BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

C. HENRY

Sur une valeur approchée de $\sqrt{2}$ et sur deux approximations de $\sqrt{3}$

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 515-520

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_515_1>

SUR UNE VALEUR APPROCHÉE DE $\sqrt{2}$ ET SUR DEUX APPROXIMATIONS DE $\sqrt{3}$;

PAR M. C. HENRY.

Dans ces derniers temps, deux savants géomètres, M. Léon Rodet et M. Alexéief, ont cherché [1] à retrouver, entre autres exemples

[1] *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1879.

numériques moins importants : 1° la valeur de

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34},$$

signalée dans les *Préceptes du cordeau* de Baudhâyana; 2° les valeurs approchées par défaut et par excès de $\frac{265}{153}$ et de $\frac{1351}{780}$ attribuées un siècle après à $\sqrt{3}$ par Archimède (*Traité de la mesure du cercle,* proposition III).

M. Rodet a appliqué à la série de Baudhâyana une formule du Persan Al-Morouzi et aux fractions d'Archimède le procédé d'un géomètre français du XVI^{e} siècle, Estienne de la Roche. Ce procédé, appelé par l'auteur *règle de médiation,* repose sur ce principe : si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ désignent deux fractions à termes positifs, la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est comprise entre les deux.

Il n'est pas sans intérêt d'observer que les anciens ont dû, en effet, connaître cette règle, puisque, en posant, au lieu de a et b, $\frac{a}{1}$ et $\frac{b}{1}$, on obtient $\frac{a+b}{2}$ également par moyenne arithmétique et par médiation. Toutefois, il ne semble pas que cette règle soit uniquement celle d'Archimède ni que la formule d'Al-Morouzi soit celle de Baudhâyana. La formule persane ne reproduit pas, en effet, la physionomie de cette dernière série; en outre, l'application pure et simple de la règle de médiation paraît beaucoup trop laborieuse.

Dans le but de retrouver ces valeurs et, en général, les exemples numériques qui nous sont parvenus de l'antiquité, M. Alexéief a proposé, mais sans l'appliquer à ces exemples, une solution théorique du problème de l'extraction de la racine carrée par l'emploi de la moyenne arithmétique et de la moyenne harmonique.

Nous croyons pouvoir affirmer que ce procédé est bien véritablement, avec quelques modifications dans la pratique, celui de Baudhâyana et celui d'Archimède. Nous nous permettrons seulement de faire remarquer que, avant M. Alexéief, M. le professeur Oppermann (1) avait appliqué à la fraction $\frac{265}{153}$ la méthode des deux

(1) J.-L. HEIBERG, *Quæstiones Archimedeæ,* Hauniæ, 1879, p. 65; *Oversigt over det*

moyennes, et que les formules données par M. Alexéief, de même que celles données il y a quelques jours par M. le colonel Mathieu [1], se déduisent facilement des formules établies par M. Éd. Lucas dans la Section XIX de sa *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques* [2].

Ces restrictions établies, soit à reproduire

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34};$$

posons, conformément à la règle, $2 = 1 \times 2$. Les moyennes arithmétiques et harmoniques de 1 et de 2 et les moyennes de ces moyennes sont $\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{3}$, $\frac{17}{12}$ et $\frac{24}{17}$, $\frac{577}{408}$ et $\frac{816}{577}$. Les moyennes arithmétiques sont approchées par excès et continuellement décroissantes. Les moyennes harmoniques sont approchées par défaut et continuellement croissantes. Cherchons les différences des premières $\frac{3}{2} - \frac{17}{12} = \frac{1}{3.4}$, $\frac{17}{12} - \frac{577}{408} = \frac{1}{3.4.34}$. Prenons la première valeur approchée par défaut $= 1 + \frac{1}{3}$, et nous avons tous les éléments de la série, d'où il ressort que Baudhâyana employait en effet le procédé des deux moyennes, mais calculait en outre les différences entre les valeurs successives des approximations par excès et les différences de ces différences.

Si nous considérons maintenant que Woepcke [3] a établi par des raisons puissantes la haute probabilité d'une transmission de connaissances de l'Inde en Grèce vers le III^e siècle avant J.-C., nous sommes conduits à supposer *a priori* de grandes ressemblances entre la méthode indienne et la méthode archimédéenne.

