Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 113-126

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_113_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SOMOFF. — THEORETISCHE MECHANIK. T. I et II. 2 vol. in-8°, 417-407 pages, 1878-1879.

M. Alexandre Ziwet a entrepris de traduire, du russe en allemand, l'important Traité de Mécanique rationnelle de Somoff. Les deux premiers Volumes contenant la Cinématique, l'introduction à la Statique et à la Dynamique, et la Statique, sont parus; c'est tout ce que l'auteur a publié de son vivant, et même un peu plus : la fin de la Statique a été publiée par les soins de l'Académie des Sciences, d'après un manuscrit entièrement prêt pour l'impression. C'est à M. Somoff fils que l'on devra la Dynamique, rédigée d'après les cahiers de son père.

Somoff introduit systématiquement, au début de son Ouvrage, la notion de dérivée géométrique d'un segment de droite, notion due à M. Resal et qui résulte immédiatement de la notion de différence géométrique; la vitesse, les accélérations des divers ordres d'un point sont les dérivées géométriques successives du vecteur de ce point, regardé comme une fonction du temps, l'origine des vecteurs étant un point quelconque. La différentielle géométrique, en désignant la variable par t, sera le produit par dt de la dérivée géométrique, et l'on s'élève facilement à la notion de différentielles d'ordre supérieur. L'analogie entre les dérivées géométriques et les dérivées analytiques est complète tant que les segments de droite (u), (v), (w), ..., fonctions d'une variable t que l'on considère, n'entrent que dans des expressions de la forme

$$a(u)+b(v)+c(w)+\ldots,$$

où a, b, c, ... sont des nombres constants et où le signe $+$ est le symbole de l'addition géométrique; la dérivée géométrique de cette expression est alors

$$a(u)'+b(v)'+c(w)'+\ldots,$$

où $(u)'$, $(v)'$, $(w)'$, ... sont les dérivées géométriques des segments (u), (v), (w), ... Cette analogie se poursuit plus loin quand on prend pour produit de deux segments de droite le *produit intérieur* (d'après Grassmann) de ces deux quantités, c'est-à-dire le produit des nombres qui mesurent les deux segments par le cosinus de leur angle; Somoff, comme M. Resal, emploie la dénomination de *produit géométrique;* le produit géométrique de deux sommes géométriques est alors une somme analytique dont les éléments sont les produits géométriques des éléments des deux sommes géométriques, et l'auteur montre que la formule relative à la dérivée d'un produit de deux facteurs s'étend aux produits géométriques. Dans cette formule, la dérivée du produit est une dérivée analytique; la somme par laquelle elle est exprimée est une somme analytique dont les éléments sont les produits géométriques d'un facteur par la dérivée géométrique de l'autre; cette formule conduit immédiatement à l'extension de la règle de Leibnitz pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit.

Une autre analogie, signalée depuis longtemps par Möbius [*Ueber die phoronomische Deutung des Taylor'schen Theorem*, (*Journal de Crelle*, t. 36, p. 91)], et dont Somoff tire un grand parti, concerne le sens géométrique qu'on peut attribuer à la série de Taylor appliquée à un segment de droite, fonction d'une variable, en regardant les dérivées qui figurent dans cette série comme des dérivées géométriques et les signes $+$ comme des signes d'addition géométrique. Par exemple, le déplacement d'un point m pendant le temps τ peut être regardé comme la somme géométrique (indéfinie) d'une suite de déplacements effectués dans la direction de la vitesse v et des accélérations $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$, et dont les valeurs sont respectivement

$$v\tau,\quad \frac{1}{1.2}v_1\tau^2,\quad \frac{1}{1.2.3}v_2\tau^3,\quad \ldots,\quad \frac{1}{1.2\ldots n}v_{n-1}\tau^n,\quad \ldots.$$

C'est en partant de ces diverses notions que l'auteur établit les formules relatives aux vitesses, aux accélérations, à la courbure, à la torsion, et qu'il obtient, en particulier, les expressions des projections sur la tangente à la trajectoire, la normale principale et l'axe du plan osculateur du déplacement d'un point mobile; il en déduit l'expression, poussée jusqu'aux termes du cinquième ordre, de la corde en fonction de l'arc.

Si l'on considère un segment de droite qui dépende de deux variables, on aura à considérer les dérivées géométriques relatives à ces deux variables, les différentielles totales géométriques, etc. Le théorème relatif à l'interversion de l'ordre des différentiations subsiste. On peut, de même, considérer des *variations* géométriques. Dans un intéressant Chapitre, l'auteur, en se plaçant à ce point de vue, établit les propriétés fondamentales des lignes géodésiques et des brachistochrones.

