Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Aristide Marre

Deux nouvelles lettres mathématiques inédites du P. Jaquèmet, de l'Oratoire, de la Maison de Vienne (Dauphiné)

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 200-207

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_200_1>

© Gauthier-Villars, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

MÉLANGES.

DEUX NOUVELLES LETTRES MATHÉMATIQUES INÉDITES DU P. JAQUÈMET, DE L'ORATOIRE, DE LA MAISON DE VIENNE (DAUPHINÉ);

Publiées par ARISTIDE MARRE.

I.

Lors quune equation na pas alternativement + et — dans tous ses termes ou ce qui est la mesme chose lors quelle na pas + dans tous ses termes impairs et — dans tous ses termes pairs, on demande une méthode generale pour pouvoir luy donner cette forme. Pour cela 1° je remarque quune equation ayant cette suite alternative des signes + et — dans tous ses termes, si on augmente chacune de ses racines d'une grandeur positive quelconque, lequation transformée qui en proviendra, aura encore la mesme suite alternative des signes + et — dans tous ses termes comme il est évident par loperation mesme etc. Cela posé 2° soit lequation

$$
\mathbf{F} \quad x^{\iota} + n.x^{\iota-1} - \varepsilon n^2 x^{\iota-2} + \varepsilon^2 n^3.x^{\iota-3} - \varepsilon^3 n^4.x^{\iota-4} + \varepsilon^4 n^5.x^{\iota-5} - \varepsilon^5 n^6.x^{\iota-6} \ldots,
$$

laquelle a la disposition la plus opposée à celle qu'on demande, puisqu'excepté le premier terme, elle a + partout ou elle devroit avoir —, et — ou elle devroit avoir + ; 3° je remarque que lequation F est le produit de $x + \varepsilon n$ par lequation

$$
\mathbf{C} \quad x^{\iota-1} - \frac{\varepsilon - 1}{1}\varepsilon^0 n x^{\iota-2} + \frac{\varepsilon - 2}{1} - \varepsilon^1 n^2 x^{\iota-3} - \frac{\varepsilon - 3}{1}\varepsilon^2 n^3 x^{\iota-4} + \frac{\varepsilon - 4}{1}\varepsilon^3 n^4 x^{\iota-5} \ldots,
$$

dans laquelle la disposition des signes est telle qu'on la demande, et par consequent que les racines de lequation F sont lune la grandeur negative $-\varepsilon n$ et les autres les mesmes que celles de l'equation C. Cela estant 4° si on augmente chaque racine de lequation F de la grandeur positive $+\varepsilon n$ on aura lequation transformée B dont les racines seront l'une $-\varepsilon n + \varepsilon n = 0$ et les autres les mesmes que celles de lequation C augmentées chacune de la grandeur positive $+\varepsilon n$, 5° or je dis que cette equation B aura la suite alternative des signes que lon demande excepté au dernier de ses termes qui sera zero, car par 1° et 3° sup. si on augmente chacune des racines de lequation C de la grandeur positive $+\varepsilon n$, on aura une equation G dont tous les termes auront alternativement $+$ et $-$, mais multipliant lequation G par son inconnue $+$ ou $-$ zero ou simplement par son inconnue, ce qui ne change rien à la suite des signes, on aura une equation dont tous les termes auront alternativement $+$ et $-$ excepté le dernier terme qui sera zero, et cette equation sera lequation B par 4° sup. puisque ses racines sont lune zero et les autres les mesmes que celles de lequation C augmentées chacune de la grandeùr positive $+\varepsilon n$ donc etc. 6° On peut voir dans Schooten sur le troisième livre de la geometrie de M. Descartes lettre H [1] la manière de se servir de l'equation F

---

[1] Si l'on compare la lettre du P. Jaquemet au passage de Schooten auquel il renvoie son correspondant, on est conduit à la proposition suivante :

