BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 161-171
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_161_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FESTSKRIFTER, udgivne af det mathematisk-naturvidenskabelige Fakultet ved Kjöbenhavns Universitet i Anledning af Universitetets Firehundredeaarsfest, Juni 1879. — Kjöbenhavn, Gyldendalske Boghandels Forlag, 1879. In-8° (¹).

Nous n'analysons ici que les trois Mémoires mathématiques et astronomiques.

STEEN (ADOLPHE). — DEN ELASTISKE KURVE OG DENS ANVENDELSE I BÖJNINGSTHEORIEN (²).

C'est un seul point de la théorie de la flexion qui a provoqué cette recherche. Il n'est point clair si un prisme mince qui est fléchi par une pression peut prendre en réalité, dans les cas où l'axe n'est soutenu qu'en un ou deux points, toutes les positions à plusieurs points sur l'axe (ou à sinuosités) qu'indique la théorie. Avant de renvoyer cette question aux praticiens, il faut s'assurer que la théorie n'a contribué en rien au défaut de clarté. L'auteur fait à cet égard deux observations.

Premièrement, les cours techniques se bornent ordinairement à des résultats qu'on peut exprimer par des fonctions élémentaires. Pour cette raison, on introduit, dans l'intégration de l'équation différentielle de la courbe élastique, une approximation, plus tôt qu'il ne serait nécessaire si l'on voulait faire usage des premiers éléments de la théorie des intégrales elliptiques.

Ensuite, on se borne à une détermination incomplète des quantités constantes introduites par le calcul, et cette détermination est de la plus grande importance pour trouver le nombre possible de sinuosités.

Pour suppléer à ces lacunes, l'auteur commence par déterminer la pression longitudinale minimum qui donne naissance à une seule

---

(¹) *Mémoires publiés par la Faculté des Sciences à l'Université de Copenhague à la célébration du quatrième centenaire de la fondation de l'Université, en juin* 1879. Copenhague, librairie de Gyldendal, 1879.

(²) *La courbe élastique et son application à la théorie de la flexion.*

sinuosité d'un prisme perpendiculaire, et il montre qu'une pression capable de produire plusieurs sinuosités devrait être proportionnelle au carré de leur nombre. Or, une comparaison de la pression minimum qui fléchit le prisme au plus grand chargement que le matériel peut supporter donne au rapport de la hauteur du prisme et du rayon de gyration du moment d'inertie de la section transversale une valeur qui montre l'impossibilité de plusieurs sinuosités; en effet, le prisme devrait être si long, qu'il serait rompu au lieu d'être fléchi. Le rapport que nous venons d'indiquer doit être proportionnel au nombre des sinuosités.

Une application pratique ajoutée par l'auteur sert à montrer aux praticiens combien peu de difficulté présente l'usage de Tables d'intégrales elliptiques pour la solution de problèmes de ce genre.

THIELE (T.-N.). — CASTOR; CALCUL DU MOUVEMENT RELATIF, ET CRITIQUE DES OBSERVATIONS DE CETTE ÉTOILE DOUBLE. 46 pages (fr.).

L'avantage que l'on poursuit et que l'on obtient en faisant des mesures micrométriques repose sur ce fait, que les erreurs inévitables des mesures diminuent avec la distance entre les objets mesurés. Cette méthode, appliquée aux étoiles doubles, où les distances sont singulièrement petites, devrait donc, semble-t-il, donner des résultats d'une exactitude très grande, et rien, en effet, ne serait plus désirable pour l'étude des mouvements de ces intéressants systèmes de corps célestes. Mais cette attente est frustrée, car les erreurs dans les mesures de ces astres ne suivent pas la loi (exponentielle) des erreurs, et les écarts en sont tels, que c'est seulement dans d'étroites limites que l'on peut admettre que la moyenne des observations donne une approximation plus grande que les diverses mesures, de sorte que la méthode des moindres carrés cesse d'être applicable à la détermination des orbites des étoiles doubles.

L'étude de ces erreurs systématiques semble être tout aussi difficile qu'elle est indispensable, et le phénomène présente différentes phases qui doivent nécessairement être prises en considération avant qu'on puisse profiter pleinement de l'exactitude des mesures micrométriques.

D'un côté, c'est un fait depuis longtemps constaté, que des observateurs différents déduisent des résultats différents de leurs mesures du même astre, et quelques-uns d'entre eux, notamment M. O. Struve, ont reconnu qu'en réalité leurs propres mesures sont entachées des erreurs systématiques, et ont cherché, par des mesures d'étoiles doubles artificielles, à déterminer les corrections qu'il était nécessaire de faire subir aux observations ou à leur moyenne pour les rapprocher de la vérité objective.

