besoin d'introduire, à côté des connexes, des liaisons entre des éléments de même nature d'un plan, quoiqu'il soit manifeste par soi-même, se montrera inévitable lorsque nous ferons voir que deux connexes conjugués sont, en général, accompagnés de bien près par deux liaisons dont l'une est la conjuguée de l'autre.

Le problème capital de la théorie des connexes conjugués, comme il a été posé par Clebsch, consiste 1° à déterminer les singularités que présente le conjugué d'un connexe tout à fait général, et expliquer par là comment le conjugué de ce connexe coïncide précisément avec le connexe primitif ; de cette manière, on saura quelles sont les *singularités nécessaires* ou inévitables à un connexe et à son conjugué; 2° à déterminer dans quelles proportions se distribuent les diverses *singularités nécessaires* dans deux connexes présentant tous les deux toutes sortes de pareilles singularités; les lois de cette distribution seront exprimées par des formules analogues à celles dues à Plücker, qui régissent les singularités ordinaires des courbes algébriques.

Les résultats que nous allons présenter ici se rapportent à la première partie de ce problème, et constituent, croyons-nous, une contribution notable à sa résolution.

I.

1. Si l'on considère un couple (x, u) d'un connexe, la courbe U, enveloppe des droites liées au point x dans ce connexe, touche u en un point y, et la courbe X, lieu des points liés à la droite u, a pour tangente au point x une droite v. Les nouveaux couples d'éléments (v, y) qu'on obtient ainsi constituent un nouveau connexe, le conjugué du connexe considéré.

Mais on peut aussi considérer la liaison des points x et y entre eux, ainsi que celle des droites v et u. On obtient de la sorte deux liaisons associées au connexe considéré, et dont l'étude offre le plus grand intérêt, parce qu'elles constituent une double voie de transition entre le connexe primitif et son conjugué [1].

Cette relation entre les deux liaisons (x, y) et (v, u) et le connexe conjugué (v, y) résulte des deux propositions fondamentales suivantes, dont l'une est la corrélative de l'autre :

Le lieu $\mathfrak{X}_y$ des points x auxquels correspondent dans le connexe considéré des courbes U passant par un point y coïncide avec la courbe V correspondant à y dans le connexe conjugué.

L'enveloppe $\mathfrak{U}_v$ des droites u auxquelles correspondent dans le connexe considéré des courbes X touchant une droite v coïncide avec la courbe Y correspondant à v dans le connexe conjugué.

---

[1] Il peut arriver, pour des connexes particuliers, que l'une de ces liaisons ne soit pas formée d'un nombre triplement infini de couples, ce qui a lieu toujours lorsqu'un des nombres m, n (ordre et classe du connexe) est égal à l'unité. Nous nous bornons à cette indication, et nous ne persisterons pas, dans la suite, à montrer chaque fois les propositions qui ne subsistent plus dans ce cas.

De cette manière, les courbes $\mathfrak{Y}_x$ et $\mathfrak{X}_y$ correspondant aux points x et y suivant la liaison (x, y) coïncident respectivement avec les courbes U_x et V_y qu'on rencontre dans le connexe considéré et son conjugué. De même les courbes $\mathfrak{V}_u$ et $\mathfrak{U}_v$ correspondant aux droites u et v suivant la liaison (v, u) coïncident respectivement avec les courbes X_u et Y_v qu'on rencontre dans le connexe considéré et son conjugué.

2. On parvient à la première de ces deux propositions fondamentales, pour le cas où le connexe primitif est tout à fait général et n'offre aucune particularité, en constatant successivement que pour ce cas :

Le lieu $\mathfrak{X}_y$ des points x auxquels correspondent des courbes U *passant par un point fixe y coïncide avec l'enveloppe des courbes* X *correspondant aux droites u passant par le point y* (¹).

La courbe X *correspondant à une droite u passant par le point y touche la courbe $\mathfrak{X}_y$ en m^2 points x auxquels correspondent des courbes* U *ayant au point y pour tangente la droite u.*

La courbe U *correspondant à un point x de $\mathfrak{X}_y$ a pour tangente au point y une droite u à laquelle correspond une courbe* X *touchant la courbe $\mathfrak{X}_y$ au point x.*

3. A ces derniers théorèmes se rattachent les propositions suivantes :

La courbe V *correspondant à un point double y de U_x a le point x pour point double.*

La courbe V *correspondant à un point de rebroussement de U_x a le point x pour point de rebroussement.*

Les réciproques de ces propositions sont aussi vraies, pourvu qu'on ne considère que des points singuliers des courbes V, ne

(¹) Pour démontrer cette proposition, considérons deux droites infiniment voisines u passant par le point y; à ces deux droites correspondent, dans le connexe considere, deux courbes X, qui se coupent suivant m^2 points x. Il est clair maintenant que les courbes U corrrespondant à chacun de ces points x touchent les deux droites u considérees en des points infiniment voisins de y; en d'autres termes, elles passent par le point y lorsque les deux droites u viennent a coincider. D'où resulte la proposition énoncée.

constituant pas des singularités non communes à toutes les courbes V.

