BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

L. FUCHS

Sur une classe de fonctions de plusieurs variables, provenant de l'inversion des intégrales des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 278-300

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_278_0>

MÉLANGES.

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES, PROVENANT DE L'INVERSION DES INTÉGRALES DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS RATIONNELS;

PAR M. L. FUCHS, à Heidelberg.

Traduit par M. STEPHANOS.

De même que les fonctions de plusieurs variables, appelées *abéliennes*, doivent leur naissance aux intégrales des fonctions algébriques quand on considère, d'après l'exemple de Jacobi, les limites supérieures de p intégrales d'une fonction algébrique convenable comme fonctions de la somme de ces intégrales et d'autres $p-1$ sommes semblablement formées, de même on obtient, comme je le démontre dans le présent travail, une nouvelle classe de fonctions de plusieurs variables en prenant pour base les intégrales des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels.

Je me suis posé d'abord la question d'examiner la nature des solutions d'une équation différentielle linéaire et homogène du $m^{\text{ième}}$ ordre pour le cas où les équations

$$\sum_1^m {}_\iota \int_{\zeta_\iota}^{z_\iota} f_\alpha(z)\,dz = u_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

où $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ sont des constantes et où $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ constituent un système fondamental de solutions de l'équation différentielle, doivent définir $z_1, z_2, \ldots, z_m$ comme fonctions analytiques de $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

J'ai obtenu la résolution de cette question pour les équations différentielles du second ordre, et je me propose de présenter dans ce qui suit les résultats auxquels je suis parvenu.

Pour des développements ultérieurs sur les fonctions ici définies, et surtout pour leur représentation analytique, on aura à se rapporter aux relations que j'ai données, dans un travail inséré au tome 75 du *Journal de Borchardt*, p. 177 [1], pour les intégrales des solutions d'une équation différentielle linéaire, prises entre deux points singuliers de cette équation.

Les resultats du présent travail ont déjà été communiqués, le 4 de ce mois, à la Société Royale des Sciences de Göttingue.

I.

Considérons une équation différentielle

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + P\frac{dy}{dz} + Qy = 0,$$

dont les coefficients P, Q sont des fonctions rationnelles de z, qui soit telle que ses intégrales aient par rapport à tout point singulier a la propriété que, multipliées par une puissance de $z - a$, elles ne deviennent ni nulles ni infinies pour $z = a$ (*voir* mon Mémoire, t. 66 du *Journal de Borchardt*, p. 146).

Soit

$$y_1 = f(z), \quad y_2 = \varphi(z)$$

un système fondamental d'intégrales de l'équation (A); alors

$$w_1 = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz, \quad w_2 = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz,$$

où z_0 désigne une valeur arbitraire, formeront, avec une constante que nous prendrons égale à c, un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle

$$\text{(A')} \qquad \frac{d^3w}{dz^3} + P\frac{d^2w}{dz^2} + Q\frac{dw}{dz} = 0.$$

Un changement du chemin d'intégration changerait respectivement w_1, w_2 en w'_1, w'_2, tels que

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} w'_1 = \alpha_{11}w_1 + \alpha_{12}w_2 + \beta_1 c, \\ w'_2 = \alpha_{21}w_1 + \alpha_{22}w_2 + \beta_2 c, \end{cases}$$

$\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2$ désignant des constantes.

---

(1) Voir *Bulletin*, 1re série, p. 233-236.

Le même changement de chemin remplace respectivement y_1, y_2 par y'_1, y'_2, où

$$(2)\qquad \begin{cases} y'_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2, \\ y'_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2. \end{cases}$$

Maintenant, au moyen des équations

$$(\mathrm{B})\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\zeta_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} f(z)\,dz = u_1, \\ \displaystyle\int_{\zeta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = u_2, \end{cases}$$

où ζ_1, ζ_2 sont des valeurs arbitraires fixes, mais différant des points singuliers de l'équation (A), *en même temps que $f(\zeta_1)$, $f(\zeta_2)$, $\varphi(\zeta_1)$, $\varphi(\zeta_2)$ ont des valeurs données, définissons z_1, z_2 comme fonctions de u_1, u_2 et cherchons quelles propriétés doivent avoir $f(z)$, $\varphi(z)$ pour que z_1, z_2 soient des fonctions analytiques déterminées desdites variables.*

Supposons que les chemins d'intégration joignant les mêmes valeurs de z soient coïncidents pour les deux équations.

Faisons passer par chacun des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ de l'équation (A) une coupure quelconque jusqu'à l'infini; soit désignée par q_i la coupure correspondant à a_i. Ces coupures ne doivent se croiser ni avec elles-mêmes ni entre elles. Que le plan des variables complexes z ainsi découpé soit désigné par T'. Si toutes les intégrales qui figurent dans (B) franchissent une même coupure q_i un nombre égal de fois et dans des sens identiques, toute variation du chemin de l'intégration changera u_1 en $\alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \beta_1 c$, u_2 en $\alpha_{21} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \beta_2 c$ si par cette variation de chemin y_1, y_2 subissent la substitution

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Les quantités β_1, β_2 ont des valeurs déterminées lorsque le changement du chemin d'intégration est déterminé.

Soient maintenant

$$(\mathrm{C})\qquad z_1 = \mathrm{F}_1(u_1, u_2), \quad z_2 = \mathrm{F}_2(u_1, u_2);$$

ces fonctions F_1 et F_2 jouissent de la propriété suivante :

$$(\mathrm{D})\quad \begin{cases} F_1(\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\beta_1 c,\ \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\beta_2 c)=F_1(u_1,u_2), \\ F_2(\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\beta_1 c,\ \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\beta_2 c)=F_2(u_1,u_2). \end{cases}$$

Les fonctions F_1 et F_2 admettent en outre généralement la même valeur pour une infinité d'autres valeurs de u_1, u_2, comme il résulte de ce qu'on peut laisser invariable le chemin d'intégration de ζ_2 à z_2 ou bien celui de ζ_1 à z_1, en faisant varier l'autre.

II.

