BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 126-160
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_126_1>

MÉLANGES.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LES PERCUSSIONS ET LE CHOC DES CORPS;

PAR M. G. DARBOUX.

En 1874, j'ai présenté à l'Académie des Sciences les principaux résultats d'une étude sur le choc des corps (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1421, 1559, 1645, 1767); je me propose de reprendre ici cette étude, en développant plusieurs résultats qui n'avaient été qu'indiqués dans mes Communications antérieures et en ajoutant différentes propositions qui me paraissent nouvelles.

I. — DES PERCUSSIONS.

Considérons un point matériel de masse m, soumis à l'action de différentes forces. Soient x, y, z les coordonnées de ce point à l'instant t, v_x, v_y, v_z les composantes de la vitesse au même instant, X_i, Y_i, Z_i celles de l'une quelconque des forces qui agissent sur le point. On aura les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= X_1 + \ldots + X_n,\\ m\frac{dv_y}{dt} &= Y_1 + \ldots + Y_n,\\ m\frac{dv_z}{dt} &= Z_1 + \ldots + Z_n,\end{aligned}\right.$$

et, par conséquent, si l'on désigne par v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} les composantes de la vitesse du mobile à l'instant o, on aura

$$(2)\quad \begin{cases} mv_x - mv_{0x} = \int_0^t X_1\,dt + \ldots + \int_0^t X_n\,dt, \\ mv_y - mv_{0y} = \int_0^t Y_1\,dt + \ldots + \int_0^t Y_n\,dt, \\ mv_z - mv_{0z} = \int_0^t Z_1\,dt + \ldots + \int_0^t Z_n\,dt. \end{cases}$$

Ces équations peuvent s'interpréter de la manière suivante.

Appelons, avec différents auteurs, *impulsion* de la force **X, Y, Z** la quantité géométrique dont les composantes sont

$$\int_0^t X\,dt,\quad \int_0^t Y\,dt,\quad \int_0^t Z\,dt;$$

les équations (2) donneront lieu au théorème suivant :

L'accroissement géométrique de la quantité de mouvement du point matériel dans un intervalle de temps fini quelconque est égal à la somme géométrique des impulsions des forces qui agissent sur ce point pendant l'intervalle de temps considéré.

Il résulte de ce théorème que si des forces agissent sur un point matériel, et si l'on connaît *seulement* leurs impulsions dans un intervalle de temps donné, on pourra déterminer l'accroissement géométrique de la quantité de mouvement du point sur lequel elles agissent, et par conséquent, si l'on connaît la masse et la vitesse initiale du point, on obtiendra en grandeur et en direction la vitesse finale. Mais il importe de remarquer que *l'on n'aura aucune notion sur la position de ce mobile à l'instant final.*

Imaginons maintenant que l'intervalle de temps pendant lequel les forces agissent devienne de plus en plus petit, mais que les impulsions de quelques-unes des forces conservent une valeur finie, ce qui exige que ces forces deviennent de plus en plus grandes : le changement de vitesse se produira dans un intervalle de temps de plus en plus court, mais il sera toujours fini. D'ailleurs, si l'on suppose que les impulsions des forces relatives à tout intervalle de temps compris dans celui que nous considérons demeurent inférieures à des grandeurs fixes, les changements de vitesse du point matériel demeureront finis et le déplacement du point matériel deviendra de plus en plus petit quand l'intervalle de temps diminuera.

En effet, réduisons toutes les forces à une seule dont les composantes à l'instant θ soient X_θ, Y_θ, Z_θ, et considérons la projection du mouvement sur l'axe des x par exemple. On a

$$x - x_0 - v_{0x} t = \int_0^t d\theta \int_0^\theta X_\theta \, d\theta.$$

Nous supposons que l'impulsion $\int_0^\theta X_\theta \, d\theta$ demeure, quel que soit θ, inférieure à un nombre fixe M. On aura donc en valeur absolue

$$x - x_0 - v_{0x} t < \int_0^t M \, d\theta$$

ou

$$x - x_0 - v_{0x} t < M t,$$

et, par conséquent, $x - x_0$ diminuera quand l'intervalle de temps deviendra de plus en plus court [1].

[1] Nous introduisons, on le voit, une condition qui, d'habitude, n'est pas énoncée explicitement : c'est que l'impulsion de la force dans une partie quelconque de l'intervalle de temps considéré demeure inférieure à une grandeur fixe quand l'intervalle de temps diminue. Cette condition est toujours satisfaite dans les applications, car on n'y considère que des percussions dont la direction ne varie pas sensiblement pendant toute la durée de l'intervalle pendant lequel elles agissent. Par exemple, dans le choc de deux corps, la force qui s'exerce au point de contact sur l'un des corps ne peut agir que dans un sens déterminé, de manière à écarter les deux corps. Alors l'intégrale $\int_0^\theta X_\theta d\theta$ conserve son signe et ne cesse de croître; elle demeure donc inférieure à sa valeur finale, qui, par hypothèse, est finie.

Mais, si l'on se place à un point de vue exclusivement théorique, il est aisé de trouver des forces qui, dans un temps très court, imprimeront des changements finis ou même nuls de vitesse, tout en déplaçant le mobile d'une quantité finie. Considérons, par exemple, un point qui se meut en ligne droite et qui est soumis à l'action de la force dont l'expression à l'instant θ est

$$X_\theta = \frac{4c\pi}{T^2} \sin \frac{\theta\pi}{T} \cos \frac{\theta\pi}{T},$$

c et T étant des constantes. On aura

$$\frac{dv_x}{d\theta} = \frac{4c\pi}{T^2} \sin \frac{\theta\pi}{T} \cos \frac{\theta\pi}{T},$$

On se rapproche donc de plus en plus d'un état limite dans lequel le mobile, sans changer de position, éprouverait une modification brusque de sa vitesse. C'est cet état limite que l'on étudie dans la théorie des percussions, et il résulte immédiatement de ce qui précède que, pour déterminer le changement de vitesse du mobile, il suffit de connaître les impulsions des différentes forces auxquelles il est soumis. Ce sont ces impulsions auxquelles on donne le nom de *percussions*. Il est clair que les percussions provenant de forces finies, telles que la pesanteur, peuvent être considérées comme nulles.

Je ne m'arrêterai pas à discuter une objection que l'on adresse quelquefois à la théorie des percussions. Quelques auteurs, en s'appuyant sur ce qu'il n'existe pas de force rigoureusement instantanée, préfèrent ne pas employer la notion des percussions et les théories qui déterminent leurs effets. Il n'existe pas de point géométrique ni de ligne droite dans la nature, et cependant nous

---

et par suite, si l'on appelle v_0 la vitesse initiale,

$$v_x - v_0 = \frac{2c}{T}\sin^2\frac{\theta\pi}{T},$$

$$x - x_0 - v_0\theta = \frac{c\theta}{T} - \frac{c}{2\pi}\sin\frac{2\theta\pi}{T}.$$

On a donc, pour $\theta = T$,

$$v = v_0,$$

$$x = x_0 + v_0 T + c.$$

Si l'on suppose que le temps T devienne de plus en plus petit, c demeurant constant, on aura une force très grande agissant pendant un temps très court, *ne produisant aucun changement de vitesse et déplaçant le point d'une quantité quelconque* c.

Mais il est facile de reconnaître que la condition énoncée dans le texte ne se trouve plus remplie, puisque l'impulsion partielle

$$\int_0^\theta X_\theta\, d\theta = \frac{2c}{T}\sin^2\frac{\theta\pi}{T}$$

ne demeure pas finie, pour $\theta = \frac{T}{2}$ par exemple, quand T tend vers zéro. D'ailleurs, il est aisé de reconnaître que la force change de sens au milieu de son action.

C'est une force de ce genre qu'une locomotive doit déployer pour exécuter une de ces opérations qui sont si fréquentes dans les gares et amener rapidement un ou plusieurs wagons, sans vitesse, d'une position dans une autre.

trouvons utilité et intérêt à étudier ces abstractions. Il y a sans doute, quand on passe aux applications, à examiner les erreurs que l'on peut commettre en appliquant les théorèmes de la Science pure, mais cette question ne nous paraît pas devoir être mêlée au développement de la Science elle-même.

On sait comment se mesurent et se représentent les percussions. Au fond, ce sont des quantités de mouvement qu'il suffit de composer avec celles des points sur lesquels elles agissent. Je rappellerai rapidement les règles relatives à leur effet sur le corps solide et je présenterai en même temps quelques remarques nouvelles sur leur application.

Si le corps solide a un axe fixe, le produit du moment d'inertie relatif à cet axe par l'accroissement de la vitesse de rotation est égal à la somme des moments des percussions par rapport à cet axe.

Si le corps a un point fixe, désignons par p, q, r les composantes de la rotation suivant les trois axes principaux de ce point, et par A, B, C les moments d'inertie relatifs à ces trois axes; les vitesses prendront des accroissements Δp, Δq, Δr définis par les formules

$$\left\{\begin{aligned} A\Delta p &= L, \\ B\Delta q &= M, \\ C\Delta r &= N, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

où L, M, N désignent les sommes des moments des percussions par rapport aux trois axes.