4. Si l'on considère un couple (x, u) du connexe primitif et le couple correspondant (v, y) du connexe conjugué, on peut remarquer que *les courbes* X_u *et* V_y *touchent la droite* v *au point* x, *et que les courbes* U_x *et* Υ_v *touchent la droite* u *au point* y.

De là on déduit ce résultat très important, dû à Clebsch, que *le connexe conjugué du conjugué d'un connexe coïncide avec ce connexe primitif.*

On peut en déduire aussi que *les deux liaisons* (x, y) *et* (v, u) *sont conjuguées l'une de l'autre.* Le lecteur pourra aisément obtenir la définition d'une liaison conjuguée à une autre en se rapportant à ce que nous avons remarqué en commençant sur la nature des connexes conjugués ([1]).

5. Si le connexe considéré est représenté par l'équation

$$f = (x_1, x_2, x_3)^m (u_1, u_2, u_3)^n = 0,$$

la liaison (x, y) sera représentée par l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la forme réciproque (*reciprocal*) $R_u f$ de f par rapport à u. De même l'équation de la liaison (v, u) sera obtenue en égalant à zéro la forme réciproque $R_x f$ de f par rapport à x.

Les liaisons (x, y) et (v, u) seront donc définies par des équations de la forme

$$R_u f = \varphi = (x_1, x_2, x_3)^{2m(n-1)} (y_1, y_2, y_3)^{n(n-1)}$$

et

$$R_x f = \psi = (v_1, v_2, v_3)^{m(m-1)} (u_1, u_2, u_3)^{2n(m-1)}.$$

On voit ainsi qu'en général les courbes V_y sont du degré $2m(n-1)$, et les courbes Υ_v de la classe $2n(m-1)$.

Dans ce qui suit nous supposerons toujours, comme nous l'avons fait dans le présent numéro, que la forme f soit la plus générale possible, c'est-à-dire à coefficients tout à fait arbitraires.

([1]) Ainsi, étant donnée une liaison (x, y), si l'on considère les courbes $\mathfrak{X}_y$ et $\mathfrak{Y}_x$ correspondant d'après cette liaison à deux points y, x liés entre eux, les droites v et u qui touchent respectivement les courbes $\mathfrak{X}_y$ et $\mathfrak{Y}_x$ aux points x et y formeront un couple de la *liaison conjuguée.*

6. Les nombres des points doubles et de rebroussement d'une courbe V_y sont égaux aux nombres des courbes U_x ayant en y un point double ou de rebroussement. On sait déjà [1] que ces derniers nombres sont égaux à

$$2m^2(n-2)(n-3) \quad \text{et} \quad 3m^2(n-2).$$

On est ainsi à même de calculer la classe de V_y et l'ordre de Υ_v; on retrouve ainsi les nombres

$$m[mn+2(m-1)(n-1)] \quad \text{et} \quad n[mn+2(m-1)(n-1)],$$

obtenus différemment par M. Lindemann.

7. L'équation tangentielle $U_2=0$ des points doubles de U_x, qui doit être du degré $2n(n-2)(n-3)$ par rapport aux coefficients des u dans l'équation $f=0$ [2], représente, si l'on y considère les x comme coordonnées courantes, le lieu des points doubles x des courbes V correspondant aux points y d'une droite u; ce lieu sera donc d'un ordre égal à $2mn(n-2)(n-3)$. De même l'équation tangentielle $V_2=0$ des points doubles de V_y représente aussi le lieu des points doubles y des courbes U correspondant aux points x d'une droite v, dont l'ordre est égal à l'ordre $2mn(n-2)(n-3)$ de la courbe précédente.

D'une manière analogue, l'équation tangentielle $U_3=0$ des points de rebroussement de U_x, qui doit être du degré $3n(n-2)$ par rapport aux coefficients des u dans $f=0$, représente le lieu des points de rebroussement x des courbes V correspondant aux points y d'une droite u; ce lieu sera donc d'un ordre égal à $3mn(n-2)$. De même, l'équation tangentielle $V_3=0$ des points de rebroussement de V_y représente aussi le lieu des points de rebroussement des courbes U correspondant aux points x d'une droite v, dont l'ordre est nécessairement égal à celui de la courbe précédente.