Considérons une équation algébrique

$$(F) \qquad x^n + \ldots - A_p x^{n-p} + \ldots - A_q x^{n-q} + \ldots = 0,$$

dont nous n'écrivons que les termes négatifs. Pour trouver une limite supérieure des racines positives de cette équation, comparons-la à la suivante,

$$(A) \qquad x^n - \alpha x^{n-1} - n\alpha^2 x^{n-2} - n^2\alpha^3 x^{n-3} - \ldots = 0,$$

qui n'a qu'une racine positive dont la valeur est $n\alpha$. Tout nombre supérieur à $n\alpha$ rendra le premier membre de (A) positif, et il rendra aussi le premier membre de (F) positif si l'on a

$$A_p \leqq n^{p-1}\alpha^p, \quad A_q \leqq n^{q-1}\alpha^q, \quad \ldots.$$

Si donc on considère les quantités

$$n\sqrt[p]{\frac{A_p}{n^{p-1}}} = \sqrt[p]{nA_p}, \quad \sqrt[q]{nA_q}, \quad \ldots,$$

comme dune regle ou dune formule pour connoitre quelle doit être la valeur de n dans la grandeur positive $+\varepsilon n$ dont il faut augmenter chaque racine dune equation afin quelle ayt la suite des signes + et — dans tous ses termes. 7° On pourroit prendre lequation

$$\Phi \quad x^{\varepsilon}+nx^{\varepsilon-1}-\frac{\varepsilon-1}{1}\times\frac{\varepsilon+2}{2}n^2x^{\varepsilon-2}$$

$$+\frac{\varepsilon-1}{1}\times\frac{\varepsilon-2}{2}\times\frac{2\varepsilon+3}{3}n^3x^{\varepsilon-3}$$

$$-\frac{\varepsilon-1}{1}\times\frac{\varepsilon-2}{2}\times\frac{\varepsilon-3}{3}+\frac{3\varepsilon-4}{4}n^4x^{\varepsilon-4}$$

$$+\frac{\varepsilon-1}{1}\times\frac{\varepsilon-2}{2}\times\frac{\varepsilon-3}{3}\times\frac{\varepsilon-4}{4}\times\frac{4\varepsilon-5}{5}n^5x^{\varepsilon-5}\ldots,$$

laquelle est le produit de $x+\varepsilon n$ par lequation H $\overline{x-\varepsilon n}^{\,\varepsilon-1}$ et sen servir comme dune regle ou dune formule comme de lequation F. 8° Si on compare ensemble ces deux formules on verra que dans l'une et dans lautre les premiers et deuxièmes termes sont les mesmes, que depuis le troisième degré lequation Φ a le troisieme terme plus grand mais les termes suivans plus petits que lequation F, dou lon peut connoitre que lon ne doit se servir de la formule Φ que lorsque la plus grande valeur de n est donnée par le troisieme terme soit par exemple P $x^3+2x^2-170x+360=0$. Par la formule F on aura 1° $n=2$, 2° $3n^2=170$ et n entre 7 et 8, 3° $9n^3=360$ et n entre 3 et 4, ce qui donne 8 pour la plus grande

---

la plus grande de ces quantités sera une limite supérieure des racines positives de l'équation (F).

Cette règle est semblable à celles que l'on attribue à Maclaurin. Dans les deux cas, le nombre que l'on détermine dépend exclusivement de la valeur et de la place des coefficients négatifs, et il est supérieur au plus petit nombre qui rendrait positif le premier membre de l'équation auxiliaire

$$x^n-A_px^{n-p}-A_qx^{n-q}-\ldots=0,$$

et par conséquent aussi le premier membre de l'équation proposée.

Le P. Jaquemet, au lieu de chercher une limite supérieure des racines positives, détermine une limite inférieure des racines negatives; mais on sait que l'un de ces problèmes est équivalent à l'autre. G. D.

valeur de n. Par la formule Φ on aura 1° $n = 2$, 2° $5n^2 = 170$ et n entre 5 et 6, 3° $3n^3 = 360$ et n entre 4 et 5, ce qui donne 6 pour la plus grande valeur de n. Ainsi la grandeur $+ \varepsilon n$ seroit 24 par la formule F et elle n'est que 18 par la formule Φ ce qui est un peu plus simple, mais comme il n'y a que le troisième terme seul qui soit avantageux à la formule Φ on peut dire que généralement parlant la formule F est la plus simple. 9° Ayant P $x^3 + 2x^2 - 170x + 360 = 0$ si a x on substitue $\overline{170 + 1} - y$ on aura une transformée dont les racines positives seront les negatives de P, et les negatives les positives de P augmentées chacune de $+ 171$ et dont tous les termes auront alternativement $+$ et $-$; et si on avoit