Les formules précédentes peuvent être remplacées par une construction géométrique très élégante dont Poinsot a souvent fait usage. Soit O le point fixe. Supposons qu'on y transporte les quantités de mouvement de tous les points du système et que l'on compose les couples qui naissent de ces translations : le couple résultant sera le *couple des quantités de mouvement* transportées en O. Il est lié, comme on sait, d'une manière très simple à la rotation. 1° L'axe de rotation est le diamètre conjugué du plan de ce couple par rapport à l'ellipsoïde central du point O, et il est du même côté de ce plan que l'axe du couple. 2° Si G désigne le moment du couple, l la longueur du demi-diamètre intercepté dans l'ellipsoïde par l'axe de rotation, et δ la distance du centre au plan tangent à l'ellipsoïde à l'extrémité de l'axe de rotation, la vitesse angulaire de rotation a pour valeur

$$\omega = Gl\delta.$$

On voit donc que, si l'on connaît le couple des quantités de mouvement, on aura immédiatement le mouvement du corps solide.

Or, les formules précédentes peuvent se traduire comme il suit. Transportons toutes les percussions au point fixe et composons tous les couples qui naissent de cette translation : on obtiendra un couple résultant. *Il suffira de composer ce couple avec celui des quantités de mouvement antérieurement acquises pour avoir le nouveau couple des quantités de mouvement.*

Dans le cas où le corps solide est entièrement libre, désignons par m la masse du corps, par V_x, V_y, V_z les composantes de la vitesse du centre de gravité, par X, Y, Z celles de la résultante générale des percussions transportées au centre de gravité. On aura

$$(4)\qquad \begin{cases} m\Delta V_x = X, \\ m\Delta V_y = Y, \\ m\Delta V_z = Z, \end{cases}$$

et ces équations s'interprètent comme il suit : La nouvelle vitesse du centre de gravité sera la même que si la masse entière y était concentrée et toutes les percussions transportées parallèlement à elles-mêmes.

Quant au changement que subit la rotation autour du centre de gravité, on le déterminera en considérant ce centre comme un point fixe et en appliquant soit les formules (3), soit la construction géométrique de Poinsot qui leur est équivalente.

La forme linéaire de toutes ces équations nous montre tout de suite : 1° que l'on obtiendra la nouvelle vitesse d'un point quelconque en composant la vitesse antérieure avec celle que détermineraient les percussions si elles agissaient sur le corps au repos; 2° que l'on obtiendra le même résultat, soit en faisant agir simultanément les percussions, soit en les faisant agir successivement dans un intervalle de temps suffisamment court; 3° enfin que, si l'on multiplie les percussions par un nombre quelconque p, les vitesses qu'elles déterminent sur le corps au repos sont toutes multipliées par p. Tous ces résultats s'étendent d'ailleurs, sans difficulté, au cas où le corps solide est soumis à des liaisons d'une nature quelconque, et les composantes de la vitesse que prend un point quelconque sont toujours des fonctions linéaires des composantes des percussions qui agissent sur le corps solide.

Nous remarquerons, en terminant, que les constructions géométriques données précédemment permettent de résoudre d'une manière simple certaines questions. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver les percussions qui, appliquées à un corps solide libre, lui impriment au début une rotation. On reconnaîtra aisément que les lignes d'action de ces percussions doivent être perpendiculaires à leur polaire par rapport à l'ellipsoïde central du centre de gravité; elles forment donc un complexe bien connu et qui a été étudié par divers géomètres.

Considérons, en effet, une percussion P appliquée à un corps solide. Elle imprimera au centre de gravité une vitesse de translation qui lui sera parallèle. Quant à la rotation autour du centre de gravité, nous avons vu qu'elle commence autour de la droite qui est le diamètre conjugué du plan passant par la percussion P et le centre de gravité. Pour que le mouvement initial soit une rotation, il faut que la translation imprimée au centre de gravité soit normale à l'axe de rotation; c'est-à-dire que la ligne d'action de la percussion P soit une droite perpendiculaire au diamètre conjugué, par rapport à l'ellipsoïde central du centre de gravité, du plan passant par cette droite et par le centre de gravité; ou, ce qui est la même chose, il faut que cette ligne d'action soit une droite perpendiculaire à sa polaire par rapport à l'ellipsoïde central du centre de gravité.

II. — Des forces vives dans la théorie des percussions.

Reprenons les équations relatives à l'effet des percussions sur un point matériel :

$$(5)\qquad \begin{cases} m(v_x - v_{0x}) = \sum \int_0^t X\,dt, \\ m(v_y - v_{0y}) = \sum \int_0^t Y\,dt, \\ m(v_z - v_{0z}) = \sum \int_0^t Z\,dt. \end{cases}$$

Multiplions-les par $v_x + v_{0x}$, $v_y + v_{0y}$, $v_z + v_{0z}$ et ajoutons-les. Nous aurons, en désignant par v_0, v les vitesses initiale et finale,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & m(v^2 - v_0^2) \\ & \quad = \sum \int_0^t [\mathrm{X}(v_x + v_{0x})\,dt + \mathrm{Y}(v_y + v_{0y})\,dt + \mathrm{Z}(v_z + v_{0z})\,dt]. \end{aligned} \right.$$

Le second membre de cette formule a une signification géométrique très simple. Si la force X, Y, Z agissait, pendant toute la durée de son action, sur un mobile animé de la vitesse constante dont les composantes sont

$$v_x + v_{0x},\quad v_y + v_{0y},\quad v_z + v_{0z},$$

son travail élémentaire serait

$$\mathrm{X}(v_x + v_{0x})\,dt + \mathrm{Y}(v_y + v_{0y})\,dt + \mathrm{Z}(v_z + v_{0z})\,dt,$$

et son travail total dans l'intervalle de o à t serait précisément l'intégrale qui figure dans le second membre de la formule (6). Nous avons donc la proposition suivante :

Théorème I. — *Quand des percussions agissent sur un point matériel, la variation de force vive est égale à la somme des travaux que produiraient les forces d'où proviennent ces percussions si, pendant toute la durée de leur action, le point matériel conservait une vitesse constante égale à la somme géométrique de ses vitesses initiale et finale.*

Multiplions maintenant les équations (5) par v_x, v_y, v_z respectivement et ajoutons-les. Nous obtiendrons une équation que l'on mettra aisément sous la forme suivante :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & mv_0^2 - mv^2 = m[(v_x - v_{0x})^2 + (v_y - v_{0y})^2 + (v_z - v_{0z})^2] \\ & \qquad\qquad - 2\sum \int_0^t (\mathrm{X}v_x + \mathrm{Y}v_y + \mathrm{Z}v_z)\,dt. \end{aligned} \right.$$

Cette équation, interprétée comme la précédente, conduit à cette nouvelle proposition :

Théorème II. — *La perte de force vive est égale à la force vive due à la vitesse perdue moins le double de la somme des* *travaux que produiraient les forces si le point matériel conservait, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante et égale à la vitesse finale.*

Enfin, si l'on employait comme multiplicateurs v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}, on aurait de même l'équation

$$(8) \quad \begin{cases} mv^2 - mv_0^2 = m[(v_x - v_{0x})^2 + (v_y - v_{0y})^2 + (v_z - v_{0z})^2] \\ \qquad + 2\sum \int_0^t (Xv_{0x} + Yv_{0y} + Zv_{0z})\,dt, \end{cases}$$

qui s'interprète comme il suit :

THÉORÈME III. — *Le gain de force vive est égal à la force vive due à la vitesse gagnée (ou perdue), augmentée du double des travaux que produiraient les forces si, pendant toute la durée de leur action, le point matériel conservait une vitesse constante et égale à la vitesse initiale.*

Il est aisé de reconnaître que cette dernière proposition est un simple corollaire des deux précédentes, mais il peut y avoir quelque intérêt à en faire usage.