On désigne sous le nom de *fonction d'un point m* toute quantité qui dépend de la position de ce point m. Le lieu des points pour lesquels une telle fonction est constante est une surface de niveau. V étant une fonction du point m et ΔV la différence des valeurs de la fonction V pour les positions voisines M, M′ du point M, le rapport $\frac{\Delta V}{MM'}$, quand M′ se rapproche du point M de façon que la droite MM′ tende vers une certaine limite, tend lui-même vers une certaine limite $\frac{dV}{ds}$ qui est dite la dérivée de la fonction V relativement au déplacement infiniment petit ds. Quand la direction de ce déplacement se confond avec la direction normale à la surface de niveau, cette dérivée n'est autre que le *paramètre différentiel du premier ordre de la fonction* V (d'après Lamé). Somoff emploie simplement le mot de *paramètre* et regarde ce paramètre comme un segment de droite dont la valeur P est égale à $\frac{dV}{dn}$ et dont la direction est celle de la normale. On a, d'ailleurs, la relation

$$\frac{dV}{ds} = P\cos(P,\ ds).$$

Si l'on a affaire à une fonction $V = f(q)$ d'une fonction q d'un point m, son paramètre est le produit du paramètre de la fonction q par la dérivée $f'(q)$; pour une fonction composée

$$V = f(q_1, q_2, q_3, \ldots),$$

où entrent plusieurs fonctions d'un même point, le paramètre est la somme géométrique des paramètres partiels de cette fonction par rapport aux variables $q_1, q_2, q_3, \ldots$.

L'auteur donne différentes applications de ces théorèmes et traite des systèmes de coordonnées curvilignes les plus usités.

Quand les trois surfaces de niveau q_1, q_2, q_3 qui déterminent la position d'un point m ne sont pas orthogonales, il y a lieu de considérer, outre le trièdre des trois tangentes aux courbes $q_3 q_2$, $q_1 q_3$, $q_2 q_1$, le trièdre supplémentaire formé par les trois normales. L'auteur donne les formules qui permettent de passer d'un trièdre à l'autre; il est amené à introduire, outre les paramètres différentiels h_1, h_2, h_3 relatifs aux trois surfaces de niveau, les *paramètres réciproques* a_1, a_2, a_3; a_1, par exemple, est l'inverse de la dérivée de la coordonnée q_1 relativement à un déplacement suivant la tangente à la courbe $q_3 q_2$. Ce paramètre réciproque est regardé comme un segment porté sur la même tangente. Dans le cas d'un système orthogonal, les deux paramètres, direct et *réciproque*, qui se correspondent ont des valeurs dont le produit est effectivement égal à $+1$. Le carré de la vitesse d'un point m peut se mettre sous la forme

$$\Sigma \overline{a_i a_r} q'_i q'_r,$$

où $\overline{a_i a_r}$ désigne le produit géométrique des deux paramètres réciproques et où q'_i, q'_r sont les dérivées de q_i, q_r par rapport au temps. Somoff donne les expressions des projections et des composantes de la vitesse et des accélérations des divers ordres relativement aux deux systèmes d'axes précédemment définis, et en déduit les formules relatives à la courbure. Si l'on considère un point mobile et une fonction de ce point, ses paramètres peuvent être regardés comme des segments de droite fonctions du temps. Somoff donne les expressions des projections de ces quantités et de leurs dérivées géométriques sur les normales aux trois surfaces de niveau dont l'intersection détermine le point considéré.

Tout ce qui précède concerne la Cinématique du point, qui, d'ailleurs, occupe la partie la plus importante de l'Ouvrage; l'auteur traite ensuite, au double point de vue de la Géométrie et de l'Analyse, le mouvement d'un système de forme invariable et développe les belles propriétés relatives au complexe linéaire qui correspond à chaque système de vitesses, aux deux surfaces réglées qui sont les lieux des axes instantanés du mouvement hélicoïdal dans l'espace et dans le système mobile, aux accélérations des divers ordres. L'étude du déplacement fini d'un système de forme invariable qui a un point fixe lui permet d'introduire d'une façon simple les trois paramètres λ, μ, ν, au moyen desquels on peut, comme O. Rodrigues l'a montré, exprimer rationnellement les neuf cosinus directeurs de trois directions rectangulaires, et qui peuvent ainsi remplacer, en donnant plus de symétrie aux formules, les trois angles d'Euler. Les composantes p, q, r de la vitesse angulaire d'un système de forme invariable qui se meut autour d'un point fixe s'expriment simplement au moyen de ces quantités et de leurs dérivées par rapport au temps, comme au moyen des angles d'Euler et de leurs dérivées. Enfin le dernier Chapitre concerne les mouvements relatifs et contient la généralisation du théorème de Coriolis pour les accélérations d'ordre quelconque. La démonstration de ce théorème généralisé que donne Somoff est extrêmement simple; c'est une suite immédiate de la signification cinématique donnée par Möbius à la série de Taylor.