D'un autre côté, l'auteur cherche à prouver, par l'exemple d'une étoile double qui a été observée très-souvent malgré son mouvement lent, que très souvent le même observateur mesure différemment à des époques différentes, sans qu'il soit possible d'assigner quelque cause extérieure à ce phénomène. Suivant son opinion, il sera nécessaire, dans les observations futures, de soumettre les erreurs systématiques à des épreuves fréquentes, et, quant aux anciennes, il est d'avis qu'il faut avant tout chercher à fixer les époques où les observateurs ont changé leur manière d'observer, afin de déterminer les périodes intermédiaires, en général sans doute courtes, pendant lesquelles les observations de chaque observateur peuvent être traitées par la méthode des moindres carrés et ramenées, par exemple, à des positions normales, en tant que le mouvement n'a pas été trop considérable. En se guidant sur ces principes, l'auteur fait la critique de toutes les observations de Castor à lui connues, pour donner une réponse provisoire aux questions suivantes : les erreurs systématiques ont-elles varié pour chaque observateur, et, dans ce cas, quand et de combien?

Pour ce qui regarde le mouvement même de Castor, il n'a pas été possible d'arriver à un résultat définitif. La lenteur de ce mouvement, qui a permis d'utiliser cette étoile double pour la critique des erreurs systématiques, est cause qu'il manque encore au moins une donnée pour la détermination des sept éléments de l'orbite. La durée de la révolution peut encore être choisie arbitrairement entre trois cent cinquante ans et un nombre infini d'années. L'auteur a adopté sept cent vingt ans; mais il va sans dire qu'il considère la détermination de l'orbite fondée sur cette hypothèse comme étant seulement analogue à une formule d'interpolation qui représenterait les résultats des observations.

ZEUTHEN (H.-G.). — Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit. 51 p. (¹).

Les surfaces du quatrième ordre à une conique double ont été étudiées par MM. Kummer, Clebsch, Geiser, Cremona, R. Sturm, et comme on peut déduire, par une transformation homographique, les propriétés des surfaces générales de celles des surfaces anallagmatiques, elles l'ont été aussi par MM. Moutard, Laguerre, Darboux et par plusieurs autres savants. L'auteur y est revenu en appliquant à l'étude des surfaces de nouveaux moyens, qui font ressortir très simplement les propriétés générales (c'est-à-dire celles où il n'est pas question de réalité) étudiées jusqu'à présent, et qui servent en même temps à résoudre les questions de réalité et à déterminer les formes des surfaces, ce qu'on n'avait fait que pour les surfaces anallagmatiques.

Dans la première Partie, il applique à l'étude des propriétés générales de la surface la circonstance que le contour apparent de la surface projetée d'un point de la conique double est une courbe générale du quatrième ordre. Les propriétés des vingt-huit tangentes doubles du contour montrent les faits connus, que la surface contient seize droites et que l'enveloppe des plans dont les courbes d'intersection sont composées de deux coniques se décompose en cinq cônes (les cônes kummériens). Les projections de ces coniques forment dix des soixante-trois systèmes de coniques tangentes quatre fois au contour. Une courbe de la surface aura en général pour projection une courbe tangente au contour sur tous les points où elle le rencontre.

Certaines courbes de la surface se présentent plus commodément lorsqu'on la projette du sommet d'un cône de Kummer. Alors le contour apparent sera composé de la trace du cône, prise deux fois, et d'une courbe du quatrième ordre à deux points doubles, tangente quatre fois à la trace. Cette représentation conduit, dans la deuxième Section, à la construction suivante de la surface (²).

(¹) *Sur les surfaces du quatrième ordre à une conique double.*

(²) Si, dans cette construction, δ_2 est une sphère au centre P, elle se réduira à celle qu'indique M. Darboux pour une surface anallagmatique, à la page 122 de son Ouvrage : *Sur une classe remarquable*, etc.