Considérons maintenant un système composé d'un nombre quelconque de points matériels. Écrivons les équations analogues à l'équation (6) pour chacun des points et ajoutons toutes ces équations. Nous aurons

$$(9) \quad \begin{cases} \Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 \\ \quad = \sum\sum \int_0^t [X\,dt(v_x + v_{0x}) + Y\,dt(v_y + v_{0y}) + Z\,dt(v_z + v_{0z})], \end{cases}$$

les sommes qui figurent dans le premier membre s'étendant à tous les points matériels, et celle qui figure dans le second à toutes les forces. Cette équation conduit au théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *La variation de la force vive totale d'un système est égale à la somme des travaux que produiraient les percussions tant intérieures qu'extérieures si chacun des points d'application de ces percussions conservait, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante égale à la somme géométrique de ses vitesses initiale et finale.*

De même, l'équation (7) nous conduira à la suivante,

$$
(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 &= \Sigma m[(v_x - v_{0x})^2 + (v_y - v_{0y})^2 + (v_z - v_{0z})^2] \\ &\quad - 2\sum\sum\int_0^t (\mathrm{X} v_x + \mathrm{Y} v_y + \mathrm{Z} v_z)\,dt, \end{aligned} \right.
$$

ce qui donne le théorème suivant :

Théorème V. — *La perte de force vive du système est égale à la force vive due aux vitesses perdues, diminuée du double de la somme des travaux que produiraient les percussions tant intérieures qu'extérieures si chacun de leurs points d'application conservait, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante égale à sa vitesse finale.*

Toutes les propositions précédentes s'appliquent aux forces agissant pendant un temps quelconque. Mais, si le système matériel est un corps solide et si les forces agissent pendant un temps très court, c'est-à-dire sont de véritables percussions, il est aisé de démontrer que les termes correspondants aux percussions intérieures se détruisent deux à deux et disparaissent des équations (9) et (10). Soient, en effet, m, m' deux points du corps solide entre lesquels s'exerce une force (X, Y, Z). Appelons v_{0x}, v_x, ... les vitesses du point m, et v'_{0x}, v'_x, ... celles du point m'. Les termes qui proviennent de la force (X, Y, Z) dans les équations (9) et (10) sont composés des deux expressions

$$
(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &(v_x - v'_x)\int \mathrm{X}\,dt + (v_y - v'_y)\int \mathrm{Y}\,dt + (v_z - v'_z)\int \mathrm{Z}\,dt, \\ &(v_{0x} - v'_{0x})\int \mathrm{X}\,dt + (v_{0y} - v'_{0y})\int \mathrm{Y}\,dt + (v_{0z} - v'_{0z})\int \mathrm{Z}\,dt. \end{aligned} \right.
$$

Les deux points m, m' étant maintenus, par hypothèse, à une distance invariable, les vitesses initiale et finale satisfont aux conditions

$$
(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x - x')(v_x - v'_x) + (y - y')(v_y - v'_y) + (z - z')(v_z - v'_z) = 0, \\ &(x - x')(v_{0x} - v'_{0x}) + (y - y')(v_{0y} - v'_{0y}) + (z - z')(v_{0z} - v'_{0z}) = 0, \end{aligned} \right.
$$

x, y, z, x', y', z' désignant les coordonnées des deux points. D'ailleurs, la percussion étant dirigée suivant la droite qui joint les deux points, on a

$$
\int \mathrm{X}\,dt = \lambda(x - x'), \quad \int \mathrm{Y}\,dt = \lambda(y - y'), \quad \int \mathrm{Z}\,dt = \lambda(z - z'),
$$

et, par conséquent, les deux expressions (11) sont nulles, en vertu des formules (12). Ainsi les percussions intérieures disparaissent dans les formules (9) et (10).

La démonstration précédente n'est pas absolument irréprochable, parce qu'elle suppose que les distances des différents points soient demeurées les mêmes pendant toute la durée des percussions. Il est aisé de reconnaître *a priori* que cette condition n'est pas nécessaire et qu'il suffit, pour que les théorèmes aient lieu, que les distances mutuelles des différents points redeviennent les mêmes après les percussions. En effet, dans ce cas, les théorèmes du mouvement du centre de gravité et des moments permettent de trouver le nouveau mouvement du corps solide, et par suite la variation de force vive. Or l'application de ces théorèmes est indépendante des déformations passagères qui peuvent se produire pendant l'action des percussions. On voit donc qu'il en sera de même de la variation de la force vive, et, par suite, les expressions que nous avons trouvées en supposant les distances invariables doivent subsister dans tous les cas, pourvu que les distances reprennent leurs valeurs initiales quand les percussions ont cessé leur action. Nous allons, du reste, en nous servant seulement des équations ordinaires, obtenir une vérification des propositions précédentes.

Pour cela reprenons les équations (3) et (4), que nous écrirons

$$\begin{aligned}
m(V_x - V_{0x}) &= \Sigma X_i = X,\\
m(V_y - V_{0y}) &= \Sigma Y_i = Y,\\
m(V_z - V_{0z}) &= \Sigma Z_i = Z,\\
A(p - p_0) &= \Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) = L,\\
B(q - q_0) &= \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) = M,\\
C(r - r_0) &= \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) = N,
\end{aligned}$$

x_i, y_i, z_i désignant les coordonnées du point d'application de la percussion (X_i, Y_i, Z_i) par rapport aux trois axes principaux du centre de gravité.

En multipliant ces équations par $V_x + V_{0x}, \ldots, p + p_0, \ldots$ respectivement et en les ajoutant, on a

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&mV^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - mV_0^2 - Ap_0^2 - Bq_0^2 - Cr_0^2\\
&\quad = X(V_x + V_{0x}) + Y(V_y + V_{0y}) + Z(V_z + V_{0z})\\
&\qquad + L(p + p_0) + M(q + q_0) + N(r + r_0).
\end{aligned}\right.$$

Le premier membre représente la variation de force vive. D'autre part, si l'on appelle $v_{ix}^0, \ldots, v_{ix}, \ldots$ les composantes des vitesses initiale et finale du point d'application (x_i, y_i, z_i) de la percussion (X_i, Y_i, Z_i), on a

$$\begin{aligned} v_{ix}^0 &= V_{0x} + q_0 z_i - r_0 y_i, & v_{ix} &= V_x + q z_i - r y_i, \\ v_{iy}^0 &= V_{0y} + r_0 x_i - p_0 z_i, & v_{iy} &= V_y + r x_i - p z_i, \\ v_{iz}^0 &= V_{0z} + p_0 y_i - q_0 x_i, & v_{iz} &= V_z + p y_i - q x_i, \end{aligned}$$

et l'on obtient, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} &\Sigma X_i(v_{ix} + v_{ix}^0) + Y_i(v_{iy} + v_{iy}^0) + Z_i(v_{iz} + v_{iz}^0) \\ &\quad = X(V_x + V_{0x}) + Y(V_y + V_{0y}) + Z(V_z + V_{0z}) \\ &\qquad + (p + p_0)L + (q + q_0)M + (r + r_0)N. \end{aligned}$$

En comparant à l'équation (13), on a

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &mV^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - mV_0^2 - Ap_0^2 - Bq_0^2 - Cr_0^2, \\ &\quad = \Sigma X_i(v_{ix} + v_{ix}^0) + Y_i(v_{iy} + v_{iy}^0) + Z_i(v_{iz} + v_{iz}^0), \end{aligned} \right.$$

et cette équation ne diffère de l'équation (9) qu'en ce que les termes provenant des actions intérieures ont disparu. Nous avons donc la proposition suivante :

Théorème VI. — *Quand des percussions agissent sur un corps solide, la variation de force vive est égale à la somme des travaux qu'elles produiraient si leurs points d'application conservaient, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante égale à la somme géométrique de leur vitesse initiale et de leur vitesse finale.*

On vérifiera de la même manière l'équation suivante,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 + mV_0^2 - Ap^2 - Bq^2 - Cr^2 - mV^2 \\ &\quad = A(p - p_0)^2 + B(q - q_0)^2 + C(r - r_0)^2 + m(V - V_0)^2 \\ &\qquad - 2\Sigma(X_i v_{ix} + Y_i v_{iy} + Z_i v_{iz}), \end{aligned} \right.$$

qui ne diffère de l'équation (10) qu'en ce que les termes provenant des percussions intérieures ont disparu et qui conduit au théorème suivant :

Théorème VII. — *La perte de force vive éprouvée par le corps* *solide est égale à la force vive due aux vitesses perdues moins le double de la somme des travaux que produiraient les percussions si les points sur lesquels elles agissent conservaient, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante égale à leur vitesse finale.*

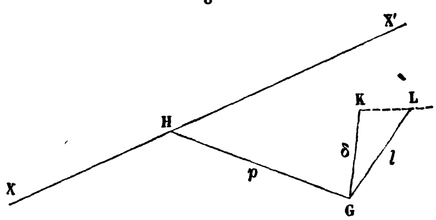
Il est bon de remarquer que si le corps solide est soumis à des liaisons, s'il a, par exemple, des points fixes, ou des points assujettis à demeurer sur une surface fixe, ou des surfaces assujetties à passer par des points fixes, etc., les termes provenant dans les équations précédentes des percussions de liaison seront tous nuls, pourvu que l'on néglige le frottement. Par exemple, s'il y a un point fixe, la percussion que le corps reçoit de l'obstacle fixe, s'exerçant sur un point dont la vitesse est et demeure nulle, ne donnera de terme dans aucune des équations (14) ou (15).

D'après cela, si une seule percussion agit sur un corps solide au repos, la force vive imprimée au corps sera, en vertu du théorème VI, égale au produit de cette percussion par la projection, sur sa direction, de la vitesse que prend son point d'application. Il faut donc que cette projection soit positive et, par conséquent, que le point d'application *cède* sous l'action de la percussion qui lui est appliquée. C'est là un résultat conforme à notre expérience de tous les jours; mais le théorème précédent, qui le met en évidence, nous conduit, en outre, à la considération d'un élément nouveau qui se rapporte aux droites d'un corps solide et que nous allons définir.