8. Il est manifeste que pour les courbes X et Υ auront lieu des

---

[1] *Voir* LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch*, p. 970. On doit aussi à M. Lindemann (*ibid.*, p. 971) certains résultats de notre n° 7.

[2] *Voir* pour la question corrélative le Mémoire de Cayley, *Recherches sur l'élimination et sur la théorie des courbes* (*Journal de Crelle*, vol. 34).

propositions corrélatives à celles exposées dans les nos 2, 3, 6, 7 au sujet des courbes U et V.

9. La forme réciproque de $\varphi = \mathrm{R}_u f$ par rapport à x est

$$\mathrm{R}_x \varphi = \mathrm{R}_x \mathrm{R}_u f = \mathrm{F} \mathrm{V}_2^2 \mathrm{V}_3^3,$$

où

$$\mathrm{F} = (v_1, v_2, v_3)^{mt} (y_1, y_2, y_3)^{nt} = 0 \quad [t = mn + 2(m-1)(n-1)]$$

représente le connexe conjugué du connexe $f = 0$.

De même, la forme réciproque de $\psi = \mathrm{R}_x f$ par rapport à u est

$$\mathrm{R}_u \psi = \mathrm{R}_u \mathrm{R}_x f = \mathrm{F} \Upsilon_2^2 \Upsilon_3^3,$$

où $\Upsilon_2 = 0$ et $\Upsilon_3 = 0$ sont les équations ponctuelles des tangentes doubles et d'inflexion de la courbe Υ.

Il résulte de la nature des relations précédentes qu'aucune des courbes V correspondant aux points y d'une droite arbitraire u ne présente une nouvelle tangente double ou d'inflexion, et que de même aucune des courbes Υ correspondant aux droites v passant par un point arbitraire x ne présente un nouveau point double ou de rebroussement.

II.

10. Les courbes X correspondant à des droites u' infiniment voisines d'une droite u appartiennent à un réseau

$$u'_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u'_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + u'_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0,$$

dans lequel est comprise la courbe X_u.

Les points déterminés sur X_u par une courbe de ce réseau correspondant à une droite u' forment les points de contact avec X_u de la courbe V correspondant au point de rencontre y des droites u et u'.

Les courbes X correspondant à des droites u' infiniment voisines de u déterminent sur X_u une infinité de groupes de m^2 points tels que tout point de X_u n'appartienne qu'à un seul de ces groupes.

11. Cependant il peut arriver, pour des positions spéciales de u,

que les groupes déterminés sur X_u par les courbes X qui en sont infiniment voisines aient tous un point commun x. Dans ce cas, toutes les courbes du réseau

$$u'_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u'_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + u'_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0$$

passeront par ce point x.

On voit ainsi que les couples (x, u) communs aux connexes

(1) $$\frac{\partial f}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0$$

sont formés par des éléments jouissant des propriétés dont il s'agit.

12. *Lorsque les courbes X correspondant à des droites u' infiniment voisines de u rencontrent toutes la courbe X_u en un même point x, la courbe U_x a la droite u pour tangente double.*

Le lieu S des points x auxquels correspondent des courbes U ayant une tangente double est une courbe du degré $3m(n-1)^2$. L'enveloppe Σ des droites u qui sont des tangentes doubles des courbes U est une courbe de la classe $3m^2(n-1)$.

On remarquera que l'équation $S = 0$ qui représente la courbe S est obtenue en égalant à zéro le discriminant de f par rapport à u.

13. *La courbe X correspondant à une tangente u de Σ touche la courbe S au point x qui correspond à u.*

De cette manière, l'équation de la tangente de S au point x sera

(2) $$x'_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x'_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

La classe de la courbe S est égale au nombre

$$3m(n-1)[mn + (m-1)(n-1)]$$

des couples (x, u) communs aux quatre connexes (1) et (2).

14. *A tout point double x de S correspond une courbe U ayant*

deux tangentes doubles, tandis qu'à tout point de rebroussement de $\mathcal{S}$ correspond une courbe U *ayant une tangente d'inflexion.*

Chacun des couples (x, u) communs au connexe $f = 0$ et au *couple de courbes* (*Curvenpaar*) commun aux six connexes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} : \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} : \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1} : \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} : \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_3}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u_3 \partial u_1} : \frac{\partial^2 f}{\partial u_3 \partial u_2} : \frac{\partial^2 f}{\partial u_3^2}.$$

est formé d'un point de rebroussement x de $\mathcal{S}$ et de la tangente d'inflexion u de la courbe correspondante U_x.