Nous allons maintenant supposer que l'équation (A) n'ait que des points essentiellement singuliers, c'est-à-dire que ses coefficients ne deviennent infinis que pour des points auxquels l'intégrale générale devient discontinue ou subit une ramification. De plus, que les racines des équations fondamentales déterminatrices correspondant à chacun de ces points singuliers soient des nombres réels et rationnels, et en outre, conformément à mon Mémoire (t. 76 du *Journal de Borchardt*, p. 184), différents entre eux, négatifs et plus petits en valeur absolue que l'unité.

Au contraire, que les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $z=\infty$ soient des nombres réels et rationnels, différents entre eux et plus grands que l'unité positive.

Les quantités z_1, z_2 qui figurent dans les équations (B) peuvent alors coïncider, pour des valeurs finies de u_1, u_2, avec des points singuliers de l'équation (A) ou avec le point à l'infini.

Les fonctions z_1, z_2 des variables indépendantes u_1, u_2 définies par les équations (B), satisfont aux équations différentielles

$$(\mathrm{E})\quad \begin{cases} \Delta\, dz_1 = \varphi(z_2)\,du_1 - f(z_2)\,du_2, \\ \Delta\, dz_2 = -\varphi(z_1)\,du_1 + f(z_1)\,du_2, \end{cases}$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(z_1) & f(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi(z_2) \end{vmatrix}.$$

Lorsque u_1, u_2, partant des valeurs 0, 0, suivent des chemins arbitraires et indépendants entre eux, il arrive, d'après les principes développés par MM. Briot et Bouquet (voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. III, p. 265, et Briot, *Théorie des fonctions abé-*

liennes, p. 79), que z_1, z_2, partant des valeurs ζ_1, ζ_2, s'avancent d'une manière continue sur des chemins correspondants et restent holomorphes au voisinage des valeurs parcourues de u_1, u_2, jusqu'à ce que z_1, z_2 soient devenus infinis ou soient parvenus à des valeurs pour lesquelles $\frac{f(z_1)}{\Delta}$, $\frac{f(z_2)}{\Delta}$, $\frac{\varphi(z_1)}{\Delta}$, $\frac{\varphi(z_2)}{\Delta}$ prennent des valeurs qui ne sont pas toutes finies et déterminées.

Cette dernière circonstance ne peut avoir lieu que lorsqu'une au moins des quantités z_1, z_2 s'approche d'un point singulier de l'équation (A) ou du point à l'infini, ou bien lorsque ces quantités atteignent des valeurs satisfaisant à l'équation $\Delta = 0$.

III.

Considérons d'abord le cas où, pour $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$, z_1 coïncide avec un point singulier de l'équation (A) et z_2 avec un point b non singulier et situé en distance finie, sans que pourtant l'équation

$$\text{(F)} \qquad \frac{f(z_1)}{\varphi(z_1)} = \frac{f(z_2)}{\varphi(z_2)}$$

soit satisfaite par $z_1 = a$, $z_2 = b$.

Si l'on pose

$$z_1 - a = w_1, \quad z_2 - b = w_2,$$

on aura, d'après mon Mémoire (t. 66 du *Journal de Borchardt*, p. 139), aux environs de a,

$$(1) \qquad \begin{cases} f(z_1) = c_{11} w_1^{r_1} g_1(w_1) + c_{12} w_1^{r_2} g_2(w_1), \\ \varphi(z_1) = c_{21} w_1^{r_1} g_1(w_1) + c_{22} w_1^{r_2} g_2(w_1), \end{cases}$$

où r_1, r_2 sont les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à a, $c_{11}, \ldots, c_{22}$ des constantes, et $g_1(w_1)$, $g_2(w_2)$ des fonctions holomorphes au voisinage de a et telles que $g_1(0)$, $g_2(0)$ soient différents de zéro.

Au contraire, on a, aux environs de $z_2 = b$,

$$(2) \qquad \begin{cases} f(z_2) = \gamma_0 + \gamma_1 w_2 + \gamma_2 w_2^2 + \ldots, \\ \varphi(z_2) = \gamma'_0 + \gamma'_1 w_2 + \gamma'_2 w_2^2 + \ldots, \end{cases}$$

γ_i, γ'_i étant des constantes déterminées.

On aura, par conséquent,

$$\Delta = w_1^{r_1} G_1(w_1, w_2) + w_1^{r_2} G_2(w_1, w_2), \tag{3}$$

où G_1, G_2 désignent des fonctions de w_1, w_2 respectivement holomorphes aux environs de $w_1 = 0$, $w_2 = 0$.

Soit $r_2 > r_1$.

Puisque $z_1 = a$, $z_2 = b$ ne satisfont pas à l'équation (F), la quantité

$$G_1(0, 0) = g_1(0)[c_{11}\gamma_0' - c_{21}\gamma_0]$$

doit être différente de zéro.

Il résulte de là que $\Delta w_1^{-r_1}$ est fini et différent de zéro pour $w_1 = 0$, $w_2 = 0$.

Soient maintenant, d'après le numéro précédent,

$$r_1 = -\frac{k_1}{n}, \quad r_2 = -\frac{k_2}{n},$$

où k_1, k_2, n désignent des nombres positifs entiers, dont les deux premiers sont plus petits que n, et posons

$$w_1 = t^n.$$

Les équations (E) se transforment ainsi en

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} nt^{n-1}\Delta\, dt &= \varphi(w_2 + b)\,du_1 - f(w_2 + b)\,du_2, \\ \Delta\, dw_2 &= -[c_{21}t^{-k_1}g_1(t^n) + c_{22}t^{-k_2}g_2(t^n)]\,du_1 \\ &\quad + [c_{11}t^{-k_1}g_1(t^n) + c_{12}t^{-k_2}g_2(t^n)]\,du_2. \end{aligned} \right.$$

Si nous supposons donc que

$$k_1 \geqq n - 1,$$

c'est-à-dire, à cause de $k_1 < n$, que

$$k_1 = n - 1,$$

les valeurs de $\frac{\partial t}{\partial u_1}, \frac{\partial t}{\partial u_2}, \frac{\partial w_2}{\partial u_1}, \frac{\partial w_2}{\partial u_2}$ résultant des équations (4) seront des fonctions holomorphes de t, w_2 aux environs de $t = 0$, $w_2 = 0$.

