BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 193-200
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_193_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HABICH (E.-J.). — ÉTUDES CINÉMATIQUES. Paris, Gauthier-Villars, 1879. In-8°, 95 pages.

Sous ce titre M. Habich vient de publier trois Mémoires, dont le premier est relatif au principe des aires, le second à la courbe de poursuite et le troisième aux accélérations d'un ordre quelconque dans le mouvement d'une figure plane dans son plan. Le sujet du premier Mémoire est d'étudier les droites qui, en accompagnant un point dans son mouvement, décrivent des aires proportionnelles aux temps entre la trajectoire et leurs enveloppes respectives, et de démontrer que l'accélération ne peut coïncider avec une de ces droites que dans le cas où elle passe par un centre fixe. On pourrait arriver, comme l'indique M. Habich, à ces résultats en partant du théorème fondamental très simple que *le point de contact avec son enveloppe d'une droite perpendiculaire au rayon de courbure de la trajectoire et tracée par le point dont la distance à la trajectoire est inversement proportionnelle à la vitesse se trouve sur la direction correspondante de l'accélération.*

Dans son étude, que M. Habich étend aux trajectoires quelconques, il emploie des coordonnées particulières, auxquelles il donne le nom de *tangentielles polaires,* et qui sont une généralisation des coordonnées polaires ordinaires, généralisation qui consiste à supposer que le rayon vecteur, au lieu de passer constamment par un centre fixe, reste tangent à une courbe donnée.

Le second Mémoire, relatif à la *courbe de poursuite,* a pour objet de donner une solution générale de cette question, à quoi se prêtent exceptionnellement les coordonnées de M. Habich.

La question est de *déterminer les relations qui doivent exister entre les trajectoires parcourues par deux mobiles dont les vitesses et les angles de relèvement sont liés, à chaque instant du mouvement, par des relations connues.*

Par l'angle de relèvement, terme de marine, on comprend l'angle formé par la droite qui unit les deux mobiles avec la direction de leurs vitesses.

M. Habich fait voir que la question revient, dans le système tangentiel polaire, à la transformation définie par les deux relations

$$F_1\left(\frac{n}{n_1}, \mu, \mu_1\right) = 0,$$

$$F_2\left(\frac{n}{n_1}, \mu, \mu_1\right) = 0,$$

où n et n_1 sont les longueurs des normales, et μ et μ_1 les angles de relèvement ou leurs compléments.

Le cas de la courbe de poursuite ordinairement considéré est comprs dans la forme particulière

$$F_1\left(\frac{n}{n_1}, \mu\right) = 0, \quad \mu_1 = \frac{\pi}{2}.$$

M. Habich donne plusieurs applications et étudie, en outre, la *courbe du chien* d'une manière plus générale et différente de ce qu'on fait; il donne le moyen de trouver son équation entre le rayon de courbure et l'angle de déviation.

Parmi les diverses questions traitées dans cette étude, nous remarquerons particulièrement le théorème qui a pour objet de déterminer le point de contact avec son enveloppe d'une droite qui coupe deux courbes données sous des angles μ et μ_1, liés par une relation quelconque

$$f(\mu, \mu_1) = 0.$$

En posant

$$\frac{df}{d\mu_1} : \frac{df}{d\mu} = a,$$

nous énoncerons, d'après M. Habich, le théorème suivant :

Pour avoir le point de contact d'une droite mobile MM_1 *qui rencontre deux courbes* (T) *et* (T_1) (*leurs normales*) *sous des angles liés par une relation quelconque, on abaissera du centre de courbure* K_1 *de la courbe* (T_1) *une perpendiculaire* K_1P *sur la droite* MM_1 *et on la prolongera de manière à rencontrer en* H *la droite tracée par le point* M_1 *parallèlement à la normale en* M *à la courbe* (T). *Portant maintenant à partir du pied* P *de la perpendiculaire, dans le sens* PH *ou en sens opposé, suivant que* $a \lessgtr 0$, *une longueur* $PI = a.PH$, *on déterminera un point* I *tel* *que la droite qui le réunit avec le centre de courbure* K *de la ligne* (T) *rencontre la droite mobile* MM_1 *au point de contact cherché.*

L'auteur donne de ce théorème une démonstration géométrique très simple et l'applique à plusieurs cas particuliers.

Le troisième et dernier Mémoire a pour objet l'étude des accélérations des divers ordres dans le mouvement d'une figure plane dans son plan.

Comme introduction, M. Habich étudie les conditions de l'équilibre et du mouvement d'un point M soumis à l'action des forces proportionnelles aux distances aux centres fixes et inclinées sur ces droites d'un angle constant. Il démontre que la question de l'équilibre se ramène à considérer le point M comme soumis uniquement à deux forces proportionnelles aux distances à deux centres particuliers Ω_r et Ω_p, et dirigées la première suivant $M\Omega_r$ et la seconde perpendiculairement à $M\Omega_p$, et que par suite le centre de l'équilibre Ω se trouve sur la circonférence tracée sur $\Omega_r\Omega_p$ comme diamètre, etc. Dans l'étude du mouvement, qui se réduit à celui qui serait produit sous l'action d'une force proportionnelle à ΩM et inclinée d'un angle constant sur cette droite, sont compris comme cas particuliers tous ceux qui se produisent sous l'action des attractions et répulsions proportionnelles aux distances aux centres.

