Bulletin des sciences

mathématiques et astronomiques

S. Lie

Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 300-304

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_300_1>

SUR LES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE ONT ENTRE EUX UNE RELATION;

PAR M. S. LIE.

1. Des belles recherches de M. Weingarten (*Journal de Crelle*, t. 59) sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux ρ et ρ' ont entre eux une relation résulte bien simplement un moyen général pour la détermination des lignes de courbure de ces surfaces: c'est ce que je vais exposer.

L'équation $\rho =$ const. détermine sur la surface des centres d'une surface quelconque F un faisceau de courbes parallèles, dont les trajectoires orthogonales $q =$ const. sont les lignes géodésiques de la surface des centres. Les tangentes à une courbe du faisceau $q =$ const. rencontrent la surface F le long d'une ligne de courbure de cette surface. Ainsi la détermination des lignes de courbure de F et la détermination des lignes géodésiques $q =$ const. de la surface des centres sont deux problèmes équivalents : c'est un résultat connu.

Supposons maintenant que les rayons de courbure ρ et ρ' de la surface F aient entre eux une relation donnée; l'élément d'arc ds, sur la surface des centres, est alors donné, d'après M. Weingarten, par la formule

$$(1)\qquad ds^2 = d\rho^2 + e^{2\int\frac{d\rho}{\rho-\rho'}}dq^2,$$

formule qui montre que la surface des centres est applicable sur une surface de révolution. Bour a déterminé les lignes géodésiques des surfaces applicables sur les surfaces de révolution, lorsque leur courbure n'est pas constante; on reconnaît donc que les lignes de courbure d'une surface dont les rayons de courbure ont entre eux une relation peuvent s'obtenir par des quadratures, excepté lorsque la surface des centres est à courbure constante.

Ce mode de détermination est doublement incomplet : d'une part, il nécessite de longs calculs; de l'autre, il ne s'applique point à quelques cas exceptionnels. Il y a donc lieu de développer une méthode plus simple et plus générale.

Désignant par ξ, η, ζ les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface des centres, l'équation (1) donne

$$dq = e^{-\int\frac{d\rho}{\rho-\rho'}}\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - d\rho^2}$$

ou

$$(2)\qquad q = \int e^{-\int\frac{d\rho}{\rho-\rho'}}\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - d\rho^2};$$

dans cette formule, les quantités ρ, ρ', ξ, η, ζ doivent être exprimées au moyen des coordonnées x, y des points de la surface F, en sorte que le radical prend la forme

$$X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy,$$

où X et Y sont des fonctions connues de x et de y; par suite, q est déterminé en fonction de x et de y, et l'on a obtenu un faisceau de lignes de courbure de la surface F.

Si les rayons de courbure ρ et ρ' d'une surface ont entre eux une relation, les lignes de courbure de cette surface sont déterminées par la formule $q =$ const. (2). Dans cette équation, ξ, η, ζ désignent les coordonnées du centre de courbure qui correspond au rayon de courbure ρ.

2. La méthode précédente est générale; elle s'applique encore

lorsque la relation entre ρ et ρ' est de la forme

$$\rho - \rho' = a = \text{const.},$$

auquel cas, d'après les recherches de M. Beltrami et de M. Dini, la surface des centres possède une courbure constante. Si je ne me trompe, cette remarque complète de la façon la plus heureuse la théorie donnée par M. Bianchi (*Ricerche sulle superficie a curvatura costante;* Pisa, 1879). Dans ce travail, M. Bianchi fait une remarque qui paraît bien neuve et bien importante, à savoir que d'une surface Φ à courbure constante, dont on a déterminé les lignes géodésiques, on peut toujours déduire ∞^1 surfaces Φ_1 à courbures constantes. Il suffit pour cela de prendre l'élément d'arc sur la surface Φ sous la forme

$$(3) \qquad ds^2 = d\rho^2 + e^{\frac{2\rho}{A}} dq^2 \quad (A = \text{const.}),$$

ce qui, d'après M. Beltrami, est possible de ∞^1 manières. Que l'on mène maintenant les tangentes à toutes les lignes géodésiques du faisceau $q = \text{const.}$, et que l'on construise toutes les surfaces F qui coupent orthogonalement ces tangentes (ce que l'on peut faire d'une façon explicite) : toutes ces surfaces auront une même surface des centres, dont une nappe est précisément Φ. La seconde nappe Φ_1 est aussi une surface à courbure constante. De cette façon, de la surface donnée Φ on déduit une infinité (simple) de surfaces Φ_1 à courbure constante. Si maintenant on pouvait mettre l'élément d'arc d'une surface Φ_1 sous la forme (3), on pourrait aussi déduire de Φ_1 une infinité simple de surfaces à courbure constante; ce qui précède montre que cette opération peut s'effectuer, et il n'est pas nécessaire pour cela de déterminer l'équation finie des surfaces F.