L'Introduction à la Statique et à la Dynamique se rapporte à la Géométrie des masses.

Se plaçant à un point de vue indiqué par Cauchy (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 188), l'auteur donne au mot *masse* une signification très générale. Étant données une portion d'espace E à une, deux ou trois dimensions et une autre quantité m ayant une valeur déterminée quand la quantité E est elle-même déterminée et s'annulant en même temps qu'elle, la quantité m est regardée comme une masse dont l'espace est E; ainsi le temps pendant lequel un mobile décrit une portion de sa trajectoire peut être regardé comme la masse de cette portion de trajectoire, etc. Si ΔE est une portion de l'espace E dont toutes les dimensions soient infiniment petites, et Δm la valeur correspondante de la masse, la limite du rapport $\frac{\Delta m}{\Delta E}$ est la densité au point entouré par ΔE; dans l'exemple précédent, la densité en un point serait l'inverse de la vitesse. En désignant la densité en un point de E par ρ, la masse m est représentée par l'intégrale

$$m = \int \rho \, dE,$$

étendue à tous les points qui constituent l'espace E. L'auteur est ainsi amené à donner diverses formules concernant les intégrales étendues à tous les points d'une ligne, d'une surface ou d'un volume.

De même que l'on considère des dérivées géométriques, on peut aussi considérer des *intégrales* géométriques. Si (u) désigne un segment de droite dont la grandeur et le sens soient définis pour chaque point de l'espace E, l'intégrale géométrique

$$\int (u)\, d\mathrm{E}$$

sera la limite de la somme géométrique

$$\Sigma (u)\, \Delta\mathrm{E},$$

étendue à toutes les positions $\Delta\mathrm{E}$ de l'espace E, et le segment de droite

$$\frac{1}{\mathrm{E}}\int (u)\, d\mathrm{E}$$

sera la *moyenne* des segments (u) pour l'espace E. Si (u) désigne le rayon vecteur qui joint le pôle O à un point de l'espace E entouré par l'élément de masse dm, l'expression

$$(r) = \frac{1}{m}\int (u)\, dm,$$

où l'intégrale géométrique est étendue à tous les points de l'espace E, définit un segment OC dont l'extrémité C ne dépend pas du pôle O et n'est autre que le centre de masse de E.

Après la théorie des centres de gravité, l'auteur développe celle des moments d'inertie.

Il s'occupe ensuite des formules relatives à la variation de la masse m contenue dans une portion d'espace E, où la densité ρ en un point M est une fonction continue du point M et d'une variable t qui sera, si l'on veut, le temps. Si l'on suppose que, lorsque t varie, les éléments de la masse m se meuvent sans se séparer, de façon à constituer à chaque instant une portion continue d'espace analogue à E, la masse m, pendant un intervalle de temps δt, subira un accroissement δm; s'il s'agit, par exemple, d'un volume, rapporté à des coordonnées quelconques q_1, q_2, q_3, dont la valeur au temps t soit donnée par l'intégrale

$$\mathrm{V} = \int \omega\, dq_1\, dq_2\, dq_3$$

étendue à tous les points de l'espace E, la masse étant

$$m = \int \rho\omega\, dq_1\, dq_2\, dq_3,$$

l'auteur établit directement, sans le secours du calcul des variations, les formules

$$\delta m = \int \omega\,\delta\rho + \rho\left[\frac{\partial(\omega\,\delta q_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\omega\,\delta q_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\omega\,\delta q_3)}{\partial q_3}\right] dq_1\, dq_2\, dq_3,$$

$$\delta \mathrm{V} = \int \left[\frac{\partial(\omega\,\delta q_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\omega\,\delta q_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\omega\,\delta q_3)}{\partial q_3}\right] dq_1\, dq_2\, dq_3,$$

où les δ correspondent aux variations du temps. Si l'on suppose que les dimensions du volume V entourant le point M décroissent indéfiniment, l'expression

$$\lim \frac{1}{\mathrm{V}}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = \frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial(\omega q'_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\omega q'_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\omega q'_3)}{\partial q_3}\right]$$

est la dilatation cubique au point M; q'_1, q'_2, q'_3 désignent les dérivées de q_1, q_2, q_3 par rapport à t.