De là, il s'ensuit que z_1 et z_2 sont des fonctions holomorphes de u_1, u_2 aux environs des valeurs $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$.

IV.

Considérons maintenant le cas où, pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, les z_1, z_2 coïncident respectivement avec deux points singuliers différents a_1, a_2 de l'équation (A), sans que toutefois l'équation (F) soit satisfaite par $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$.

Soient r_{11}, r_{12} les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à a_1 et r_{21}, r_{22} celles de l'équation correspondant à a_2, et posons, en conformité avec les deux numéros précédents,

$$(1)\qquad \begin{cases} r_{11} = -1 + \dfrac{1}{n_1}, & r_{12} = -1 + \dfrac{l_1}{n_1}, \\ r_{21} = -1 + \dfrac{1}{n_2}, & r_{22} = -1 + \dfrac{l_2}{n_2}, \end{cases}$$

l_1, l_2, n_1, n_2 étant des nombres entiers positifs, et $l_1 > 1$, $l_2 > 1$.

En posant de nouveau

$$z_1 - a_1 = w_1, \quad z_2 - a_2 = w_2,$$

on aura, à l'instar des équations (1) du § III,

$$(2)\qquad \begin{cases} f(z_1) = c_{11} w_1^{r_{11}} g_1(w_1) + c_{12} w_1^{r_{12}} g_2(w_1), \\ \varphi(z_1) = c_{21} w_1^{r_{11}} g_1(w_1) + c_{22} w_1^{r_{12}} g_2(w_1), \\ f(z_2) = e_{11} w_2^{r_{21}} h_1(w_2) + e_{12} w_2^{r_{22}} h_2(w_2), \\ \varphi(z_2) = e_{21} w_2^{r_{21}} h_1(w_2) + e_{22} w_2^{r_{22}} h_2(w_2), \end{cases}$$

où $c_{11}, \ldots, c_{22}$, $e_{11}, \ldots, e_{22}$ sont des constantes, et $g_1(w_1)$, $g_2(w_1)$, $h_1(w_2)$, $h_2(w_2)$ des fonctions holomorphes au voisinage de $w_1 = 0$ ou de $w_2 = 0$, et qui ne s'annulent pas pour $w_1 = 0$ ou pour $w_2 = 0$. Δ prend maintenant la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} \Delta = w_1^{r_{11}} w_2^{r_{21}} G_{11}(w_1, w_2) + w_1^{r_{11}} w_2^{r_{22}} G_{12}(w_1, w_2) \\ \quad + w_1^{r_{12}} w_2^{r_{21}} G_{21}(w_1, w_2) + w_1^{r_{12}} w_2^{r_{22}} G_{22}(w_1, w_2), \end{cases}$$

où $G_{ik}(w_1, w_2)$ sont des fonctions holomorphes de w_1, w_2 aux environs de $w_1 = 0$, $w_2 = 0$.

Maintenant

$$G_{11}(0, 0) = (c_{11} e_{21} - e_{11} c_{21}) g_1(0) h_1(0)$$

est différent de zéro, car autrement l'équation (F) serait satisfaite par $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$, contrairement à notre supposition.

Il suit de là que $\Delta w_1^{-r_{11}} w_2^{-r_{21}}$ est fini et différent de zéro pour $w_1 = 0$, $w_2 = 0$.

En substituant dans les équations (E)

$$z_1 - a_1 = t_1^{n_1}, \quad z_2 - a_2 = t \;,$$

on reconnaît que $\frac{\partial t_1}{\partial u_1}$, $\frac{\partial t_1}{\partial u_2}$, $\frac{\partial t_2}{\partial u_1}$, $\frac{\partial t_2}{\partial u_2}$ sont des fonctions holomorphes de t_1, t_2 aux environs de $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, d'où il résulte que t_1, t_2, et par conséquent z_1, z_2, sont des fonctions holomorphes de u_1, u_2 aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$.

Soient ρ_1, ρ_2 les racines de l'équation fondamentale déterminatrice qui correspond à $z = \infty$ pour l'équation (A), et posons

$$\rho_1 = \frac{s_1}{n}, \quad \rho_2 = \frac{s_2}{n},$$

où s_1, s_2, n sont des nombres positifs entiers et tels que $s_2 > s_1 > n$ (*voir* § II).

Nous supposerons maintenant que

$$s_1 = n + 1. \tag{4}$$

Sous le bénéfice de cette supposition, on démontrerait, comme dans les cas du précédent et du présent paragraphe, que z_1, z_2 demeurent uniforme, même dans le voisinage de valeurs de u_1, u_2 pour lesquelles z_1 devient infini et z_2 vient à coïncider avec un point a singulier de l'équation (A), ou bien non singulier, tant que l'équation (F) n'est pas satisfaite pour $z_1 = \infty$, $z_2 = a$.

En joignant les résultats de ces deux derniers paragraphes, on obtient la proposition :

Lorsque pour tout point singulier de l'équation (A) *les racines* r_1, r_2 *de l'équation fondamentale déterminatrice correspondante sont de la forme*

$$r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad r_2 = -1 + \frac{l}{n} \tag{G}$$

(n *et* l *étant des nombres positifs entiers*, $l > 1$), *tandis que les* *racines ρ_1, ρ_2 de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $z = \infty$ sont de la forme*

$$\text{(G')} \qquad \rho_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad \rho_2 = 1 + \frac{l}{n}$$

(n *et* l *étant des nombres positifs entiers,* $l > 1$), *les fonctions* z_1, z_2 *seront des fonctions uniformes de* u_1, u_2 *aux environs de toutes les valeurs de ces variables, pour lesquelles* z_1, z_2 *ne viennent pas à coïncider avec des points satisfaisant à l'équation* (F).

V.