Ainsi l'application successive de la méthode de M. Bianchi pour la détermination de surfaces à courbure constante n'exige aucune intégration d'équations différentielles quand on a déterminé les lignes géodésiques de la surface primitive Φ.

Je remarquerai maintenant que les recherches de M. Bonnet (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXIV, XXV) conduisent aisément à une méthode pour la détermination de ∞^1 surfaces à courbure constante, quand on s'est donné une telle surface. En effet, de cette surface, par une transformation parallèle (dilatation) convenable, on peut d'abord déduire une surface à courbure moyenne constante; de cette nouvelle surface on déduit (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXV, p. 76-78) une infinité simple de nouvelles surfaces à courbure moyenne constante, et finalement on trouve ∞^1 surfaces à courbure constante. Il me semblerait désirable qu'on cherchât quel rapport peut exister entre cette opération et celle de M. Bianchi. Les recherches de M. Bonnet montrent, en tout cas, que les surfaces à courbure constante se classent naturellement en groupes dont chacun contient une infinité simple de ces surfaces.

3. Quand les rayons de courbure d'une surface sont liés entre eux par une relation quelconque $\rho' = A(\rho)$, il ne paraît pas possible, en général, de déterminer les lignes asymptotiques, non plus que les lignes géodésiques dont la longueur est nulle. Dans certains cas intéressants, mais particuliers, cette détermination est généralement possible. Pour le montrer simplement, je me référerai de nouveau au travail déjà cité de M. Bonnet (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXV, p. 92-111). Si l'on pose

$$\rho = \varphi(k), \quad \rho' = \varphi(k) - k\varphi'(k),$$

et que l'on choisisse les lignes de courbure comme lignes coordonnées, l'élément d'arc ds sur la surface peut être mis sous la forme

$$ds^2 = \frac{\varphi^2}{k^2}\,du^2 + \frac{(\varphi - k\varphi')^2}{\varphi'^2}\,dv^2;$$

les lignes géodésiques dont la longueur est nulle sont alors déterminées par l'équation

$$\frac{\varphi}{k}\,du \pm i\,\frac{\varphi - k\varphi'}{\varphi'}\,dv = 0,$$

qui est intégrable si la fonction $\varphi(k)$ satisfait à la condition

$$\frac{\varphi - k\varphi'}{\varphi'} = C\,\frac{\varphi}{k} \quad (C = \text{const.}).$$

Cette condition est une équation différentielle du premier ordre dont l'intégrale générale a la forme $k^2 = M\varphi^2 - 2C\varphi$, $\varphi = \frac{1}{C}k^2$

étant l'intégrale singulière. L'intégrale générale donne toutes les surfaces à courbure moyenne constante, et l'intégrale singulière les surfaces minima.

Sur les surfaces à courbure moyenne constante, on peut obtenir, par des quadratures, non seulement les lignes de courbure, mais encore les courbes $ds = 0$. Les lignes de courbure sont des lignes isothermes.

Les lignes asymptotiques d'une surface dont les rayons de courbure ont entre eux une relation sont déterminées par l'équation

$$\frac{\varphi}{k^2}\,du^2 + \frac{\varphi - k\varphi'}{\varphi'^2}\,dv^2 = 0,$$

qui est intégrable si φ satisfait à l'équation

$$L\varphi\varphi'^2 = k^2(\varphi - k\varphi') \quad (L = \text{const.}).$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$\varphi^2 = Ak^2 + LA^2.$$

Les surfaces correspondantes ont une courbure constante; l'intégrale singulière

$$\varphi = \frac{i}{2\sqrt{L}}\,k^2$$

donne seulement les surfaces minima.

Sur les surfaces à courbure constante on peut trouver, par des quadratures, non seulement les lignes de courbure, mais encore les lignes asymptotiques.

J'ai déjà, dans une autre circonstance, démontré ce théorème d'une manière différente [1].

---

[1] Je me réserve de développer les indications qui précèdent relativement à la théorie générale des surfaces à courbure constante; d'une surface à courbure constante, dont on a déterminé les lignes géodésiques, on peut déduire par des quadratures successives ∞^∞ telles surfaces qui ne satisfont à aucune équation à différences partielles, excepté l'équation proposée

$$s^2 - rt = \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{a^2}.$$