Si, maintenant, le mouvement est tel que la vitesse de chaque point, à l'époque t, soit le paramètre différentiel d'une certaine fonction φ de ce point, en posant

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_r} = \varphi_r$$

et

$$\Theta = \tfrac{1}{2}\,\Sigma(h_r h_s)\,\varphi_r \varphi_s,$$

où $(h_r h_s)$ désigne le produit géométrique des paramètres h_r et h_s des fonctions q_r et q_s, on aura

$$q'_r = \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_r},$$

et l'expression

$$\Delta_2 \varphi = \lim \frac{1}{\mathrm{V}}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = \frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial\left(\omega\,\dfrac{\partial\Theta}{\partial\varphi_1}\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(\omega\,\dfrac{\partial\Theta}{\partial\varphi_2}\right)}{\partial q_2} + \frac{\partial\left(\omega\,\dfrac{\partial\Theta}{\partial\varphi_3}\right)}{\partial q_3}\right]$$

sera le *paramètre différentiel du second ordre* de la fonction de point φ; c'est, en coordonnées quelconques, ce que devient l'expression

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

relative aux coordonnées rectangulaires. L'auteur donne les formules analogues pour les surfaces.

Les fonctions φ, pour lesquelles on a $\Delta_2 \varphi = 0$, sont les fonctions *thermométriques* de Lamé, et les surfaces de niveau sont les surfaces *isothermiques,* dont Somof développe les propriétés les plus essentielles.

Il traite, en particulier, de la fonction potentielle

$$\int \frac{dm}{r},$$

qui possède le caractère des fonctions thermométriques pour les points extérieurs au volume correspondant à l'intégrale; le retour à la définition qu'il a donnée précédemment lui permet d'établir la formule

$$\Delta_2 \int \frac{dm}{r} = -4\pi\rho$$

pour les points intérieurs au volume considéré. La fin de cet important Chapitre est consacrée à l'établissement des formules de Green.

Nous arrivons à la Statique. L'auteur regarde comme causes du mouvement l'*inertie* et les *forces,* celles-ci étant considérées comme des causes *extérieures* aux points sur lesquels elles agissent. Une force qui agit sur un point ne peut en modifier instantanément la vitesse; elle est *cause* des accélérations de ce point. Quand le mouvement d'un point est composé de plusieurs mouvements, il est le résultat de causes qui, en agissant indépendamment, produiraient les mouvements composants et réciproquement. Telle est la forme que donne Somoff aux définitions et aux postulats expérimentaux de la Mécanique.

Quand un point, à l'époque t, a la vitesse v et les accélérations $v_1, v_2, \ldots$, on a vu en Cinématique que son mouvement pendant l'instant suivant τ pouvait être regardé comme composé de mouvements élémentaires rectilignes dont les directions sont celles des droites (v), (v_1), (v_2), $\ldots$, les chemins parcourus pendant l'intervalle τ étant

$$v\tau,\ v_1\frac{\tau^2}{2},\ v_2\frac{\tau^3}{2.3},\ \ldots;$$

les causes du mouvement pendant l'intervalle τ doivent donc être regardées comme l'ensemble des causes qui produiraient ces mouvements élémentaires.

Si, maintenant, on considère un point matériel partant du repos, sur lequel agissent successivement deux forces, il aura dans le premier mouvement des accélérations v_1, v_2, v_3, ... et dans le second des accélérations $u_1, u_2, u_3, \ldots$; pendant l'intervalle de temps τ, le premier mouvement pourra être regardé comme composé des mouvements élémentaires rectilignes

$$v_1\frac{\tau_2}{2},\ v_2\frac{\tau^3}{2.3},\ \ldots,$$

et le second comme composé des mouvements rectilignes

$$u_1\frac{\tau^2}{2},\ u_2\frac{\tau^3}{2.3},\ \ldots;$$

d'après le postulat invoqué précédemment, le mouvement produit par l'ensemble des deux forces pourra être regardé comme composé des mouvements rectilignes