$$\text{P} \quad x^3 - 2x^2 - 170x - 360 = 0$$

il faudroit par cette méthode substituer a x $\overline{360 + 1} - y$ ou au moins $\overline{170 + 2 + 1} - y$, au lieu que dans lun et lautre cas il ne faut substituer a x que $y - 3 \times 8$ ou mesme $y - 3 \times 6$ ce qui est bien plus simple. 10° M. Descartes dans le cas particulier de la formule F pour le sixième degré demande une autre condition qui est que le coefficient du troisième terme soit plus grand que le quarré de la moitié de celuy du second, ceste condition se trouve tousjours remplie dans la transformée de lequation B et par conséquent dans celle de lequation P pourvu 1° que la valeur de ε soit au moins 3, et 2° que le coefficient du second terme de P nayt point le signe $-$ car pour lors elle peut netre point remplie. Soit par exemple P $x^3 - 18x^2 - 12x - 360 = 0$. La seule valeur de n et par conséquent la plus grande est $n = 2$ que donne $3n^2 = 12$. On a donc $\varepsilon n = 3 \times 2 = 6$, et dans la transformée de P le coefficient du troisième terme est $312 < \frac{1}{4}\overline{36}^2$ quarré de la moitié de celuy du second. Mais ayant une equation dont tous les termes ont alternativement $+$ et $-$, comme A $x^t - nx^{t-1} + px^{t-2} - \ldots$ si $\frac{1}{4}n^2 > p$ pour avoir une transformée ou $p > \frac{1}{4}n^2$ il n'y a qua augmenter les racines de A chacune de la grandeur positive $+ \frac{n}{\varepsilon}$ cela suffira tousjours depuis le troisième degré inclus car on aura pn^2 pour quarré de la moitié du coefficient du second terme, et $\frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2\varepsilon}n^2 + p$ pour coefficient du troisième terme ce qui est plus grand que n^2.

Je vous souhaitte les bonnes festes et la bonne année, souvenez-vous de la cheminée (1).

II.

Je viens de recevoir votre lettre mon tres cher ami, je vous suis obligé de ce que vous me mandez du Mans jescriray au p. — suivant ce que vous me mandez, jescriray aussi à Lion pour sçavoir quand la loterie se tirera, je vous remercie de la cheminée etc. je lentend a peu pres mais japprehende que les massons de ce pais ne lentendent pas assez pour lexecuter, si on en fait imprimer la description, vous aurez la bonté de me l'envoyer. Vous me remerciez de mes lumieres mais elles sont si tenebreuses dans votre lettre que je ne les reconnois point, elles supposent dites vous le calcul différentiel quon ne peut point rendre facile a concevoir sans figures et sans geometrie, je crois vous avoir desja mandé que ce quelles supposent de ce calcul na besoin ni de figure ni de geometrie pour etre facilement entendu il me sera aisé de vous le faire voir quand vous le souhaiterez, il s'agit de trouver les limites des racines des equations mesmes ou les racines sont incommensurables, et dont les differences peuvent etre si petites que lon voudra, il faut donc, quelque methode dont vous vous serviez, que vous alliez jusquaux differences indefiniment petites, or cela me suffit. Mais vous ne voyez point dites vous que les racines de B soient celles de A augmentées ou diminuées de la differentielle de chaque racine de A, je ne le vois

---

(1) Cette lettre a pour suscription :

Au Reverend Pere

Le Reverend pere Reyneau
pretre de loratoire rue du
louvre

à Paris.

Le P. Reyneau, né à Brissac (Anjou), en 1656, mort en 1728, auteur de l'*Analyse démontrée*, 2 vol. in-4°, et des *Éléments de Mathématiques*, 2 vol. in-4°, professait les Mathématiques à Angers. Il se trouvait alors à Paris, à la maison de l'Oratoire de la rue du Louvre, qu'habitaient les PP. Malebranche et Bizance. Voir, dans le *Bullettino di Bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche* du prince Balthazar Boncompagni, t. XII, p. 886-894, une autre Lettre autographe du P. Jaquemet au P. Bizance, datée de Vienne, 26 janvier 1690, et la Notice consacrée à ces deux mathematiciens de l'Oratoire par Aristide Marre. A. M.