Le nombre des points de rebroussement de la courbe $\mathcal{S}$ est ainsi égal à

$$12 m^2 (n -)(1 n - 2).$$

Par conséquent, le nombre des points doubles de $\mathcal{S}$ sera égal à

$$\frac{3}{2} m^2 (n-1)(n-2)(3n^2 - 3n - 11).$$

15. A toute tangente double u de Σ correspond une courbe X_u rencontrée en deux points fixes par toutes les courbes X qui en sont infiniment voisines. D'une manière analogue, si la courbe Σ avait des tangentes d'inflexion u, toute courbe X_u correspondant à une de ces droites u serait touchée par toutes les courbes X infiniment voisines d'elle en un même point; cependant il n'existe pas en général de droites u jouissant de cette propriété.

Connaissant ainsi que la courbe Σ est de la classe $3m^2(n - 1)$, qu'elle n'a pas de tangentes d'inflexion et que son genre est égal à celui de la courbe $\mathcal{S}$, on pourra en calculer tous les autres nombres pluckériens.

16. Les courbes $\mathfrak{S}$ et T, dont la première est l'enveloppe des droites u auxquelles correspondent des courbes X ayant des points doubles x et dont la seconde est le lieu de ces points doubles x, ont des propriétés corrélatives à celles des courbes $\mathcal{S}$ et Σ.

III.

17. Les courbes V correspondant aux divers points y d'une tangente u de la courbe Σ sont tangentes entre elles et à la courbe $\mathfrak{S}$ au point x de cette dernière courbe correspondant à la tangente u de Σ.

Il s'ensuit de là que *toute courbe* V_y *touche* $\mathfrak{S}$ *en* $3m^2(n-1)$ *points auxquels correspondent des tangentes de* Σ *passant par le point* y.

Des propositions analogues ont lieu pour les courbes Υ par rapport aux courbes $\mathfrak{T}$ et T.

18. La forme réciproque de φ par rapport à y est

$$R_y \varphi = R_y R_u f = f U_2^2 U_3^3 \mathfrak{S}.$$

De même, la forme réciproque de ψ par rapport à v est

$$R_v \psi = R_v R_x f = f X_2^2 X_3^3 \mathfrak{T}.$$

A ces relations analytiques se relient les faits géométriques suivants :

L'enveloppe des courbes V *correspondant aux points* y *d'une droite* u *est constituée par la courbe* X *correspondant à la droite* u *et la courbe* $\mathfrak{S}$.

L'enveloppe des courbes Υ *correspondant aux droites* v *passant par un point* x *est constituée par la courbe* U *correspondant au point* x *et la courbe* $\mathfrak{T}$.

19. *Si la courbe* V_y *a pour tangente double ou d'inflexion une droite* v, *la courbe* Υ_v *aura* y *pour point double ou de rebroussement.*

L'enveloppe $\Upsilon'_2 = 0$ des tangentes doubles des courbes V correspondant aux points y d'une droite est de la classe

$$mn[t^2 - 21(m-1)(n-1)] + \frac{1}{2}mn(m+n),$$
$$[t = mn + 2(m-1)(n-1)].$$

D'un degré égal à ce même nombre sera nécessairement le lieu $V'_2 = 0$ des points doubles des courbes Υ correspondant aux droites ν d'un faisceau.

L'enveloppe $\Upsilon'_3 = 0$ des tangentes d'inflexion des courbes V correspondant aux points y d'une droite est de la classe

$$12mn(m-1)(n-1).$$

D'un degré égal à ce même nombre sera le lieu $V'_3 = 0$ des points de rebroussement des courbes Υ correspondant aux droites ν d'un faisceau.

20. La forme réciproque de F par rapport à y est

$$R_y F = \psi \Upsilon'^2_2 \Upsilon'^3_3 \mathfrak{S}',$$

où $\mathfrak{S}' = 0$ représente en coordonnées tangentielles la courbe $\mathfrak{S}$.

De même :

La forme réciproque de F par rapport à ν est

$$R_\nu F = \varphi V'^2_2 V'^3_3 \mathfrak{C}',$$

où $\mathfrak{C}' = 0$ représente en coordonnées ponctuelles la courbe $\mathfrak{C}$.

A ces relations analytiques se relient des nouveaux faits géométriques, savoir :

Parmi les courbes Υ_ν, il n'y a que celles correspondant aux tangentes ν de $\mathfrak{S}$ qui se décomposent en une droite double et une autre courbe résiduelle.

Parmi les courbes V_y, il n'y a que celles correspondant aux points y de $\mathfrak{C}$ qui se décomposent en un point compté deux fois et en une autre courbe résiduelle.

Paris, février 1880.