Concevons une droite D et supposons qu'une percussion égale à l'unité ait cette droite pour ligne d'action. Soit A le point de D où elle est appliquée. Elle communique à ce point A une vitesse dont la projection sur la percussion et, par conséquent, sur la droite est positive; nous désignerons cette projection par $\frac{1}{\mu}$, et il est clair qu'elle demeurerait la même si l'on faisait glisser la percussion sur la droite D, car on sait qu'alors le mouvement imprimé au corps demeure le même, et d'autre part, dans ce mouvement, les projections sur la droite des vitesses de tous les points de cette droite sont égales. Nous appellerons cette quantité μ, essentiellement positive, le *paramètre de la droite*. Quand on l'aura déterminée, on saura que *toute percussion égale à P et dirigée suivant la droite déterminera en son point d'application une vitesse dont la* *projection sur la percussion sera positive et égale à* $\frac{P}{\mu}$. Cherchons quelle est la valeur du paramètre dans les cas principaux que l'on a à considérer.

1° Supposons d'abord le corps libre, et soit une percussion agissant suivant une droite XX′ (*fig.* 1). Désignons par M la masse du corps. La percussion P imprimera d'abord à tous les points une vitesse de translation égale à $\frac{P}{M}$; elle produira, en outre, une rotation autour du diamètre GL, conjugué au plan GXX′ dans l'ellipsoïde central du centre de gravité G. Appelons p la distance GH du centre

Fig. 1.



de gravité à la droite XX′. Le moment G du couple qui résulte de la translation de la percussion en G sera Pp, et, par conséquent, la vitesse de rotation autour de GL sera donnée par la formule

$$\omega = Ppl\delta,$$

où l désigne la longueur du demi-diamètre GL de l'ellipsoïde central autour duquel s'effectue la rotation, et δ la distance GK du centre au plan tangent à l'extrémité de ce diamètre. Nous pouvons d'ailleurs décomposer cette rotation en deux autres, l'une ω' dirigée suivant GK et égale à $\omega \times \frac{\delta}{l}$ ou $Pp\delta^2$, l'autre ω'' dirigée dans le plan XX′ et dont nous n'avons pas besoin de connaître la valeur.

D'après cela, la vitesse d'un point quelconque de XX′, par exemple du pied H de la perpendiculaire abaissée de G, se compose de trois vitesses : 1° la vitesse de translation dont la projection sur la droite XX′, prise dans le sens de la percussion, est $\frac{P}{M}$; 2° la vitesse due à la rotation ω', vitesse qui est dirigée suivant XX′ et qui a pour valeur $\omega' p$ ou $Pp^2\delta^2$; 3° la vitesse due à la rotation ω'', qui, étant normale à XX′, donne une projection nulle. On voit donc que la projection sur la direction de la percussion de la vitesse imprimée au point H, projection qui conserve la même valeur pour un point quelconque de XX′, est

$$P\left(\frac{1}{M}+p^2\delta^2\right).$$

On a donc dans ce cas, pour le paramètre de la droite XX′, l'expression très simple

$$(16)_a \qquad \frac{1}{\mu}=\frac{1}{M}+p^2\delta^2.$$

Le paramètre, généralement inférieur à la masse, lui devient égal quand la droite passe au centre de gravité.

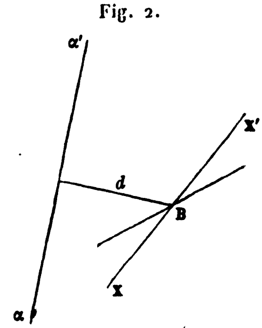
Si le corps a un point fixe, les raisonnements sont les mêmes; seulement il n'y a pas à tenir compte de la vitesse de translation, et l'on a

$$(16)_b \qquad \frac{1}{\mu}=p^2\delta^2,$$

le centre de gravité étant remplacé par le point fixe.

Enfin, si le corps a un axe fixe, soient XX′ (*fig.* 2) la ligne d'ac-

Fig. 2.



tion de la percussion, θ l'angle qu'elle fait avec l'axe $\alpha\alpha'$, et d sa plus courte distance à l'axe. Désignons par ω la vitesse angulaire imprimée et par Mk^2 le moment d'inertie par rapport à $\alpha\alpha'$. On aura

$$Mk^2\omega = Pd\sin\theta.$$

La vitesse du pied B de la plus courte distance sera $\dfrac{Pd^2\sin\theta}{Mk^2}$; et sa projection sur XX′ sera

$$\frac{Pd^2\sin^2\theta}{Mk^2}.$$

On aura donc ici

$$\frac{1}{\mu} = \frac{d^2 \sin^2\theta}{M k^2}. \tag{16$_c$}$$

Nous nous bornerons à ces trois cas principaux. Pour les autres, nous nous contenterons de rappeler que le paramètre μ est essentiellement positif.

III. — Du choc des corps.

Le choc des corps a été l'objet de nombreuses recherches. Poisson, dans le Tome II de sa *Mécanique,* commence par traiter le choc des corps mous et il obtient la solution complète du problème en ajoutant aux douze équations fournies par les principes du centre de gravité et des moments une équation nouvelle qui exprime qu'à la fin du choc les vitesses normales au point de contact des deux solides sont égales. Puis il passe de là au cas des corps élastiques, en remarquant que le choc peut alors se décomposer en deux parties séparées par l'instant de la plus grande compression. Dans la première, le phénomène est le même que si les deux corps étaient dépourvus d'élasticité. Dans la seconde les corps reviennent à leur forme primitive, et il admet qu'ils reçoivent une percussion égale à celle qui s'est développée à leur contact pendant la première partie du choc. Il est aisé d'établir que la force vive totale reprend sa valeur à la fin du choc, ce qui fournit une espèce de vérification de l'hypothèse de Poisson.

En 1838, dans le *Résumé des Leçons données à l'École des Ponts et Chaussées,* Navier a remarqué que, si l'on fait abstraction des vibrations communiquées par le choc aux molécules des deux corps, la force vive totale doit reprendre la même valeur. Cette remarque lui a permis d'obtenir la percussion totale qui se produit au contact des corps, et par conséquent de donner la solution complète de la question.

En 1874, M. Resal a adopté la marche proposée par Navier, dans une Note importante qui figure aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LXXVIII).

Toutes ces différentes solutions sont analytiques; elles reposent sur la considération de treize équations du premier degré et ne laissent pas voir la signification géométrique très simple des résultats. Je me suis proposé, en 1874, de donner une solution purement géométrique de cette question, et je vais indiquer ici les résultats que j'ai obtenus.

Soient (M), (M′) deux corps solides se choquant en un point A. L'effet du choc peut se représenter par deux percussions égales et contraires, dirigées suivant la normale en A aux deux surfaces en contact, l'une $\int N\,dt$ appliquée au corps (M), l'autre $-\int N\,dt$ appliquée au corps (M′). Soient w_0, w les composantes suivant la normale au point de choc de la vitesse initiale et de la vitesse finale du point de (M) qui se trouve en A, et soient w'_0, w' les mêmes quantités relatives au corps (M′).

Si nous appliquons successivement le théorème VI aux deux corps (M), (M′), nous aurons

$$(17)\qquad \begin{cases} \Sigma_M (mv^2 - mv_0^2) = (w + w_0) \int N\,dt, \\ \Sigma_{M'} (mv^2 - mv_0^2) = -(w' + w'_0) \int N\,dt, \end{cases}$$

Σ_M, $\Sigma_{M'}$ désignant les forces vives des corps (M), (M′) respectivement. Il est à remarquer que ces équations, qui ont évidemment lieu pour des corps libres, sont encore vraies si les corps ont des points fixes ou sont assujettis à d'autres liaisons, car nous avons vu que les percussions de liaison ne peuvent introduire aucun terme dans les seconds membres des équations générales (14) et (15), et les formules (17) ne sont que l'application particulière de l'équation (14).

En ajoutant les deux équations précédentes, on aura, pour la variation totale de la force vive, la formule

$$(18)\qquad \Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = (w - w' + w_0 - w'_0) \int N\,dt,$$

qui va nous donner la solution complète de la question.

Supposons d'abord que les corps soient parfaitement élastiques et que la perte de force vive doive être nulle; il faudra que l'on ait

$$(19)\qquad w - w' = -(w_0 - w'_0).$$

Donc, l'effet du choc dans le cas des corps parfaitement élastiques est de *changer de signe la composante normale de la vitesse relative des deux points de choc sans changer la grandeur de cette* *composante.* Tel est le résultat très simple auquel conduit immédiatement notre théorie.