A la fin de l'étude, M. Habich ajoute des observations sur le cas général du mouvement d'un point soumis à une force quelconque, mais qui forme un angle constant avec le rayon vecteur partant du pôle. Il étudie avec beaucoup de détails la spirale logarithmique, qui est une solution particulière (intégrale particulière), dans le cas où la force est proportionnelle à une puissance quelconque de sa distance au centre.

Passant à la question du mouvement d'une figure plane dans son plan, qui revient au roulement d'une certaine courbe (C'_1) du plan mobile sur une courbe (C) du plan fixe, M. Habich commence par le cas simple du mouvement que M. Resal appelle *géométrique* et qui est caractérisé par la vitesse angulaire constante. Dans ce cas, les positions des centres instantanés des accélérations ne dépendent que des relations géométriques, des rayons de courbure successifs, des lignes (C_1) et (C'_1) correspondant au point de contact, et, par conséquent, ces centres persistent dans leurs positions, quelle que soit la relation de l'angle de rotation avec le temps, si les courbes (C_1) et (C'_1) et leurs positions relatives restent les mêmes.

Passant maintenant au cas général où la vitesse angulaire est variable avec le temps, M. Habich démontre que l'accélération d'un ordre quelconque d'un point M de la figure mobile dépend de la position des centres instantanés du mouvement géométrique et de la relation qui lie l'angle de rotation avec le temps, et il résume cette dépendance comme il suit :

L'accélération de l'ordre n d'un point M *de la figure mobile est la résultante de n composantes relatives aux centres instantanés géométriques jusqu'à l'ordre n inclusivement, ces composantes étant proportionnelles aux distances du point* M *à ces centres, et leur direction perpendiculaire ou parallèle à ces droites suivant que le centre est d'ordre impair ou pair.*

Par ce théorème, la question des accélérations se trouve ramenée à celle des forces, étudiée dans l'Introduction.

Comme application, M. Habich considère les accélérations ordinaires (du second ordre) et donne comme exemple spécial le mouvement conchoïdal.

Nous citerons ici le cas particulier du mouvement d'une droite qui représenterait le rayon vecteur d'une courbe et qui satisferait dans son mouvement au principe des aires. M. Habich arrive dans ce cas à une nouvelle expression de l'accélération centrale,

$$j = 4C^4\frac{l^2}{r^5},$$

où C est la vitesse aréolaire constante, r le rayon vecteur et l la longueur de la tangente menée du point mobile M à un cercle particulier. Ce dernier a pour diamètre la longueur de la normale polaire de la courbe lieu de l'extrémité N de la sous-normale de la trajectoire, prise sur la direction de la normale, mais symétriquement par rapport au point N.

En terminant ce résumé de la publication de M. Habich, nous exprimons le regret que ces intéressantes et originales études n'aient pas été revues sur les épreuves par leur auteur et ainsi n'aient pu échapper à certaines erreurs de détail qui ne se rencontrent pas dans les originaux espagnols ([1]).

MASCHKE. — Ueber ein dreifach orthogonales Flächensystem gebildet aus Flächen dritter Ordnung. Inaugural-Dissertation. Goettingen, 1880.

Dans le Tome 82 du *Journal de Borchardt*, M. A. Wangerin s'est occupé du système, connu depuis longtemps, formé de cyclides homofocales. Il en a découvert une propriété nouvelle et fort importante en prouvant que l'on peut obtenir une infinité de solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

de la forme $\mathrm{N}f(\rho)f_1(\rho_1)f_2(\rho_2)$, où ρ, ρ_1, ρ_2 sont les paramètres des trois familles de surfaces, où N désigne une fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, et où $f(\rho), f_1(\rho_1), f_2(\rho_2)$ sont trois fonctions devant satisfaire à des équations linéaires du second ordre qui contiennent une même constante arbitraire. M. Darboux, après avoir vérifié ce résultat par une méthode qui lui est propre, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, s'est proposé de rechercher tous les systèmes orthogonaux jouissant d'une propriété analogue, et il a vu que ces systèmes devaient avoir comme première propriété que la distance de deux points infiniment voisins fût donnée par une expression de la forme

$$ds^2 = \frac{1}{\mathrm{M}^2}(\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 d\rho^2 + \mathrm{S}\mathrm{S}_2 d\rho_1^2 + \mathrm{S}\mathrm{S}_1 d\rho_2^2),$$

où S_i désigne une fonction ne dépendant pas de la variable ρ_i. En d'autres termes, le système triple orthogonal devait être composé *exclusivement* de surfaces susceptibles d'être divisées en carrés infi-