Soient $f(z)$, $\varphi(z)$ deux intégrales arbitraires de l'équation (A). On aura, aux environs d'un point singulier a,

$$f(z) = c_{11}(z-a)^{r_1} g_1(z) + c_{12}(z-a)^{r_2} g_2(z),$$
$$\varphi(z) = c_{21}(z-a)^{r_1} g_1(z) + c_{22}(z-a)^{r_2} g_2(z),$$

où r_1, r_2 ($r_2 > r_1$) sont les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à a, $c_{11}, \ldots, c_{22}$ des constantes différentes de zéro, et $g_1(z)$, $g_2(z)$ des fonctions holomorphes aux environs de a et telles que $g_1(a)$, $g_2(a)$ soient différents de zéro.

Il sera supposé constamment dans le présent travail que *le développement d'une intégrale de l'équation* (A) *aux environs d'un point singulier ou du point à l'infini ne contient pas de logarithme.*

Si l'on pose

$$\text{(H)} \qquad \zeta = \frac{f(z)}{\varphi(z)},$$

on aura, pour $z = a$, $\zeta = \dfrac{c_{11}}{c_{21}}$, qui sera ainsi fini et différent de zéro. On voit de même que, pour $z = \infty$, ζ sera aussi fini et différent de zéro.

Définissons maintenant, d'après l'équation (H), z comme fonction de ζ.

Supposons qu'à une valeur arbitraire ζ_0 de ζ corresponde une valeur z_0 de z. En partant de ce couple de valeurs, on peut poursuivre la fonction z sur le plan des ζ, ce qui s'effectue à l'aide de l'équation

$$\text{(J)} \qquad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{\varphi(z)^2}{F(z)},$$

à laquelle z satisfait (*voir* mon Mémoire, t. 66 du *Journal de Borchardt*, p. 128), et dans laquelle

$$F(z) = Ce^{-\int P\,dz}.$$

La quantité C a une valeur constante et déterminée si $f(z)$, $\varphi(z)$ désignent des solutions déterminées des équations (A).

Les valeurs de ζ pour lesquelles z peut cesser d'être holomorphe sont, en dehors de $\zeta = \infty$, les valeurs de cette variable pour lesquelles z coïncide avec un point singulier de l'équation (A) ou bien devient infini.

Supposons d'abord que, pour $\zeta = \zeta_1$, z coïncide avec un point singulier a de l'équation (A), et soient r_1, r_2 les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à a, racines qui satisfont aux conditions (G).

On a (*voir* mon Mémoire, t. 66 du *Journal de Borchardt*, p. 143), aux environs de a,

$$F(z) = (z-a)^{r_1+r_2-1}\eta(z),$$

où $\eta(z)$ est une fonction holomorphe aux environs de a et différente de zéro pour $z = a$.

Si maintenant on a d'abord

$$(2) \qquad r_2 = r_1 + 1,$$

il résulte de l'équation (J) que z est holomorphe aux environs de $\zeta = \zeta_1$; mais, si l'équation (2) n'a pas lieu, en substituant dans l'équation (J)

$$z - a = t^2,$$

on obtient

$$(3) \qquad n\frac{dt}{d\zeta} = t^{2-l}\frac{\psi(t)}{\eta(t)},$$

où $\psi(t)$, $\eta(t)$ sont holomorphes aux environs de $t = 0$, et dont le quotient ne devient ni nul ni défini pour $t = 0$.

En prenant dans ce cas

$$(4) \qquad l = 2,$$

il résulte de l'équation (3) que t et par conséquent z sont holomorphes dans le voisinage de $\zeta = \zeta_1$.

Supposons en second lieu que, pour $\zeta = \zeta_2$, z devienne infini, et soient ρ_1, ρ_2 les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $z = \infty$, racines qui satisfont aux relations (G').

On a, pour les environs de $z = \infty$,

$$(5) \qquad \begin{cases} f(z) = \gamma_{11}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{\rho_1} h_1\left(\dfrac{1}{z}\right) + \gamma_{12}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{\rho_2} h_2\left(\dfrac{1}{z}\right), \\ \varphi(z) = \gamma_{21}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{\rho_1} h_1\left(\dfrac{1}{z}\right) + \gamma_{22}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{\rho_2} h_2\left(\dfrac{1}{z}\right), \\ F(z) = \left(\dfrac{1}{z}\right)^{\rho_1+\rho_2+1} \eta_1\left(\dfrac{1}{z}\right), \end{cases}$$

où $h_1\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $h_2\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $\eta_1\left(\dfrac{1}{z}\right)$ sont des fonctions holomorphes aux environs de $z = \infty$ et ne s'annulent pas pour $z = \infty$. Les constantes $\gamma_{11}, \ldots \gamma_{22}$ sont de même différentes de zéro, puisque $f(z)$, $\varphi(z)$ sont des solutions arbitraires de l'équation (A).

Si l'on a de nouveau

$$(6) \qquad \rho_2 = \rho_1 + 1,$$

il résulte immédiatement de l'équation (J) que z est uniforme aux environs de $\zeta = \zeta_2$; mais, si l'équation (6) n'est point remplie, en substituant dans (J)

$$z = t^{-n},$$

on obtient

$$(7) \qquad -n\frac{df}{d\zeta} = t^{2-l}\frac{\psi_1(t)}{\eta_1(t)},$$

où $\psi_1(t), \eta_1(t)$ sont des fonctions holomorphes aux environs de $t = 0$ et ne s'annulent pas pour $t = 0$.

En prenant de nouveau dans ce cas

$$(8) \qquad l = 2,$$

il se trouve que t et par conséquent z sont uniformes aux environs de $\zeta = \zeta_2$.

Supposons en dernier lieu que, pour $\zeta = \infty$, on ait $z = b$, b n'étant, d'après la remarque faite au commencement de ce numéro, ni un point singulier de l'équation (A) ni infini. Pour $z = b$, on aura cependant $\varphi(z) = 0$.