Cela posé, décomposons le choc en deux parties par la condition que les intégrales $\int N\,dt$ relatives à ces deux parties soient égales. Les percussions imprimées aux corps solides dans les deux parties du choc ainsi divisé ont par hypothèse même grandeur, et elles agissent suivant la même droite. Donc, d'après les règles connues de l'effet des percussions, les vitesses gagnées par les points de l'un quelconque des solides sont les mêmes en grandeur et en direction pour ces deux parties du choc. Cette remarque permet de déterminer les composantes normales des vitesses des points des deux corps placés en A à la fin de la première partie du choc, car soit u la composante normale de la vitesse du point de choc de (M); on devra avoir

$$\omega_0 - u = u - \omega,$$

équation qui exprime que la composante normale de la vitesse varie de la même quantité dans les deux parties du choc. Donc

$$u = \frac{\omega + \omega_0}{2}.$$

Si u' désigne la quantité analogue à u pour le corps (M′), on aura de même

$$u' = \frac{\omega' + \omega'_0}{2}.$$

Si l'on tient compte de l'équation (19), on aura

$$u = u'.$$

Ainsi, quand l'intégrale $\int N\,dt$ a acquis la moitié de sa valeur définitive, les vitesses normales des deux points de choc sont égales. Si le choc cessait à cet instant, on serait dans le cas des *corps mous.* Donc, *si, dans le cas des corps parfaitement élastiques, on sépare le choc en deux parties par l'instant où les vitesses normales des deux points de choc sont égales, les percussions relatives à ces deux parties du choc sont égales.* En d'autres termes, la percussion dans le cas des corps élastiques est double de celle qui se produit quand les corps sont mous. C'est le point que l'on admettait dans la théorie de Poisson.

Dans le cas des corps mous, le théorème VII trouve son application immédiate; les points en contact ayant la même vitesse normale dans les deux corps après le choc, les travaux des deux percussions, tels qu'ils doivent être évalués dans cette proposition, sont égaux et de signes contraires. On voit donc que, dans ce cas, la force vive perdue est égale à la force vive due aux vitesses perdues. C'est le théorème bien connu de Carnot, théorème qui n'a d'ailleurs d'autre avantage que de montrer qu'il y a perte de force vive, sans apprendre à en mesurer la grandeur.

Pour étudier le choc d'une manière plus complète et comprendre tous les cas, nous allons chercher les formules qui relient les vitesses w, w', à un instant quelconque du choc, à la percussion qui s'est produite jusqu'à cet instant, et, en faisant ensuite les hypothèses particulières, nous retrouverons tous les cas.

Désignons par μ, μ' les paramètres de la normale au point de choc par rapport aux corps (M), (M′) respectivement. La percussion $\int N\,dt$ appliquée au corps (M) donnera au point de choc la vitesse normale

$$w = w_0 + \frac{1}{\mu}\int N\,dt, \tag{20}$$

résultante de la vitesse initiale w_0 et de celle qu'imprimerait la percussion au corps partant du repos. De même la percussion $-\int N\,dt$ appliquée au corps (M′) donnera au point de choc de ce corps la vitesse normale

$$w' = w'_0 - \frac{1}{\mu'}\int N\,dt. \tag{21}$$

Les équations précédentes nous conduisent aux deux suivantes :

$$\mu w + \mu' w' = \mu w_0 + \mu' w'_0 \tag{22}$$

et

$$w - w' = w_0 - w'_0 + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}\right)\int N\,dt.$$

Introduisons les vitesses relatives

$$W = w - w', \quad W_0 = w_0 - w'_0.$$

L'équation précédente s'écrira

$$\text{(23)} \qquad W - W_0 = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}\right) \int N\,dt.$$

Si nous substituons la valeur de $\int N\,dt$ dans la formule (18), nous aurons

$$\text{(24)} \qquad \Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = \frac{W^2 - W_0^2}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}}.$$

Quant à la variation de force vive pour chaque corps, elle sera donnée par les formules (17), qui deviennent

$$\Sigma_M m(v^2 - v_0^2) = \quad (w + w_0)\frac{W - W_0}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}},$$

$$\Sigma_{M'} m(v^2 - v_0^2) = -(w' + w'_0)\frac{W - W_0}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}}.$$

Ces formules ne diffèrent en rien de celles qui seraient relatives au choc de deux sphères de masses μ, μ'. Il est donc inutile de les discuter en détail. On obtiendra le choc des corps mous en faisant $W = 0$ et celui des corps élastiques en posant $W = -W_0$.

Cela nous conduit à dire un mot d'une hypothèse bien connue de Newton, relative aux corps imparfaitement élastiques. Newton admet que pour ces corps le choc sera terminé quand on aura

$$W = -eW_0,$$

e étant une fraction positive qui dépend de la nature des deux corps. On voit que cette hypothèse comprend comme cas extrêmes celles qui répondent au choc des corps mous ($e = 0$) et au choc des corps parfaitement élastiques ($e = 1$). Il est aisé de reconnaître quelle sera la perte de force vive. Si nous nous reportons à la formule (24), nous trouvons pour l'expression de cette perte

$$(1 - e^2)\frac{W^2}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}}.$$

On peut donc caractériser l'hypothèse de Newton en disant qu'*elle conduit à une perte de force vive qui est une fraction déterminée*, $(1 - e^2)$, *et toujours la même, de celle qui se produit dans le choc des corps mous* (¹).

IV. — Du choc, en tenant compte du frottement.

Jusqu'ici j'ai négligé l'influence du frottement qui se produit au contact. Les expériences du général Morin paraissent établir que, même dans ce cas, le frottement suit les lois ordinaires. Toutefois, dans la théorie des machines, on n'a eu à s'occuper que de problèmes relativement simples pour lesquels il est facile de reconnaître *a priori* que la vitesse relative au point de contact des deux corps a une composante tangentielle dont la direction demeure constante pendant toute la durée du choc. Il n'y a donc alors qu'à introduire, en même temps que les percussions normales appliquées aux deux corps, des percussions tangentielles égales à la valeur commune des percussions normales multipliée par le coefficient de frottement et ayant une direction invariable pendant le choc, celle de la composante tangentielle de la vitesse relative au point de contact. Je citerai un travail de Poisson, *Sur le frottement des corps qui tournent* (*Bulletin de Férussac*, t. VI, p. 163) et les recherches de Coriolis sur le choc des sphères dans sa *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*.

Si l'on se propose de traiter le problème général, la question devient beaucoup plus compliquée. On sait que, dans le cas où il n'y a pas frottement, la vitesse relative au point de contact passe progressivement, pendant la courte durée du choc, d'une valeur à une autre tout à fait différente en grandeur et en direction; il en est de même quand il y a frottement, et si l'on veut tenir compte rigoureusement des effets de cette force, il faudra, à chaque

(¹) Dans le *Journal de Mathématiques* (3ᵉ série, t. IV, 1878), M. Joukofsky a publié un Mémoire sur la percussion des corps qui se rapproche du nôtre à la fois par la méthode et les résultats. Je crois donc devoir faire observer qu'au moins pour le cas des corps libres, qui est le seul dont s'occupe M. Joukofsky, j'avais développé la solution complète dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* en 1874.

nouvel instant du choc, donner au frottement une direction nouvelle en sens inverse de la vitesse relative à cet instant. Cette direction de la vitesse relative dépend, d'ailleurs, du frottement qui s'est produit aux époques antérieures du choc; on peut donc prévoir qu'il y aura une équation différentielle donnant la loi du phénomène et dont l'intégration constituera la principale difficulté du problème; et l'on reconnaît aussi que si l'on voulait, malgré le changement de la vitesse tangentielle relative au point de contact, conserver à ce frottement une direction constante, on pourrait commettre des erreurs du même ordre que les effets dont on veut tenir compte.

M. Phillips, dans un beau travail inséré au Tome XIV du *Journal de Liouville*, page 312, a le premier abordé la question à ce point de vue et intégré l'équation différentielle qui se présente dans cette théorie. Depuis, dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LXXVI, p. 1645), j'ai obtenu les mêmes résultats par une méthode différente et à quelques égards plus simple. En étudiant de nouveau cette question pour présenter ici une étude complète de la théorie du choc, je me suis aperçu que, si les recherches que je viens de citer suppriment la principale difficulté de la question, elles ne donnent pas cependant la solution complète du problème, car elles négligent ce fait capital que la vitesse relative tangentielle peut devenir nulle pendant la durée du choc. Il y a donc intérêt à reprendre l'étude de cette question en ayant égard aux circonstances qui avaient été négligées dans les recherches antérieures.