([1]) Nous apprenons par M. Gauthier-Villars que l'auteur a envoyé un erratum qui sera joint, et qu'il se propose de continuer la publication de ses etudes cinématiques.

niment petits par leurs lignes de courbure. Or, dans un beau Mémoire inséré au *Journal de Liouville* en 1844 (t. IX, p. 124), M. Bertrand avait reconnu que cette propriété géométrique appartient nécessairement à tous les systèmes isothermes, ce qui avait conduit, en 1866, M. Darboux à rechercher tous les systèmes orthogonaux formés de surfaces pouvant être découpées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. Le beau théorème de M. A. Wangerin donnant encore plus d'intérêt à la question que s'était proposée M. Darboux, ce géomètre a repris en 1878 sa première solution restée incomplète, et nous avons indiqué (1) les résultats qu'il a obtenus.

Dans sa Dissertation inaugurale, M. Maschke s'est proposé l'étude géométrique de l'un des systèmes trouvés par M. Darboux, celui pour lequel la distance de deux points infiniment voisins est donnée par la formule

$$ds^2 = \frac{1}{M^2}\left[\frac{(\rho_1-\rho_2)^2 d\rho^2}{m\rho^2+n\rho+p} + \frac{(\rho_2-\rho)^2 d\rho_1^2}{m_1\rho_1^2+n_1\rho_1+p_1} + \frac{(\rho-\rho_1)^2 d\rho_2^2}{m_2\rho_2^2+n_2\rho_2+p_2}\right],$$

les constantes $m, n, p, \ldots$ satisfaisant aux conditions

$$m + m_1 + m_2 = 0,$$
$$n + n_1 + n_2 = 0,$$
$$p + p_1 + p_2 = 0.$$

La marche suivie par l'auteur est synthétique; il remarque que l'on connaît déjà un système triple orthogonal formé de surfaces à lignes de courbure plane, et que dans ce système, dont on doit la connaissance à M. Darboux, les trois quantités H, H_1, H_2 de Lamé ont pour expressions

$$H = -\frac{R'}{\sqrt{\rho}} + \frac{R+R_1+R_2}{(\rho+\rho_1+\rho_2)\sqrt{\rho}},$$
$$H_1 = -\frac{R'_1}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{R+R_1+R_2}{(\rho+\rho_1+\rho_2)\sqrt{\rho_1}},$$
$$H_2 = -\frac{R'_2}{\sqrt{\rho_2}} + \frac{R+R_1+R_2}{(\rho+\rho_1+\rho_2)\sqrt{\rho_2}},$$

(1) *Bulletin*, III_2, 224 et suiv.

où R_i désigne une fonction de ρ_i, tandis que les coordonnées rectangulaires sont données par les formules

$$x = -\frac{R + R_1 + R_2}{\rho + \rho_1 + \rho_2} 2\sqrt{\rho} + \int \frac{R' d\rho}{\sqrt{\rho}},$$

$$y = -\frac{R + R_1 + R_2}{\rho + \rho_1 + \rho_2} 2\sqrt{\rho_1} + \int \frac{R'_1 d\rho_1}{\sqrt{\rho_1}},$$

$$z = -\frac{R + R_1 + R_2}{\rho + \rho_1 + \rho_2} 2\sqrt{\rho_2} + \int \frac{R'_2 d\rho_2}{\sqrt{\rho_2}},$$

et il se propose de chercher si l'on ne peut pas disposer des fonctions R, R_1, R_2 de telle manière que ce système formé de surfaces à lignes de courbure planes devienne identique à celui qu'il s'agit d'étudier. Cette recherche est couronnée de succès, et l'auteur obtient ainsi tous les éléments nécessaires pour étudier le système triple orthogonal en question; cette méthode est tout à fait différente de celle qui a été suivie par M. Darboux dans son Mémoire.

Après avoir obtenu toutes les formules nécessaires, M. Maschke étudie les propriétés géométriques; il montre que le système orthogonal est identique à celui qui a été étudié par M. W. Roberts (*Journal de Crelle*, t. 62) et dont l'existence résulte du théorème suivant :

Si l'on mène d'un point déterminé de l'un des axes d'un système de surfaces homofocales du second degré des plans tangents à ces surfaces, le lieu des points de contact est une cyclide de Dupin du troisième degré. Si le point décrit l'axe, on obtient une famille de cyclides. Les trois familles correspondantes aux trois axes se coupent à angle droit.

Ce théorème remarquable a déjà été l'objet des études de différents géomètres, et il a été établi géométriquement par M. A. Picard dans les *Nouvelles Annales*.

L'auteur fait ensuite connaître quelques propriétés géométriques, et il recherche, en terminant, si le système jouit d'une propriété analogue à celle qui a été signalée par M. A. Wangerin pour le système des cyclides générales. Il arrive à cette conclusion qu'il y a seulement huit fonctions de la forme

$$N f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2)$$

satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles du potentiel.