$$(u_1 + v_1)\frac{\tau^2}{2},\ (u_2 + v_2)\frac{\tau^3}{2.3},\ \ldots,$$

le signe $+$ désignant l'addition géométrique. Ainsi, les accélérations du mouvement produit par les deux forces agissant simultanément seront les sommes géométriques des accélérations correspondantes produites par les deux forces agissant séparément. Une force est dite constante quand les accélérations qu'elle produit sont constantes en grandeur et en direction; mais, les accélérations du second ordre, du troisième ordre, etc., étant les dérivées géométriques de l'accélération du premier ordre, elles sont nécessairement nulles. Si deux forces constantes agissent séparément sur un même point, elles peuvent être regardées comme des grandeurs proportionnelles aux accélérations qu'elles lui communiquent, d'où la notion de masse. Enfin, si sous l'influence d'une force variable un point de masse m a, à l'époque t, les accélérations v_1, v_2, ..., les causes de son mouvement pendant l'intervalle suivant τ sont l'inertie d'une part et de l'autre les causes qui produiraient les mouvements $\frac{1}{2}v_1\tau^2$, $\frac{1}{2.3}v_2\tau^3$, ... La force constante mv_1 produirait le premier de ces mouvements; on convient de la regarder comme la valeur, au temps t, de la force variable qui agit sur le point. Somoff propose, pour les quantités mv_2, mv_3, ..., qui en sont les dérivées géométriques successives, les noms d'*efforts* du premier, du second ordre, etc.

Le Chapitre suivant est consacré aux forces qui admettent un potentiel et à l'étude particulière de ce potentiel dans le cas de la loi de Newton : l'auteur avait déjà touché quelques points de cette étude, dans un Chapitre précédent, à propos du paramètre différentiel du second ordre d'une fonction de point et des fonctions thermométriques. Il traite avec quelques détails de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point; l'étude de l'attraction d'un cylindre lui fournit la notion du potentiel logarithmique dont il avait aussi traité précédemment; enfin il établit le théorème de Lejeune-Dirichlet sur les conditions qui permettent de reconnaître qu'une fonction donnée est le potentiel d'une masse donnée. La fin du Chapitre est consacrée à l'étude de l'attraction, suivant la loi de Newton, par une masse distribuée sur une surface, et, en particulier, à l'analyse des travaux de Green sur ce sujet.

Les quatre derniers Chapitres concernent la réduction des forces appliquées à un corps solide, les conditions d'équilibre et les propositions de Géométrie qui se rapportent à cette théorie.

L'auteur introduit d'abord la notion de travail et démontre le théorème suivant :

Le vecteur principal (Hauptvector), *le moment principal* (Hauptmoment) *et le travail total de toutes les forces relativement à tous les déplacements d'un système de points qui laissent invariables les distances mutuelles des points d'application des forces, sont indépendants des forces intérieures qui obéissent à la loi de l'action et de la réaction.*

Le vecteur principal, pour une origine O, est la somme géométrique des forces agissant sur le système de points, à laquelle on attribue le point O pour origine; le moment principal est la somme géométrique des moments de toutes les forces par rapport au même point O.

Il établit ensuite que la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un système de forces appliquées à un système quelconque de points consiste en ce que le travail de toutes les forces, tant extérieures qu'intérieures, soit nul pour tous les déplacements possibles et que, pour l'équilibre d'un système de points liés invariablement les uns aux autres, il faut et il suffit pour l'équilibre que le vecteur principal et le moment principal de toutes les forces soient nuls. Il donne ensuite les formules relatives aux conditions d'équilibre et au complexe linéaire qui correspond à tout système de forces.

Les équations d'équilibre sont au nombre de six; on peut, dans ces équations, mettre en évidence les grandeurs des forces et les coordonnées de leurs lignes d'action. Si le nombre n des forces est inférieur à six, on obtiendra, par l'élimination des nombres qui les mesurent, $6-n+1$ équations de condition entre les coordonnées des lignes d'action; en regardant l'une de ces lignes comme inconnue, on obtient les équations d'autant de complexes linéaires passant par les autres lignes d'action et auxquels doit appartenir la ligne d'action inconnue; en outre, en supposant toujours $n-1$ des lignes d'action données, on peut se proposer de déterminer les grandeurs des n forces pour que l'équilibre ait lieu. L'auteur traite ce problème pour les cas de $n=2, 3, 4, 5, 6$ et développe une suite de théorèmes empruntés en partie à la *Statique* de Möbius. Puis viennent l'étude des systèmes équivalents, la réduction des forces à deux ou à une force et un couple et les propriétés géométriques qui dépendent de cette réduction. Enfin le dernier Chapitre est consacré à l'étude de la façon dont varie le moment principal d'un système de forces pour une origine située dans le corps quand on déplace le corps et que, les points d'application des forces restant les mêmes points du corps, ces forces conservent la même grandeur et la même direction dans l'espace.