Prenons pour axe des z la normale commune aux deux corps au point de contact, la partie positive de l'axe des z étant dirigée vers le corps (M). Les axes des x et des y seront dans le plan de contact. Le point de choc du corps (M) a, par rapport au point de choc du corps (M'), une vitesse relative dont nous désignerons par w la composante normale et par v la composante tangentielle. Si la vitesse v fait avec l'axe des x l'angle φ, les trois composantes de la vitesse relative suivant Ox, Oy, Oz seront

$$v\cos\varphi,\quad v\sin\varphi,\quad w.$$

Désignons par N la force normale qui s'exerce à l'instant t sur le corps (M). La force de frottement aura, suivant Ox, Oy, les deux composantes

$$-f\mathrm{N}\cos\varphi,\quad -f\mathrm{N}\sin\varphi,$$

f désignant le coefficient du frottement. Par suite, les trois composantes de la percussion reçue par le corps (M) depuis le commencement du choc seront

$$-f\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt,\quad -f\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt,\quad \int_0^t \mathrm{N}\,dt,$$

et le corps (M′) aura reçu dans le même temps des percussions égales et contraires. Cela posé, d'après les lois de l'effet des percussions, les composantes de la vitesse relative des deux corps seront des fonctions linéaires de ces percussions, et l'on aura

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned}
v\cos\varphi &= v_0\cos\varphi_0 - af\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt - bf\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt + c\int \mathrm{N}\,dt,\\
v\sin\varphi &= v_0\sin\varphi_0 - a'f\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt - b'f\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt + c'\int \mathrm{N}\,dt,\\
w &= w_0 \qquad\quad - a''f\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt - b''f\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt + c''\int \mathrm{N}\,dt,
\end{aligned}\right.$$

v_0, φ_0, w_0 désignant les valeurs initiales de v, φ, w. Quant à a, b, c, ..., ce sont des constantes que l'on détermine sans difficulté et qui dépendent de la forme et de la position relative des deux corps : a, a', a'' sont les composantes de la vitesse relative qui serait imprimée aux points en contact par deux percussions égales à l'unité dirigées suivant l'axe des x et appliquées l'une au corps (M), l'autre au corps (M′), la première ayant le sens de la partie positive de l'axe des x, l'autre ayant le sens contraire ; b, b', b'', c, c', c'' ont des définitions analogues relativement à des percussions dirigées suivant Oy et Oz. Il n'y a donc aucune relation entre ces neuf constantes, qui, dans le cas des corps libres, dépendent de vingt paramètres. Il est vrai que les équations précédentes ne supposent nullement les corps libres et qu'elles ont lieu d'une manière absolue, quelle que soit la nature des liaisons. Mais, dans la discussion, nous pourrons les supposer quelconques ; il nous suffira seulement de montrer que dans tous les cas elles satisfont à des inégalités dont nous aurons à tenir grand compte dans notre discussion. Nous allons d'abord indiquer quelles sont ces relations d'inégalité.

Si deux corps (M), (M') sont en repos, et qu'en un de leurs points de contact on leur applique respectivement deux percussions P, — P égales et contraires, il est facile de montrer que la vitesse relative que prendra le point de contact de (M) par rapport au point de contact de (M') aura toujours une projection positive sur la percussion P appliquée au corps (M). En effet, nous savons que la percussion P imprime à son point d'application une vitesse dont la projection sur P est $\frac{P}{\mu}$, μ étant le paramètre de la ligne d'action par rapport au corps (M). De même la percussion — P imprime au point du corps (M') où elle est appliquée une vitesse dont la projection sur — P sera $+\frac{P}{\mu'}$, μ' étant le paramètre de la ligne d'action par rapport au corps (M'); et par conséquent la projection de cette vitesse sur P sera $-\frac{P}{\mu'}$. La projection de la vitesse relative sur P, étant la différence des projections des deux vitesses absolues, sera

$$P\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}\right),$$

et, *par conséquent, sera toujours positive.*

D'après cela, revenons aux deux corps (M), (M') supposés au repos, et appliquons à l'origine au corps (M) une percussion quelconque dont les composantes sont X, Y, Z, en appliquant au corps (M') la percussion égale et contraire. La vitesse relative qui sera imprimée par ces deux percussions sera définie par les formules

$$\begin{aligned} v_x &= a\,X + b\,Y + c\,Z, \\ v_y &= a'X + b'Y + c'Z, \\ v_z &= a''X + b''Y + c''Z, \end{aligned}$$

cette vitesse étant toujours celle du point de (M) par rapport au point de (M'). La projection de cette vitesse sur la percussion appliquée au corps (M) devant être positive, nous devrons avoir

$$Xv_x + Yv_y + Zv_z > 0,$$

et par conséquent

$$aX^2 + b'Y^2 + c''Z^2 + (c' + b'')YZ + (c + a'')XZ + (b + a')XY > 0.$$

Ainsi, les constantes a, b', c'' doivent satisfaire à toutes les inégalités qui expriment que l'expression précédente est positive, quelles que soient X, Y, Z. Par exemple, on aura

$$(26)\qquad \begin{cases} a > 0, \ b' > 0, \ c'' > 0, \\ (b + a')^2 - 4ab' < 0. \end{cases}$$

Nous aurons à faire usage de ces inégalités.

Après ces remarques préliminaires, reprenons les équations (25) et différentions-les. Si nous posons

$$(27)\qquad \begin{cases} A = c - af\cos\varphi - bf\sin\varphi, \\ A' = c' - a'f\cos\varphi - b'f\sin\varphi, \\ A'' = c'' - a''f\cos\varphi - b''f\sin\varphi, \end{cases}$$

nous aurons

$$\cos\varphi\,dv - v\sin\varphi\,d\varphi = \mathrm{A N}\,dt,$$
$$\sin\varphi\,dv + v\cos\varphi\,d\varphi = \mathrm{A' N}\,dt,$$

ce qui donne

$$\frac{dv}{v} = \frac{A'\sin\varphi + A\cos\varphi}{A'\cos\varphi - A\sin\varphi}\,d\varphi,$$

$$\mathrm{N}\,dt = \frac{v\,d\varphi}{A'\cos\varphi - A\sin\varphi}.$$

Posons, pour abréger,

$$\mathrm{H} = A'\sin\varphi + A\cos\varphi,$$
$$\Delta = A'\cos\varphi - A\sin\varphi.$$

Nous obtiendrons

$$(28)\qquad v = v_0 e^{\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{H}}{\Delta} d\varphi},$$

et, v une fois connu, on déduira de l'expression de $\mathrm{N}\,dt$

$$(29)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \mathrm{N}\,dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v\,d\varphi}{\Delta}, & \displaystyle v\cos\varphi = v_0\cos\varphi_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{Av\,d\varphi}{\Delta}, \\ \displaystyle\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v\cos\varphi\,d\varphi}{\Delta}, & \displaystyle v\sin\varphi = v_0\sin\varphi_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{A'v\,d\varphi}{\Delta}, \\ \displaystyle\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v\sin\varphi\,d\varphi}{\Delta}, & \displaystyle w = w_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{A''v\,d\varphi}{\Delta}. \end{cases}$$

Ces quadratures donnent la solution complète de la question; elles feront connaître les diverses circonstances du choc tant que la vitesse v ne deviendra pas nulle, auquel cas on ne connaîtrait plus la direction du frottement.

On peut interpréter géométriquement les formules précédentes. Construisons dans le plan tangent la courbe auxiliaire lieu du point dont les coordonnées à l'instant t sont

$$x = f\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\, dt, \quad y = f\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\, dt.$$

On voit que le rayon vecteur de cette courbe représente en grandeur et en direction la percussion tangentielle. L'arc de la courbe, compté à partir de l'origine, a pour valeur

$$s = f\int_0^t \mathrm{N}\, dt,$$

et par conséquent il est égal à la percussion normale multipliée par le coefficient de frottement. Si l'on différentie d'ailleurs les formules qui donnent x et y, on trouvera

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi.$$

La direction de la tangente à cette courbe auxiliaire est donc la même que celle de la vitesse relative tangentielle à l'instant t. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Il existe une courbe située dans le plan de contact, passant au point de contact et donnant la loi du choc. Son rayon vecteur représente la percussion tangentielle due au frottement; sa tangente a la direction de la vitesse relative et son arc, compté à partir de l'origine, est égal au produit du coefficient de frottement par la percussion normale reçue par chacun des corps depuis le commencement du choc.

Il résulte des formules (25) que cette courbe satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0\sin\varphi_0 - a'x - b'y + c's}{v_0\cos\varphi_0 - ax - by + cs},$$

et par conséquent les recherches précédentes peuvent être considérées comme donnant l'intégrale de cette équation (¹).