Soient T un point fixe, σ_2 et δ_2 deux surfaces du second ordre, et désignons par SS′ et DD′ les points d'intersection de ces surfaces avec une droite variable par T; déterminons ensuite deux couples de points de cette droite, (M_1, M_2) et (M'_1, M'_2), qui sont tous deux harmoniquement conjugués par rapport à DD′, tandis que l'un, (M_1, M_2), est harmoniquement conjugué par rapport à TS, et l'autre, $(M'_1 M'_2)$, harmoniquement conjugué par rapport à TS′. Alors le lieu des points M est une surface du quatrième ordre ayant pour conique double la ligne de contact de la surface δ_2 avec son cône circonscrit au sommet T, ayant le cône circonscrit à σ_2 au sommet T pour cône kummérien, et tangente le long de la courbe d'intersection de σ_2 et δ_2 à un cône au sommet T. Les sommets des quatre autres cônes kummériens sont les sommets des cônes du second ordre par la même courbe d'intersection. On obtient ainsi une représentation de la surface par une surface double du second ordre σ_2.

Dans les troisième et quatrième Sections, l'auteur s'occupe des questions de réalité et de forme, en y appliquant respectivement la projection d'un centre placé sur la conique double et la représentation par une surface double σ_2 que nous venons de nommer. Il fait usage alors de résultats trouvés antérieurement par lui-même et M. Crone sur la réalité des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre et des systèmes de coniques qui y sont quatre fois tangentes. Il trouve que les surfaces appartiennent à six formes distinctes. Dans leur énumération, que nous allons reproduire ici, l'auteur dit (avec M. Klein) qu'une nappe d'ordre pair θ a le type de point lorsqu'elle ne contient aucune branche de courbe d'ordre impair (exemple : l'ellipsoïde) et qu'elle a le type de droite lorsqu'elle en contient une infinité (exemple : l'hyperboloïde gauche), et il indique (avec MM. Schläfli et Klein) la connexion d'une nappe par le double du nombre de courbes fermées de la nappe qui ne la décomposent pas. Ne s'occupant que de propriétés projectives, il n'a pas égard à la décomposition d'une nappe par le plan à l'infini. Un cône (ou une conique) est appelé *réel*, lorsque son équation est réelle.

A. Surfaces à seize droites réelles, à cinq cônes kummériens réels et à dix systèmes réels de coniques planes, dont chacun contient quatre couples de droites réelles. Les surfaces ont une seule nappe du type de droite et de la connexion 6, qui se trouve au dehors de tous les cônes kummériens.

B. Surfaces à huit droites réelles, à trois cônes kummériens réels et à six systèmes réels de coniques, dont chacun contient deux couples de droites réelles. Les surfaces ont une seule nappe du type de droite et de la connexion 4, qui se trouve au dehors de tous les cônes kummériens.

C. Surfaces à quatre droites réelles, à un seul cône kummérien réel et à deux systèmes réels de coniques, dont l'un contient deux couples de droites réelles et deux couples de droites imaginaires conjuguées. Huit des droites imaginaires n'ont aucun point réel. Les surfaces ont une seule nappe du type de droite et de la connexion 2, qui se trouve au dehors du cône kummérien.

D. Surfaces sans aucune droite réelle, à cinq cônes kummériens réels et à six systèmes réels de coniques. Les droites n'ont aucun point réel. Les surfaces peuvent ou avoir une seule nappe du type de point et de la connexion 2, qui se trouve au dehors de trois des cônes kummériens, ou n'avoir aucune nappe réelle.

E. Surfaces sans aucune droite réelle, à cinq cônes kummériens réels et à deux systèmes réels de coniques, dont chacun contient quatre couples de droites imaginaires conjuguées. Les surfaces ont deux nappes du type de point et de la connexion 0, qui se trouvent au dehors d'un seul cône kummérien.

F. Surfaces sans aucune droite réelle, à trois cônes kummériens réels et à deux systèmes réels de coniques, dont chacun contient deux couples de droites imaginaires conjuguées. Les huit autres droites n'ont aucun point réel. Les surfaces ont une seule nappe du type de point et de la connexion 0, qui se trouve au dehors d'un seul cône kummérien.

H. Z.

BURNHAM (S.-W.). — DOUBLE STARS OBSERVATIONS MADE IN 1877-78 WITH THE 18 $\frac{1}{2}$ INCH REFRACTOR OF THE DEARBORN OBSERVATORY (Chicago). 1 vol. in-4°. London, 1880.

M. Burnham, qui s'occupe depuis plusieurs années, et avec un succès incontesté, de l'observation et de la recherche des étoiles doubles, public aujourd'hui une suite importante à ses précédentes recherches. Les observations consignées dans le Mémoire actuel n'ont point d'ailleurs été faites avec le 6 pouces de son observatoire particulier; par suite d'une circonstance heureuse, il a eu pour cette série de mesures la libre disposition du grand équatorial de $18\frac{1}{2}$ pouces ($0^m,470$) d'ouverture installé à l'Observatoire de Dearborn par les soins de la Société astronomique de Chicago.