point non plus, mais je vois ce me semble quelles sont les racines de A augmentées ou diminuées d'un multiple de la differentielle de chaque racine de A, cela me paroit fort different. Vous ajoutez que vous ne trouvez point que la racine qui reste dans A et qui nest pas dans B soit moyenne entre la plus petite des positives et la plus grande des negatives de B, vous trouvez au contraire que si elle est positive elle doit surpasser toutes les positives, et si elle est negative elle doit surpasser toutes les negatives. Ces paroles « la racine qui reste dans A et qui nest pas dans B » font apparemment votre difficulté, mais ces paroles sont elles de moy ? je suis au moins tres assuré que ce nest point ce que jay voulu dire, mais le voicy : soit

$$\text{A} \quad x^4 - 44x^3 + 432x^2 + 2288x \pm q = 0,$$

$$\text{B} \quad x^3 - 33x^2 + 216x + 572 = 0.$$

Les racines de B sont $-2, +13, +22$ or cela estant je dis 1° que deux racines de A sont necessairement positives l'une plus grande ou au moins egale a $+22$, lautre plus grande ou au moins egale a $+13$, 2° quune racine de A est necessairement negative et quelle est ou plus petite ou au moins egale a -2, 3° qu'il reste encore ou qu'il y a encore une racine de A qui doit etre moyenne entre -2 et $+13$ ou egale ou à -2 ou à $+1,3$, et que cette derniere racine a ne considerer que lequation B peut etre ou positive ou negative, mais quelle est positive ou negative selon que q aura le signe ou $-$ ou $+$ respectivement, et quelle sera zero si q est zero, voila surement ce que javois dit mais ce nest point ce que vous me faite dire. Javois dit, sil men souvient bien, « la racine reelle quil y a de plus dans A que dans B », mais cela veut dire seulement que dans A il y a une racine réelle de plus que dans B ce qui me paroit incontestable. Il me seroit aisé dajouter « le a plus forte raison » sur ce quil y a des imaginaires dans une equation dont le deuxième terme manque et dont le troisième a $+$ mais cela est inutile, vous en avez une autre raison et je vous remercie de me lavoir communiquée, je passe à la formule de M. Descartes laquelle ne vous paroit point generale. Vous voyez bien dites vous quelle aura son effet dans toutes les equations representées par celle qui sert de formule mais les coefficients de cette formule étant des puissances exactes dune mesme grandeur ont des limites, et ainsi la formule ne represente pas toutes les equations possibles dans chaque degré. Voilà votre difficulté, mais cette difficulté sera levée si vous voulez bien remarquer 1° que $\overline{y - 6n}^{6} = x^5$ (voyez M. Descartes pag. 79) a dans tous ses termes la suite alternative des signes telle quon la demande, 2° que $+ n \times \overline{y - 6n}^{4}$, $- 6n^2 \times \overline{y - 6n}^{2}$, etc. ont chacun dans tous leurs termes des signes opposez a ceux qu'on demande, 3° que dans chacun des termes de la transformée le signe de $\overline{y - 6n}^{6}$, qui est celuy quon demande subsiste et reste apres la soustraction des coefficients qui ont un signe opposé, 4° dou il sensuit qua plus forte raison ces signes de $\overline{y - 6n}^{6}$ subsisteroient dans la transformée si dans la formule un ou plusieurs ou mesme tous les coefficients etoient plus petits quon ne les suppose, ou bien encore à plus forte raison si un ou plusieurs ou tous les coefficients de la formule etoient zéro, ou bien encore à plus forte raison si un ou plusieurs de ces coefficients avoient un signe opposé à celuy quon leur suppose dans la formule, car alors leurs signes seroient favorables au lieu d'etre contraires, mais 5° cest ce qui arrive dans la maniere dont on se sert de cette formule pag. 274. 1° On y neglige les termes de la proposée qui ont des signes differens de ceux de la formule, et cela parce que ces signes sont favorables au lieu detre contraires. 2° On y prend la plus grande des valeurs de n données par la comparaison des autres termes et pour lors $\overline{y - 6n}^{6}$ suffiroit pour donner la suite alternative des signes à la proposée quand mesmes tous ses termes auroient les mesmes signes et les mesmes grandeurs proportionelles que ceux de la formule, donc a plus forte raison etc. On peut appliquer la mesme preuve à l'autre formule etc. Je vous escrivis dimanche passé une lettre dans laquelle je vous mande une difficulté sur ces paroles de votre livre pag. 69 lig. 12 « comme on le suppose. » Je scais bien quon suppose que dans la proposée les imaginaires ne paroissent point, mais je ne vois point quil soit clair que dans toute equation ou il y aura au moins quatre imaginaires on puisse tousjours trouver une equation de second degré, formée par quelques deux imaginaires, dans le second terme de laquelle les imaginaires disparoitront, on le pourra dans plusieurs cas mais il faut faire voir que cela se peut tousjours, et cest ce qui me paroit difficile a prouver, au lieu que ce quon veut prouver par la, se prouve bien plus facilement sans cela, Je suis etc. Mes respects sil vous plait au R. P. Malebranche (1).