Revenons aux formules (29) et voyons comment on déterminera la fin du choc. Dans le cas des corps mous, il n'y a pas de diffi-

---

(¹) Considérons d'une manière générale l'équation differentielle

$$(a)\qquad \frac{f(y')+\int F(y')X\,dx}{\varphi(y')+\int \Phi(y')X\,dx}=\theta(y'),$$

où y' désigne $\frac{dy}{dx}$ et X une fonction de la seule variable x. Il est aisé de reconnaître qu'elle comprend, comme cas particulier, celle qui a été considérée dans le texte. Il suffit, en effet, pour retrouver cette dernière équation, de prendre

$$X=1,\quad \theta(y')=y',$$
$$F(y')=-a'-b'y'+c'\sqrt{1+y'^2},\quad f(y')=v_0\sin\varphi_0,$$
$$\Phi(y')=-a-by'+c\sqrt{1+y'^2},\quad \varphi(y')=v_0\cos\varphi_0.$$

Nous allons montrer qu'on peut intégrer très simplement l'équation (a). Pour cela, posons

$$\varphi(y')+\int \varphi(y')X\,dx=\lambda,$$

et par conséquent

$$f(y')+\int F(y')X\,dx=\lambda\theta(y');$$

on aura, en différentiant,

$$\frac{d\varphi}{dy'}dy'+\Phi(y')X\,dx=d\lambda,$$
$$\frac{df}{dy'}dy'+F(y')X\,dx=\theta(y')d\lambda+\lambda\frac{d\theta}{dy'}dy',$$

et, si l'on élimine $X\,dx$, on trouvera

$$\frac{F(y')}{\Phi(y')}=\frac{\theta(y')\frac{d\lambda}{dy'}+\lambda\frac{d\theta}{dy'}-\frac{df}{dy'}}{\frac{d\lambda}{dy'}-\frac{d\varphi}{dy'}}.$$

Cette équation linéaire fera connaître λ en fonction de y'. On déterminera ensuite x au moyen de la formule

$$X\,dx=\left(\frac{d\lambda}{dy'}-\frac{d\varphi}{dy'}\right)dy',$$

où les variables sont séparées, et enfin y par la formule

$$dy=y'\,dx.$$

L'intégration de l'équation différentielle est ainsi ramenée à une série de quadratures.

Si dans l'équation (a) on remplaçait $X\,dx$ par $d\varphi(x,y)$, on serait, par une méthode culté : le choc se terminera quand la vitesse relative normale w sera réduite à zéro. Mais il peut y avoir des corps élastiques dans lesquels le frottement n'est pas nul, par exemple deux billes d'ivoire dépoli. Dans ce cas, rien ne nous guidant, on peut revenir à l'ancienne hypothèse et supposer que, lorsque les corps se détendent après s'être comprimés, ils reçoivent une percussion normale égale à celle qui s'est développée dans la première partie du choc. Alors il suffira de calculer la percussion normale relative au cas du choc des corps mous et de prolonger le choc jusqu'à ce que la percussion normale ait pris une valeur double de celle que l'on a ainsi calculée. Pour plus de netteté, nous traiterons toujours, dans ce qui va suivre, le cas du choc des corps mous.

D'après les hypothèses faites sur le sens de l'axe des z, la percussion $\int \mathrm{N}\,dt$ sera toujours positive et la valeur initiale w_0 de w sera négative. Par suite, la première des formules (29) nous montre que φ, partant de la valeur φ_0, devra varier de telle manière que $\frac{d\varphi}{\Delta}$ soit positif; donc on connaîtra le sens de la variation de φ. Désignons par α la première racine de l'équation

$$\Delta = 0$$

que φ atteindrait en variant dans le sens indiqué, et cherchons si le choc sera terminé avant que φ ait atteint la valeur α. L'équation qui définit la fin du choc est

$$w = 0 = w_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{A}'' v\, d\varphi}{\Delta}. \tag{30}$$

---

analogue, ramené à l'intégration de l'équation

$$\varphi(x, y) = \mathrm{F}(y').$$

L'équation (a) comprend comme cas particulier les suivantes :

$$\frac{ax + by + cs + \mathrm{F}(y')}{a'x + b'y + c's + \Phi(y')} = \theta(y')$$

et

$$\frac{ax^2 + \mathrm{F}(y') + c\int x\,dy}{a'x^2 + \Phi(y') + c'\int x\,dy} = \theta(y').$$

Cette dernière équation, correspondante au cas où l'on prend $\mathrm{X} = x$, équivaut à une relation assez générale entre la tangente et l'aire d'un segment de la courbe cherchée.

Si cette équation admet une racine comprise entre zéro et α, il n'y aura pas de difficulté; les formules (25), (29) seront applicables jusqu'à la fin du choc, et elles feront connaître les percussions tangentielles et normales, et par conséquent la vitesse finale des deux corps. Je dis que ce cas se présentera toujours toutes les fois que la quantité que nous avons désignée par H sera positive pour $\varphi = \alpha$.

En effet, nous avons vu que l'expression

$$X(aX + bY + cZ) + Y(a'X + b'Y + c'Z) + Z(a''X + b''Y + c''Z)$$

est toujours positive, quelles que soient les quantités X, Y, Z. Faisons

$$X = -f\cos\varphi, \quad Y = -f\sin\varphi, \quad Z = 1;$$

on aura, en conservant les notations adoptées,

$$A'' - f(A'\cos\varphi + A''\sin\varphi) > 0,$$

ce qui, d'après les formules (25), équivaut à l'inégalité

$$dw - f dv > 0,$$

et, par conséquent,

$$(31) \qquad w - w_0 - f(v - v_0) > 0.$$

Or, si φ se rapproche de la racine α, $\frac{d\varphi}{\Delta}$ devient infini positif, puisque nous avons vu que le signe de $d\varphi$ est toujours celui de Δ. Si donc H est positif dans le voisinage de la valeur α de φ, l'intégrale $\int \frac{H\,d\varphi}{\Delta}$ deviendra infinie positive, et il en sera de même de v, qui a pour valeur

$$(32) \qquad v = v_0 e^{\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{H\,d\varphi}{\Delta}}.$$

Ainsi, si φ variait de zéro à α, v et par conséquent $v - v_0$ croîtraient indéfiniment, et, en vertu de l'inégalité (31), il en serait de même de w. Donc, avant que φ ait atteint la valeur α, w aura pris tel accroissement positif que l'on voudra, et, comme sa valeur initiale est négative, elle aura passé par zéro ou par toute autre valeur positive qui marquera la fin du choc.

Si, au contraire, on a $H < 0$ pour $\varphi = \alpha$, il pourra se faire sans doute qu'il y ait encore une valeur de φ comprise entre φ_0 et α et annulant w, mais il pourra aussi arriver que φ atteigne la valeur α sans que w soit devenue nulle. En effet, dans ce cas, v *deviendra nulle pour* $\varphi = \alpha$ et l'intégrale

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{A'' v \, d\varphi}{\Delta},$$

qui tendra vers une valeur finie quand φ s'approchera de α, aura un maximum en valeur absolue. Si w_0, par exemple, est supérieure à ce maximum, l'équation (30) n'aura pas de racine entre φ_0 et α.

Voilà donc un cas tout aussi général que le précédent et qui avait été négligé, celui où la vitesse relative tangentielle devient nulle avant la fin du choc. Nous allons l'étudier d'une manière détaillée.

Et d'abord l'étude qui a été faite de questions analogues (roulement des sphères, des cylindres) nous avertit qu'il peut se produire deux espèces tout à fait différentes de mouvements :

Ou bien la vitesse relative tangentielle continuera à demeurer nulle, et alors la force de frottement ne sera assujettie qu'à l'unique condition d'être inférieure à la force normale multipliée par le coefficient de frottement ; en d'autres termes, la force appliquée à l'un des corps devra faire avec la normale commune un angle moindre que l'angle de frottement. Ce sont là les lois du frottement quand il y a *repos relatif* au contact.

Ou bien la vitesse relative tangentielle reprendra des valeurs finies, et il reste à déterminer le mouvement qui pourra se produire dans ces conditions.

Examinons d'abord le premier cas. Soient N la composante normale de la force à un instant quelconque, θ, θ_1 ses composantes tangentielles. Puisque la vitesse tangentielle v doit demeurer nulle, il faut que l'on ait

$$a\theta + b\theta_1 + c\mathrm{N} = 0,$$
$$a'\theta + b'\theta_1 + c'\mathrm{N} = 0,$$

ce qui donne

$$\theta = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}\mathrm{N}, \quad \theta_1 = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\mathrm{N}.$$

Exprimons que la composante tangentielle est plus petite que fN ;

nous aurons l'inégalité

$$f^2 N^2 - \theta^2 - \theta_1^2 > 0,$$

et, par conséquent, en posant

$$(33) \qquad K = f^2(ab' - ba')^2 - (ac' - ca')^2 - (bc' - cb')^2,$$

il faudra que l'on ait

$$K > 0.$$

Si cette inégalité n'est pas satisfaite, le mouvement précédent sera impossible.

Examinons maintenant ce qui arrivera si l'on suppose que la vitesse tangentielle relative, après être devenue nulle, reprenne des valeurs finies. Alors l'équation différentielle

$$(A' \cos\varphi - A \sin\varphi)\,dv = v(A' \sin\varphi + A \cos\varphi)\,d\varphi$$

nous montre que la seule solution possible sera

$$A' \cos\varphi - A \sin\varphi = 0, \quad d\varphi = 0.$$

Ainsi, dans le mouvement qui se produira, la direction et le sens de la vitesse relative demeureront constants, et φ ne pourra être qu'une des racines de l'équation précédente.