Soient, aux environs de b,

$$(9)\qquad \begin{cases} f(z) = a_0 + a_1(z-b) + \ldots, \\ \varphi(z) = a'_1(z-b) + \ldots. \end{cases}$$

On obtient de là

$$(10)\qquad (z-b)\frac{[a'_1 + a'_2(z-b) + \ldots]}{a_0 + a_1(z-b) + \ldots} = \frac{1}{\zeta}.$$

Comme maintenant $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne s'annulent pas simultanément, puisque b n'est pas un point singulier de l'équation (A), il s'ensuit que a_0 est différent de zéro. De même a'_1 ne peut pas être nul, car autrement il résulterait de l'équation (A) que $\varphi(z)$ est identiquement nul. L'équation (10) reçoit donc la forme

$$(10^a)\qquad \alpha_1(z-b) + \alpha_2(z-b)^2 + \ldots = \frac{1}{\zeta},$$

où $\alpha_1 = \frac{a'_1}{a_0}$ est fini et différent de zéro. Il résulte de cette équation, comme on sait, que z est une fonction holomorphe de $\frac{1}{\zeta}$ aux environs de $\zeta = \infty$.

De ce qui précède on obtient la proposition :

I. *Si les quantités r_1, r_2 correspondant à tout point singulier remplissent les conditions*

$$(\mathrm{K})\qquad r_1 = -1 + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad r_2 = r_1 + 1 \quad \text{ou} \quad r_2 = -1 + \frac{2}{n},$$

et que les quantités ρ_1, ρ_2 correspondant à l'infini remplissent les conditions

$$(\mathrm{K}')\qquad \rho_1 = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \rho_1 + 1 \quad \text{ou} \quad \rho_2 = 1 + \frac{2}{n},$$

la fonction z de ζ définie par l'équation (H) *sera méromorphe pour toutes les valeurs de ζ.*

Une conséquence immédiate de cette proposition est exprimée par le corollaire :

La fonction $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ *n'admet pas une même valeur pour diverses valeurs de z.*

Supposons maintenant que, *dans le cas où l'équation* (2) *ou l'équation* (6) *se trouve remplie, il arrive respectivement que le dénominateur de* r_1 *ou de* ρ_1 *soit égal à* 2.

Alors la fonction F(z) *sera aussi une fonction uniforme de* ζ.

Soit d'abord $\zeta = \zeta'$ une valeur pour laquelle z ne coïncide pas avec un point singulier de l'équation (A) ni avec le point à l'infini : il est évident que F(z) est uniforme aux environs de $\zeta = \zeta'$.

Soit maintenant $\zeta = \zeta_1$ une valeur pour laquelle z coïncide avec un point singulier a. On aura, d'après ce qui précède,

$$F(z) = (z-a)^{r_1+r_2-1}\eta(z),$$

où $\eta(z)$ est une fonction holomorphe aux environs de $z = a$ et différente de zéro pour $z = a$.

Si l'équation (2) a lieu, on aura, d'après notre supposition,

$$r_1 + r_2 - 1 = 2r_1 = \text{un nombre entier},$$

et par conséquent F(z), de même que z, sera uniforme aux environs de $\zeta = \zeta_1$.

Si au contraire c'est l'équation (4) qui a lieu, on aura

$$r_2 + r_1 - 1 = -3 + \frac{3}{n}.$$

On a ainsi

$$F(z) = t^{3-3n}\eta(a+t^n).$$

D'après ce qui précède, t et par conséquent F(z) sont uniformes aux environs de $\zeta = \zeta_1$.

On reconnaîtrait de la même manière que F(z) est uniforme aux environs d'une valeur de ζ pour laquelle z devient infini.

Nous avons déjà démontré que z est une fonction uniforme de ζ; la même chose a donc lieu pour la dérivée $\dfrac{dz}{d\zeta}$. Puisque maintenant $\frac{dz}{d\zeta}$, ainsi que $F(z)$, est une fonction uniforme de ζ, il s'ensuit de l'équation (J) que $\varphi(z)^2$ et de même $f(z)^2$ sont des fonctions uniformes de ζ.

On obtient ainsi la proposition suivante :

II. *Lorsque les conditions* (K), (K′) *subissent la restriction que le dénominateur de r_1 ou de ρ_1 soit égal au nombre* 2 *dans le cas où $r_2 = r_1 + 1$ ou $\rho_2 = \rho_1 + 1$, les fonctions* $\varphi(z)^2$ et $f(z)^2$ *sont également des fonctions uniformes de z.*

VI.

Il résulte du numéro précédent que, lorsque les variables indépendantes u_1, u_2 atteignent dans les équations (B) des valeurs pour lesquelles z_1, z_2 satisfont à l'équation (F), *on doit avoir nécessairement* $z_1 = z_2$ dès que les équations (K), (K′) sont remplies.

Conformément à cela, soit, pour $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$, $z_1 = z_2 = b$.

Si l'on admet ici les suppositions de la proposition II du paragraphe précédent, il s'ensuit, d'après cette proposition, que les équations

$$(1) \qquad f(z_2) = \pm f(z_1), \quad \varphi(z_2) = \pm \varphi(z_1),$$

où les signes se correspondent, ont lieu simultanément.

Distinguons maintenant trois cas :

1° b n'est pas un point singulier de (A). Soient, aux environs de $z_1 = b$,

$$(2) \qquad \begin{cases} f(z_1) = a_0 + a_1(z_1 - b) + a_2(z_1 - b)^2 + \ldots, \\ \varphi(z_1) = c_0 + c_1(z_1 - b) + c_2(z_1 - b)^2 + \ldots; \end{cases}$$

on aura, d'après les équations (1),

$$(2^a) \qquad \begin{cases} \pm f(z_2) = a_0 + a_1(z_1 - b) + a_2(z_1 - b)^2 + \ldots = f'(z_2), \\ \pm \varphi(z_2) = c_0 + c_1(z_1 - b) + c_2(z_1 - b)^2 + \ldots = \varphi'(z_2), \end{cases}$$

où les signes se correspondent.