J. T.

MÉRAY (C.). — OBSERVATIONS SUR DEUX POINTS DU CALCUL DES VARIATIONS (1).

En premier lieu, l'auteur établit d'une façon plus simple et plus régulière qu'on ne le fait habituellement la formule qui donne la variation d'une intégrale définie. Voici maintenant le second point.

La variation de l'intégrale, que, pour fixer les idées, on suppose dépendre d'une seule fonction indéterminée y de la variable d'intégration x, étant mise sous la forme

$$A + \int_{x_0}^{x_1} dx\, B\,\delta y,$$

où A est une fonction linéaire et homogène de $\delta x_0, \delta y_0, \delta y'_0, dx_1, \ldots$ et B une fonction composée de $x, y, y', \ldots$, on dit que la nullité indéfinie de cette variation entraîne les conditions séparées

$$A = 0, \quad B = 0,$$

parce que la détermination préalable, en fonction du paramètre α, des valeurs aux limites de $x, y, y', \ldots$, qui entrent dans A par elles-mêmes et par leurs variations n'en laisse pas moins y fonction indéterminée de x et de α dans l'intervalle x_0, x_1. C'est ce raisonnement que critique M. Méray. Pour avoir affaire, sous le signe $\int$, à une fonction qui ne soit, elle et ses $k_0 - 1$ ou $k_1 - 1$ premières dérivées, soumise à aucune condition relative aux limites x_0 et x_1, il substitue à y la fonction

$$y = H + (x - x_0)^{k_0}(x - x_1)^{k_1}\eta,$$

H étant une fonction de x et de $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_{k_0-1}, x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{k_1-1}$ qui satisfasse aux conditions extrêmes et η étant une fonction de x et de α complètement arbitraire; alors la variation prend la forme

$$A' + \int_{x_0}^{x_1} dx (x - x_0)^{k_0}(x - x_1)^{k_1} B'\,\delta\eta,$$

et le raisonnement habituel montre en toute rigueur que l'on doit

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, t. VI, p. 187-192.

avoir

$$B' = 0;$$

puis la substitution inverse effectuée dans cette dernière équation, regardée comme identique, entraîne

$$B = 0.$$

HOCHHEIM (Dr ADOLF), Professor. — AL KÂFÎ FÎL HISÂB (Genügendes über Arithmetik) DES ABU BEKR MUHAMMED BEN ALHUSEIN ALKARKHÎ nach der auf der herzoglich-gothaischen Schlossbibliothek befindlichen Handschrift. III. — Magdeburg, Baensch. 28 pages.

Le *Bulletin* a donné l'analyse (1) des deux premières Parties de cette utile publication. Cette troisième Partie contient la fin de la Géométrie, la détermination du volume des pyramides, des cônes et des troncs de cônes, ainsi qu'une Introduction à la pratique des nivellements à l'aide d'instruments simples. Mais avec le Chapitre LIV commence une Section entièrement nouvelle; à l'Arithmétique, traitée exclusivement jusqu'ici, succède l'Algèbre, et cela avec un mode d'exposition qui nous offre encore plus d'intérêt que la nature propre du contenu. Le déguisement géométrique sous lequel les mathématiciens précédents, jusqu'à Alkharezmi, présentaient toujours les problèmes d'Algèbre est maintenant supprimé; les questions sont actuellement traitées par le pur calcul. L'auteur enseigne pour la première fois la multiplication et la division des monômes rationnels et irrationnels, puis la combinaison des sommes algébriques par les quatre règles; il trouve aussi l'occasion de placer la sommation des progressions arithmétiques. Ensuite l'auteur passe à l'*Aldjabr* proprement dite; il traite des équations du premier et du second degré, et il applique les méthodes trouvées à des problèmes concrets. Ces problèmes présentent un intérêt varié pour l'histoire des mœurs arabes. En dernier lieu, nous rencontrons aussi certaines questions géométriques, du genre de celles que l'historien con-

(1) 2e série, t. II, p. 236, et t. III, p. 178.

naît déjà d'après les écrits des mathématiciens hindous Bramegupta et Bhascara Acharya.

Tous les amis des recherches historiques sauront gré à l'auteur de cette édition allemande d'avoir si vaillamment poursuivi l'œuvre commencée par son compatriote Woepcke, l'illustre traducteur du Fakhrî.

S. G.