Or cette équation admet quatre racines qui peuvent être toutes réelles. Nous sommes donc amenés à discuter jusqu'à cinq mouvements différents qui peuvent se produire : ceux, au nombre de quatre, qui correspondent à ces différentes racines, et celui pour lequel la vitesse tangentielle demeure nulle. Si deux de ces mouvements étaient possibles simultanément, on rencontrerait un fait très intéressant, mais qu'aucun des exemples traités et connus ne nous permet de prévoir. Nous allons en effet montrer, par une discussion détaillée, qu'il n'y a jamais indétermination, qu'il n'y a jamais à choisir entre deux ou plusieurs mouvements également possibles.

Nous développerons d'abord quelques remarques préliminaires.

1° Dans le cas où la vitesse tangentielle reprend une valeur finie, on a, nous l'avons vu, $\varphi =$ const., et les formules (25) nous donnent sans difficulté

$$v = H \int N\,dt,$$

Or, v et $\int N\,dt$ sont positifs ; il faut donc que H le soit aussi. Ainsi, pour que le mouvement correspondant à une racine α de l'équation $\Delta = 0$ soit possible, il faut que cette racine α rende la quantité H positive. Il suit de là que si la vitesse tangentielle est devenue nulle pour une certaine valeur α de φ, comme cette valeur α est une racine de Δ rendant H négative, la vitesse ne peut reprendre une valeur finie, φ étant égal à α.

2° Puisque le signe de H pour chaque racine de Δ a une grande importance, cherchons à le déterminer. A cet effet, nous remarquerons l'identité fondamentale dans cette discussion

$$H + \Delta' = -af\sin^2\varphi - b'f\cos^2\varphi + (b + a')f\sin\varphi\cos\varphi.$$

En vertu de l'une des inégalités (26), le second membre est toujours négatif. Donc H *est négative pour toute racine de* Δ *qui rend la dérivée* Δ' *positive ou nulle*. Telle est la proposition qui rendra possible la discussion suivante.

3° Formons l'équation qui donne les quatre valeurs de H; on a

$$A'\cos\varphi - A\sin\varphi = 0, \quad A'\sin\varphi + A\cos\varphi = H,$$

et, par conséquent,

$$H = \frac{A}{\cos\varphi} = \frac{A'}{\sin\varphi},$$

ou, en développant,

$$c - (af + H)\cos\varphi - bf\sin\varphi = 0,$$
$$c' - a'f\cos\varphi - (b'f + H)\sin\varphi = 0,$$

ce qui donne, en éliminant φ,

$$\left(ca' - ac' - c'\frac{H}{f}\right)^2 + \left(cb' - bc' + \frac{cH}{f}\right)^2$$
$$= \left[(ab' - ba') + \frac{H}{f}(a + b') + \frac{H^2}{f^2}\right]^2 f^2.$$

L'équation développée est

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{H^4}{f^2} + 2(a + b')\frac{H^3}{f} \\ &\quad + [f^2(a + b')^2 + 2f^2(ab' - ba') - c^2 - c'^2]\frac{H^2}{f^2} \\ &\quad + 2[(a + b')(ab' - ba')f^2 - c(cb' - bc') + c'(ca' - ac')]\frac{H}{f} \\ &\qquad + f^2(ab' - ba')^2 - (ca' - ac')^2 - (cb' - bc')^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Le dernier terme de cette équation est la quantité que nous avons désignée par K.

Ces remarques faites, nous pouvons commencer la discussion.

1° Supposons d'abord que l'équation $\Delta = 0$ n'ait pas de racine réelle. Alors les quatre valeurs de Δ sont imaginaires et la quantité K est positive, puisqu'elle est le dernier terme de l'équation précédente, dont les quatre racines sont imaginaires. Si au début du choc la vitesse tangentielle est nulle, elle demeurera nécessairement nulle, K étant positif et aucun des quatre autres mouvements n'étant réel. Si au contraire elle n'est pas nulle, elle ne le deviendra jamais, et les formules (29) seront applicables jusqu'à la fin du choc.

2° Si l'équation $\Delta = 0$ a deux racines réelles, pour une de ces racines la dérivée Δ' sera positive, et, par conséquent, la valeur correspondante de H sera négative. Si les deux valeurs réelles de H sont négatives, le dernier terme de l'équation (34) en H sera positif, et, par suite, si la vitesse v devient nulle à un instant du choc, elle ne pourra que le demeurer. Au contraire, si une seule valeur de H est négative, K sera aussi négatif, et, si la vitesse v devient nulle avant la fin du choc, elle ne pourra pas le rester; mais il se produira le mouvement dans lequel φ prend une valeur égale à la racine de Δ pour laquelle on a $H > 0$.

3° Enfin, si l'équation $\Delta = 0$ a ses quatre racines réelles, il y en aura deux rendant Δ' positive, et, par conséquent, *deux au moins pour lesquelles on aura* $H < 0$.

Si $K < 0$, il y a un nombre impair de valeurs de H négatives; il y en a donc alors trois. Ainsi, il existe trois valeurs de φ pour lesquelles la vitesse v peut devenir nulle; mais, K étant négatif, cette vitesse ne pourra rester nulle, et il se produira le mouvement dans lequel φ prendra une valeur égale à l'unique racine de Δ pour laquelle on a $H > 0$.

Si $K > 0$, nous allons montrer que l'équation (34) n'a que des permanences, et par conséquent que les quatre valeurs de H sont négatives. Mais, pour simplifier le calcul, nous admettrons que l'on ait choisi les axes de telle manière que c' soit nulle. Cela revient à faire passer le plan des xz par la direction de la vitesse relative qui serait imprimée par les deux percussions égales et contraires dirigées suivant Oz.

On a, dans le cas qui nous occupe,

$$f^2(ab'-ba')^2-c^2(a'^2+b'^2)>0.$$

Rappelons les inégalités

$$(a'+b)^2-4ab'<0,\quad a>0,\quad b'>0,$$

qui donnent

$$(a'-b)^2<4(ab'-ba'),$$

et par conséquent

$$ab'-ba'>0.$$

Si nous nous reportons à l'équation (34), nous voyons immédiatement que le coefficient de H^3 est positif. Il reste à démontrer qu'il en est de même des coefficients de H et de H^2. Nous emploierons pour cela les deux inégalités

$$f^2>\frac{c^2(a'^2+b'^2)}{(ab'-ba')^2},$$

$$a>\frac{(a'+b)^2}{4b'}.$$

Le coefficient de $2\frac{H}{f}$ est

$$L=(a+b')(ab'-ba')f^2-c^2b'.$$

Le coefficient de f^2 étant positif, remplaçons f^2 par sa limite inférieure. Nous aurons

$$\frac{L(ab'-ba')}{c^2}>(a+b')(a'^2+b'^2)-b'(ab'-ba'),$$

ou

$$\frac{L(ab'-ba')}{c^2}>aa'^2+b'(a'^2+b'^2)+bb'a'.$$

Remplaçons encore a par sa limite inférieure, et nous aurons

$$\frac{4b'L(ab'-ba')}{c^2}>(a'^2+ba'+2b'^2)^2,$$

ce qui démontre que L est positif.

Passons au coefficient de $\frac{H^2}{f^2}$. On a, en le désignant par L_1,

$$L_1 = f^2[(a+b')^2 + 2(ab' - ba')] - c^2$$

et, en remplaçant f^2 par sa limite inférieure,

$$\frac{L_1(ab'-ba')^2}{c^2} > (aa'+bb')^2$$
$$+ 4ab'(a'^2+b'^2) + (a'^2+b'^2)(b'^2 - b^2 - 2ba').$$

Si l'on remplace dans le second terme a par sa limite inférieure, on trouve

$$\frac{L_1(ab'-ba')^2}{c^2} > (aa'+bb')^2 + (a'^2+b'^2)^2,$$

et, par conséquent, L_1 est encore positif.

Ainsi, toutes les fois que l'équation $\Delta = 0$ aura ses quatre racines réelles et que K sera positif, les quatre valeurs de H seront négatives. Alors, pour quatre valeurs de φ, la vitesse v pourra devenir nulle; mais, quand elle le sera devenue, elle restera nulle jusqu'à la fin du choc.

En résumé, *il n'y a jamais d'indétermination dans le mouvement.*

Dans le cas où la vitesse v demeurera nulle, il faudra substituer aux équations (29) les suivantes,

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= a\theta + b\theta_1 + c\mathrm{N},\\ 0 &= a'\theta + b'\theta_1 + c'\mathrm{N},\\ w &= w'_0 + a''\theta + b''\theta_1 + c''\mathrm{N}, \end{aligned}\right.$$

qui serviront jusqu'à la fin du choc; w'_0 désigne la valeur qu'a w au moment où la vitesse v devient nulle.

J'indiquerai, en terminant, un exemple assez simple qui met en évidence la plupart des cas de la discussion précédente; c'est celui d'un corps solide de révolution qui vient rencontrer obliquement un plan fixe.