Les équations (E) deviennent alors

$$(\mathrm{E}^a)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta' dz_1 &= \varphi'(z_2)\,du_1 - f'(z_2)\,du_2,\\ \pm\Delta' dz_2 &= -\varphi''(z_1)\,du_1 + f(z_1)\,du_2,\end{aligned}\right.$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} f(z_1) & f'(z_2)\\ \varphi(z_1) & \varphi'(z_2)\end{vmatrix}.$$

Si nous posons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} (z_1-b) \pm (z_2-b) &= w_1,\\ (z_1-b)^2 \pm (z_2-b)^2 &= w_2,\end{aligned}\right.$$

où les signes se correspondent, il viendra des équations (E^a)

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta' dw_1 &= [\varphi'(z_2) - \varphi(z_1)]\,du_1 - [f'(z_2) - f(z_1)]\,du_2,\\ \Delta' dw_2 &= 2[(z_1-b)\,\varphi'(z_2) - (z_2-b)\,\varphi(z_1)]\,du_1\\ &\quad - 2[(z_1-b)\,f'(z_2) - (z_2-b)\,f(z_1)]\,du_2.\end{aligned}\right.$$

En effectuant sur Δ' les substitutions indiquées par les équations (2) et (2^a), on reconnait que Δ' est divisible par $(z_2-b)-(z_1-b)$. Les termes du quotient sont des fonctions entières, homogènes et symétriques de z_1-b, z_2-b, et la valeur de ce quotient pour $z_1=b, z_2=b$ est $a_0c_1-a_1c_0$, qui n'est point nul, puisque $f(z)$, $\varphi(z)$ forment un système fondamental de solutions de (A).

Les coefficients de du_1, du_2 dans les équations (4) sont également divisibles par $(z_2-b)-(z_1-b)$, et les quotients correspondants sont des fonctions entières, homogènes et symétriques de z_1-b, z_2-b.

On obtient ainsi des équations (4), pour $\dfrac{\partial w_1}{\partial u_1}$, $\dfrac{\partial w_2}{\partial u_1}$, $\dfrac{\partial w_1}{\partial u_2}$, $\dfrac{\partial w_2}{\partial u_2}$ des expressions qui dépendent rationnellement de w_1, w_2 et qui ne deviennent pas infinies pour $u_1=v_1$, $u_2=v_2$. Les fonctions w_1, w_2 sont par conséquent des fonctions uniformes de u_1, u_2 aux environs de $u_1=v_1$, $u_2=v_2$.

Si dans les équations (3) on a à prendre les signes inférieurs, il se trouve que z_1-b et z_2-b, et par conséquent z_1 et z_2, sont des fonctions uniformes de u_1, u_2 au voisinage de $u_1=v_1$, $u_2=v_2$.

Si au contraire il faut prendre dans les équations (3) les signes supérieurs, il résulte que z_1+z_2 et z_1z_2 représentent des fonctions uniformes au même voisinage.

2° b coïncide avec un point singulier de l'équation (A). Soient

r_1, r_2 les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à b, et soit, conformément aux propositions I, II du paragraphe précédent,

$$(5) \qquad r_1 = -1 + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad r_2 = -1 + \frac{2}{n} \quad \text{ou} \quad r_2 = r_1 + 1,$$

avec la condition $n = 2$ pour ce dernier cas.

Posons, dans les équations (E),

$$z_1 - b = t, \quad z_2 - b = t^n;$$

on a alors

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} f(z_1) &= t_1^{1-n}\left[c_{11} g_1(t_1^n) + c_{12} t_1^{\varepsilon n+1-\varepsilon} g_2(t_1^n)\right], \\ \varphi(z_1) &= t_1^{1-n}\left[c_{21} g_1(t_1^n) + c_{22} t_1^{\varepsilon n+1-\varepsilon} g_2(t_1^n)\right], \\ \pm f(z_2) &= t_2^{1-n}\left[c_{11} g_1(t_2^n) + c_{12} t_2^{\varepsilon n+1-\varepsilon} g_2(t_2^n)\right] = f'(z_2), \\ \pm \varphi(z_2) &= t_2^{1-n}\left[c_{21} g_1(t_2^n) + c_{22} t_2^{\varepsilon n+1-\varepsilon} g_2(t_2^n)\right] = \varphi'(z_2), \end{aligned} \right.$$

où $c_{11}, \ldots, c_{22}$ sont des constantes arbitraires, $g_1(t^n)$, $g_2(t^n)$ des fonctions holomorphes de t^n aux environs de $t = 0$ et qui ne s'annulent pas pour $t = 0$, et où ε est égal à 0 ou à 1 suivant que l'on a

$$r_2 = -1 + \frac{2}{n} \quad \text{ou} \quad r_2 = r_1 + 1,$$

c'est-à-dire

$$r_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2 = +\tfrac{1}{2}.$$

Posant de nouveau

$$\Delta' = \begin{vmatrix} f(z_1) & f'(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi'(z_2) \end{vmatrix},$$

on obtient des équations (6)

$$(6^a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta' = {} & (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \\ & \times t_1^{1-n} t_2^{1-n}\left[t_2^{\varepsilon n+1-\varepsilon} g_1(t_1^n) g_2(t_2^n) - t_1^{\varepsilon n+1-\varepsilon} g_2(t_1^n) g_1(t_2^n)\right]. \end{aligned} \right.$$

L'expression $\Delta t_1^{n-1} t_2^{n-1}$ est divisible par $t_2^2 - t_1^2$ ou par $t_2 - t_1$ suivant que l'on a

$$\varepsilon = 1 \quad \text{ou} \quad \varepsilon = 0.$$

La valeur du quotient pour $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ est égale à

$$(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) g_1(0) g_2(0),$$

qui est différent de zéro, puisque $f(z)$, $\varphi(z)$ forment un système fondamental de solutions de (A) et puisque $g_1(0)$, $g_2(0)$ ne s'annulent pas.