Cet équatorial, construit, en 1864, aux frais de la Société astronomique de Chicago et de M. Y. Scammon, était jusqu'ici presque inutilisé, malgré son pouvoir optique remarquable qui lui permet de dédoubler des étoiles distantes de $0'',25$ seulement. Grâce à la singulière puissance de cet admirable instrument, M. Burnham a donc pu mesurer en 1877-78 des étoiles doubles dont la distance n'avait encore été qu'estimée, et il a ainsi recueilli des matériaux d'une valeur inestimable pour l'histoire des systèmes stellaires multiples.

Le Mémoire de M. Burnham comprend deux Parties.

La première est un Catalogue d'étoiles doubles récemment découvertes par lui-même ou par M. Alvan G. Clark; il fait suite aux Catalogues déjà publiés par l'auteur dans les *Monthly Notices* (t. XXXIII, XXXIV et XXXV), les *Astronomische Nachrichten* (nos 2062 et 2103), l'*American Journal of Science* (juillet 1877) et enfin les *Monthly Notices* (t. XXXVIII).

Les étoiles y sont numérotées de 483 à 734; parmi elles 75 systèmes ont une distance comprise entre $0''$ et $1''$ (plusieurs sont à une distance inférieure à $0'',3$) et 59 sont distantes de $1''$ à $2''$.

La seconde Partie du Mémoire de M. Burnham renferme les mesures micrométriques de 500 systèmes doubles déjà connus et autrefois observés par Herschel, W. Struve, O. Struve, etc., mais jusqu'ici rarement observés, en sorte qu'il y a de grandes incertitudes sur la nature réelle de leurs mouvements. G. R.

HARNACK (Ax.). — UEBER DIE DARSTELLUNG DER RAUMCURVE VIERTER ORDNUNG ERSTER SPECIES UND IHRES SECANTENSYSTEMS DURCH DOPPELT PERIODISCHE FUNCTIONEN (1). — Bemerkungen zur Geometrie auf der Linienflächen vierter Ordnung (2).

Dans le plan une courbe générale du troisième ordre, dans l'espace la courbe commune aux surfaces du second ordre qui appartiennent à un même faisceau, constituent les figures algébriques les plus simples qui puissent servir à la représentation uniforme des valeurs d'une intégrale elliptique.

Dans l'étude qu'il fait du second mode de représentation, M. Harnack prend pour point de départ l'expression différentielle

$$D = \frac{u_x v_{dx} - v_x u_{dx}}{a_x \alpha_x (a \alpha u v)},$$

où $a_x^2 = 0$, $\alpha_x^2 = 0$ sont les équations de deux surfaces du faisceau, en sorte que pour les points de la courbe on a

$$a_x a_{dx} = 0, \quad \alpha_x \alpha_{dx} = 0,$$

où $u_x = 0$, $v_x = 0$ sont les équations de deux plans.

En supposant que ces deux plans se coupent sur une sécante à la courbe, ou plus particulièrement sur une tangente, et en introduisant le paramètre du faisceau de plans qu'ils déterminent, on exprime la différentielle elliptique au moyen d'une seule variable indépendante. L'invariant absolu du faisceau de surfaces est aussi l'invariant de la différentielle.

Si l'on suppose maintenant que le faisceau de plans soit quelconque, il est nécessaire d'obtenir les quatre valeurs de la différentielle qui résultent de la rotation infiniment petite d'un plan autour d'une droite quelconque située sur lui. La résolution de ce problème, qui exige l'élimination entre trois formes quaternaires quadratiques et une forme linéaire, s'obtient, à proprement parler, sans calculs, en profitant de ce que l'on connaît le système complet des

(1) *Math. Ann.*, t. XII, p. 47-86.
(2) *Ibid.*, t. XIII, p. 49-52.

formes d'un faisceau de coniques et en s'aidant d'une méthode symbolique dans laquelle on représente une forme irréductible au moyen du produit de faisceaux linéaires distincts. Le résultat est une équation biquadratique dans laquelle le second terme manque et qui fournit une preuve du théorème d'Abel.