En posant

$$f(z_1)t_1^{n-1} = f_1(t_1), \quad \varphi(z_1)t_1^{n-1} = \varphi_1(t_1),$$
$$f'(z_2)\, t_2^{n-1} = f_1(t_2), \quad \varphi'(z_2)t^{n-1} = \varphi_1(t_2),$$

les équations (E) deviennent

$$(\mathrm{E}^b) \qquad \left\{ \begin{aligned} n\Delta' t_1^{n-1} t_2^{n-1}\, dt_1 &= \varphi_1(t_2)\,du_1 - f_1(t_2)\,du_2, \\ \pm n\Delta' t_1^{n-1} t_2^{n-1}\, dt_2 &= -\varphi_1(t_1)\,du_1 + f_1(t_1)\,du_2. \end{aligned} \right.$$

Si l'on a maintenant $\varepsilon = 0$, on déduit des équations (E^b), comme on l'a déjà fait dans le cas 1° pour $z_1 - b$, $z_2 - b$ au moyen des équations (E^a), que les quantités t_1, t_2 mêmes, ou bien les $t_1 + t_2$, $t_1 t_2$, et par conséquent aussi les quantités $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, sont des fonctions uniformes de u_1, u_2 aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$.

Soit, en second lieu,

$$\varepsilon = 1.$$

Posons, suivant que les équations (E^b) doivent être prises avec les signes supérieurs ou inférieurs,

$$t_1 \pm t_2 = w_1, \quad t_1^3 \pm t_2^3 = w_2.$$

Les équations (E^b) donnent alors

$$n\Delta' t_1^{n-1} t_2^{n-1}\, dw_1 = [\varphi_1(t_2) - \varphi_1(t_1)]\,du_1 - [f_1(t_2) - f_1(t_1)]\,du_2,$$
$$\begin{aligned} n\Delta' t_1^{n-1} t_2^{n-1}\, dw_2 = {} & 3[t_1^2 \varphi_1(t_2) - t_2^2 \varphi_1(t_1)]\,du_1 \\ & - 3[t_1^2 f_2(t_2) - t_2^2 f_1(t_1)]\,du_2. \end{aligned}$$

Les coefficients de ces équations sont divisibles par $t_2^2 - t_1^2$. Les quotients correspondants se composent de termes qui sont des fonctions rationnelles, homogènes et symétriques de t_1^2, t_2^2. On a, en outre,

$$3t_1 t_2 = \pm\left(w_1^2 - \frac{w_2}{w_1}\right).$$

On déduit de là que $\dfrac{\partial w_1}{\partial u_1}$, $\dfrac{\partial w_1}{\partial u_2}$, $\dfrac{\partial w_2}{\partial u_1}$, $\dfrac{\partial w_2}{\partial u_2}$ sont des expressions formées rationnellement avec w_1, w_2 et qui ne deviennent pas infinies pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, d'où il s'ensuit que w_1, w_2, et par conséquent $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$, sont des fonctions uniformes de u_1, u_2 aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$.

3° $b = \infty$. Soient ρ_1, ρ_2 les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $z = \infty$, et soit, conformément aux propositions I, II du numéro précédent,

$$(5^a) \qquad \rho_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad \rho_2 = 1 + \frac{2}{n} \quad \text{ou} \quad \rho_1 = \tfrac{3}{2}, \quad \rho_2 = \tfrac{5}{2}.$$

Posons, dans l'équation (A),

$$\frac{1}{z} = \xi, \quad y = \xi^2 \eta;$$

alors

$$\frac{f(z)}{\xi^2} = f'(\xi),$$

$$\frac{\varphi(z)}{\xi^2} = \varphi'(\xi)$$

constituent un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle entre η et ξ. Le point $\xi = 0$ est un point singulier pour cette équation, et les quantités

$$(5^b) \qquad \sigma_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad \sigma_2 = -1 + \frac{2}{n} \quad \text{ou} \quad \sigma_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \sigma_2 = +\tfrac{1}{2}$$

sont les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $\xi = 0$.

Pourtant, en posant

$$\frac{1}{z_1} = \xi_1, \quad \frac{1}{z_2} = \xi_2,$$

on tire des équations (B)

$$(\text{E}') \qquad \begin{cases} f'(\xi_1)\,d\xi_1 + f'(\xi_2)\,d\xi_2 = du_1, \\ \varphi'(\xi_1)\,d\xi_1 + \varphi'(\xi_2)\,d\xi_2 = du_2. \end{cases}$$

Il résulte maintenant de ces équations, comme dans le cas 2°, que $\xi_1 + \xi_2$ et $\xi_1 \xi_2$ sont des fonctions uniformes de u_1, u_2 aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$.

Par conséquent, la même propriété appartient à $z_1 + z_2$ et $z_1 z$

En résumant ce qui précède, on obtient la proposition suivante :

Si les racines r_1, r_2 de toute équation fondamentale déterminatrice correspondant aux divers points singuliers de l'équation (A) *sont telles que l'on ait*

$$r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad r_2 = -1 + \frac{2}{n}$$

ou bien

$$r_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2 = -\tfrac{1}{2},$$

et si pour les racines ρ_1, ρ_2 de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $z = \infty$ on a soit

$$\rho_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad \rho_2 = 1 + \frac{2}{n},$$

soit

$$\rho_1 = \tfrac{3}{2}, \quad \rho_1 = \tfrac{5}{2},$$

les fonctions $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ définies par les équations (B) *sont racines d'une équation quadratique dont les coefficients sont des fonctions uniformes de u_1, u_2.*

VII.

D'après mon Mémoire (t. LXVI, p. 145 du *Journal de Borchardt*, on a

$$(1) \qquad \Sigma(r_1 + r_2) + \rho_1 + \rho_2 = A - 1,$$

en désignant par A le nombre des points singuliers de l'équation (A).

Si maintenant A' est le nombre des points singuliers pour lesquels les équations fondamentales déterminatrices ont les racines $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, et A' le nombre des autres points singuliers, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad 3\sum \frac{1}{n_i} + \rho_1 + \rho_2 = A' + 3A'' - 1,$$

où la somme se rapporte aux dénominateurs des racines des équations fondamentales qui correspondent aux points singuliers de la seconde espèce. Mais, comme

$$\rho_1 + \rho_2 \leqq 5,$$

$$3\sum \frac{1}{n_i} \leqq \frac{3A'}{2},$$

l'équation (2) donne

$$(3) \qquad \tfrac{3}{2}A'' + A' \leqq 6 \quad \text{ou} \quad A + \tfrac{1}{2}A' \leqq 6.$$

Il s'ensuit de là que :

Le nombre des points singuliers de l'équation (A) *n'est pas supérieur à six.*

VIII.

Voici un exemple pour le cas $A = 6$.

Si l'on a pour chacun des six points singuliers

$$r_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2 = +\tfrac{1}{2},$$

l'équation (A), d'après mon Mémoire (t. LXXXI du *Journal de Borchardt*), sera satisfaite par la racine carrée d'une fonction rationnelle.

Or, comme il faut que dans les développements relatifs aux environs d'un point singulier ou du point à l'infini n'entrent pas de logarithmes, il s'ensuit qu'il y a une seconde racine carrée d'une fonction rationnelle satisfaisant à l'équation (A) et constituant avec la première un système fondamental.

Si l'on représente par $a_1, a_2, \ldots, a_6$ les points singuliers, et que l'on pose

$$(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_6) = \varphi(z),$$

le système fondamental a la forme

$$y_1 = \frac{g(z)}{\sqrt{\varphi(z)}}, \quad y_2 = \frac{h(z)}{\sqrt{\varphi(z)}},$$

où $g(z)$, $h(z)$ désignent des fonctions rationnelles entières.

Comme dans le cas actuel on a

$$\rho_1 = 2, \quad \rho_2 = 3,$$

il s'ensuit que $g(z)$, $h(z)$ ne peuvent pas être d'un degré supérieur au premier. Dans l'exemple actuel, les fonctions $F_1(u_1, u_2)$,

$F_2(u_1, u_2)$ fournissent donc les fonctions hyperelliptiques du premier ordre.

IX.

Le fait qu'en général les équations différentielles (A) ici caractérisées n'admettent pas des intégrales algébriques, et que par conséquent *les fonctions* $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ *sont différentes des fonctions abéliennes*, peut être montré par l'exemple suivant.

Soient $A = 2$ et a_1, a_2 les deux points singuliers de l'équation (A), et soient

$$r_{11} = -\tfrac{2}{3}, \quad r_{12} = -\tfrac{1}{3}$$

les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à a_1, de même

$$r_{21} = -\tfrac{5}{6}, \quad r_{22} = -\tfrac{4}{6}$$

les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à a_2 et

$$\rho_1 = \tfrac{3}{2}, \quad \rho_2 = 2$$

les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $z = \infty$.

En substituant, pour ce cas, dans l'équation (A),

$$y = (z - a_1)^{-1}(z - a_2)^{-\frac{5}{4}} w,$$

les racines des équations fondamentales déterminatrices correspondant respectivement à

$$a_1, \qquad a_2, \qquad \infty$$

sont

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \quad -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4};$$

par conséquent, l'équation en w a la forme

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = P w, \tag{1}$$

P étant une fonction rationnelle de z.

D'après mon Mémoire (t. LXXXI du *Journal de Borchardt*, p. 135), cette équation différentielle, comme les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à a_2 sont plus grandes que 10, n'est pas intégrable algébriquement tant que chacune de ses intégrales ou une fonction quadratique homogène de ses intégrales n'est pas égale à la racine d'une fonction rationnelle.

Puisque maintenant les dénominateurs des racines des équations fondamentales déterminatrices correspondant aux points singuliers a_1, a_2 sont différents des nombres 1, 2, 4, la seule possibilité restante, d'après le même Mémoire (p. 136), est que l'équation (1) soit complètement intégrable par des racines de fonctions rationnelles.

Ce qui cependant n'a pas lieu.

En effet, toute racine w d'une fonction rationnelle de z, satisfaisant à l'équation (1), devrait avoir la forme

$$w = \psi(z)(z - a_1)^{\alpha_1}(z - a_2)^{\alpha_2},$$

où $\psi(z)$ serait une fonction rationnelle entière de z, ne s'annulant pas pour $z = a_1$ ni pour $z = a_2$, et où de plus α_1 aurait une des valeurs $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ et α_2 une des valeurs $\frac{5}{12}, \frac{7}{12}$. Le degré μ de $\psi(z)$ devrait aussi satisfaire à la condition

$$\mu + \alpha_1 + \alpha_2 = \tfrac{3}{4} \text{ ou } \tfrac{1}{4}.$$

Cependant la seule fonction répondant à ces diverses restrictions est

$$w = (z - a_1)^{\frac{1}{2}}(z - a_2)^{\frac{5}{12}},$$

à l'exclusion de toute autre racine d'une fonction rationnelle

L'équation (1) ne peut donc être intégrée complètement par des fonctions algébriques, et par conséquent l'équation (A) *non plus.*

Ajoutons, pour conclusion, la remarque suivante :

Si l'on pose, comme dans l'équation (H),

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = v, \tag{1}$$

z est, d'après la proposition I du § V, une fonction uniforme de v; mais, d'après la proposition II du même paragraphe, $f(z)^2$ et $\varphi(z)^2$ sont aussi des fonctions uniformes de v.

Posant donc

$$z = \chi(v), \tag{2}$$

on a la proposition suivante :

Les équations (β) *peuvent, au moyen des substitutions uniformes, mais en général non rationnelles,*

$$z_1 = \chi(v_1), \quad z_2 = \chi(v_2),$$

être mises sous la forme

$$(\mathrm{L}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\eta_1}^{v_1} \sqrt{g(v)}\,dv + \int_{\eta_2}^{v_2} \sqrt{g(v)}\,dv = u_1, \\ &\int_{\eta_1}^{v_1} v\sqrt{g(v)}\,dv + \int_{\eta_2}^{v_2} v\sqrt{g(v)}\,dv = u_2, \end{aligned} \right.$$

où l'on a

$$\zeta_1 = \chi(\eta_1), \quad \zeta_2 = \chi(\eta_2),$$

et où $g(v)$ *est une fonction uniforme, en général non rationnelle, de* v.

Heidelberg, le 14 fevrier 1880.