Pour étudier la distribution des valeurs de l'intégrale, en supposant que la limite inférieure corresponde à l'un des seize points où un plan rencontre la courbe en quatre points confondus, il convient de distinguer quatre cas :

1° La courbe a deux traits avec deux branches paires. Il y a une période réelle ($p = \omega$) et une période purement imaginaire ($p' = \omega'$); sur l'une des branches se distribuent toutes les valeurs comprises entre zéro et p. Sur l'autre, les mêmes valeurs augmentées de $\frac{p'}{2}$. A des points imaginaires conjugués correspondent des arguments imaginaires conjugués.

2° La courbe a deux traits avec deux branches impaires. Il y a encore une période réelle ($p = \omega$) et une période purement imaginaire ($p' = \omega'$). Aux points des deux branches correspondent des valeurs complexes du paramètre, dans lesquelles les parties imaginaires sont constantes; ces valeurs peuvent être obtenues en ajoutant pour une des branches $\frac{1}{8}p'$, pour l'autre $\frac{5}{8}p'$ à toutes les valeurs réelles possibles; les points imaginaires conjugués sont de la forme $\alpha + \frac{1}{8}p' + \beta i$, $\alpha + \frac{1}{8}p' - \beta i$.

3° La courbe a un seul trait avec une branche paire. Il y a une période réelle ($p = \omega$) et une période complexe de la forme $p' = \frac{\omega + \omega'}{2}$. Aux points de la branche réelle correspondent des arguments réels; aux points imaginaires conjugués correspondent des arguments imaginaires conjugués.

4° La courbe commune à toutes les surfaces du faisceau réel est complètement imaginaire. Il y a encore une période réelle et une période purement imaginaire. Les points imaginaires conjugués sont de la forme $\alpha + \beta i$ et $\alpha + \frac{p}{2} - \beta i$.

Ces résultats établis, on peut démêler entièrement toutes les propriétés relatives à la réalité ou à la non-réalité. En particulier, on obtient tous les théorèmes de M. Cremona sur la réalité du tétraèdre polaire relativement à ses faces et à ses arêtes, de même que les théorèmes sur les cent seize plans qui passent par quatre des seize points fondamentaux. La représentation du paramètre conduit en outre à une construction nouvelle de la courbe gauche, quand on donne deux systèmes correspondants de trois points, analogue à la construction de la courbe plane du troisième ordre quand on donne trois couples de points conjugués.

L'ensemble des sécantes de la courbe forme une infinité de surfaces réglées dont chacune s'obtient en établissant une relation entre les deux arguments qui correspondent à chaque sécante. La loi la plus simple consiste à prendre pour ces deux arguments u et $\pm u + C$, C étant une constante arbitraire comprise dans le parallélogramme des périodes : en prenant u et $-u+C$, on obtient un système de génératrices rectilignes d'une surface du second ordre; l'autre système de génératrices s'obtient en changeant le signe de la constante. Ce théorème a déjà été donné par M. Kölling (*Der Flächenbüschel zweiter Ordnung*, Dissert.; Berlin, 1878).

En prenant pour les deux arguments u et $+u \pm C$, on obtient des surfaces réglées dont les génératrices rencontrent le tétraèdre polaire en quatre points, dont le rapport anharmonique est constant. Cette surface peut donc être regardée comme l'intersection d'un complexe tétraédral de droites et du système de sécantes à la courbe gauche; elle a été étudiée par M. de la Gournerie (*Recherches sur les surfaces réglées*, Paris, 1867) (1) : c'est une surface quadricuspidale de huitième ordre et de huitième classe. Toutes les propriétés projectives, la position des quatre courbes doubles planes dans les faces du tétraèdre, la discussion de la réalité et de la non-réalité, se déduisent aisément de la représentation du paramètre. A ce système de surfaces appartiennent la surface développable et trois autres surfaces réglées du quatrième ordre, que l'on obtient en prenant l'intersection du système de sécantes de la courbe gauche et de la congruence de droites déterminée par deux arêtes opposées du tétraèdre polaire. Au moyen des valeurs du paramètre sur la courbe, on arrive directement à une représentation des génératrices de la surface qui con-

(1) Il y a lieu de rappeler aussi les belles recherches de M. Laguerre sur le même sujet insérées dans le *Journal de Liouville*, 2e série.

duit à une forme canonique pour l'étude, fondée sur la théorie des fonctions doublement périodiques, de la géométrie de ces surfaces d'espece $p = 1$. Dans son deuxième Mémoire, l'auteur traite brièvement de cette question et, finalement, porte ses recherches sur la figure la plus simple à une dimension, d'espèce $p = 1$.