Soit, en effet, à retrouver $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$. Posons $3 = 3 \times 1$. Les moyennes arithmétiques et harmoniques de ces deux nombres sont

---

Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og det Medlemmers Arbejder, Aaret 1875, p. 18-22.

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, décembre 1879, p. 531.

(2) *American Journal of Mathematics* de M. Sylvester, vol. I, 1878, p. 225.

(3) *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens*, p. 90-91.

2 et $\frac{3}{2}$. Les moyennes de ces deux moyennes sont $\frac{7}{4}$ et $\frac{12}{7}$. Les nouvelles moyennes de ces deux moyennes sont $\frac{97}{56}$ et $\frac{168}{97}$. Sommons les numérateurs et les dénominateurs; il vient $\frac{265}{153}$. Il est clair que l'on pourrait, en continuant ces sommations, obtenir $\frac{1351}{780}$. En effet, $\frac{97}{56}+\frac{265}{153}=\frac{362}{209}$, $\frac{97+168+265+362}{56+97+153+209}=\frac{892}{515}$, $\frac{892+56}{515+97}=\frac{989}{571}$, $\frac{989+362}{571+209}=\frac{1351}{780}$; mais ce procédé n'explique évidemment pas le choix de $\frac{1351}{780}$. Il faut supposer ici un procédé direct et indépendant du précédent. Le suivant remplit ces deux conditions. Posons $3=3\times 1$. La moyenne arithmétique ou la médiation de ces nombres est 2, la moyenne harmonique $\frac{3}{2}$. La médiation de cette médiation et de cette moyenne est $\frac{5}{3}$, la moyenne harmonique $\frac{9}{5}$. Les moyennes arithmétique et harmonique de cette médiation et de cette moyenne sont $\frac{26}{15}$ et $\frac{45}{25}$, dont la moyenne arithmétique est $\frac{1351}{780}$, d'où il ressort qu'Archimède aurait employé le procédé des deux moyennes compliqué de médiations, mais en variant, selon que l'approximation cherchée de la racine doit être par excès ou par défaut, l'ordre des médiations.

D'ailleurs, il n'est pas sans intérêt de remarquer, indépendamment de ces coïncidences, que l'antiquité a dû être conduite à cette méthode d'approximation par plusieurs voies très-directes.

1. *Procédé géométrique.* — Soient sur une droite trois points successifs O, A, B; décrivons une circonférence sur AB comme diamètre et menons les tangentes OT, OT'; désignons par B_1 le centre de la circonférence et par A_1 l'intersection de TT' avec OB; il vient $OA < OA_1 < OT$; $OB > OB_1 > OT$, et par similitude des triangles rectangles $\frac{OA}{OT}=\frac{OT}{OB}$, $\frac{OA_1}{OT}=\frac{OT}{OB_1}$; OA_1 et OB_1, les deux valeurs plus approchées de la moyenne proportionnelle, sont préci-

sément les moyennes arithmétique et harmonique de OB et de OA.

2. *Procédé arithmétique.* — Soient a et b deux valeurs quelconques et approchées de leur moyenne proportionnelle; tout nombre intermédiaire entre a et b est évidemment une valeur plus approchée de leur moyenne proportionnelle que l'un deux. Soit une valeur plus approchée $b_1 = \frac{a+b}{2}$; on obtient l'autre valeur $a_1 = \frac{2ab}{a+b}$ par la condition $ab_1 = ab$.

Enfin, de la méthode d'interpolation des parties proportionnelles appliquée par Hipparque (deuxième siècle avant J.-C.) à la détermination de l'équinoxe, on tire encore pour valeurs approchées les deux moyennes, car, en prenant la valeur a approchée par défaut, on obtient pour le carré un nombre trop faible de $ab - a^2$; en prenant la moyenne b approchée par excès, on obtient pour le carré un nombre trop grand de $b^2 - ab$; donc, en désignant par a_1 la valeur de la moyenne proportionnelle dans la supposition des accroissements proportionnels, on aura

$$\frac{a_1 - a}{b - a} = \frac{a}{2 + a},$$

d'où

$$a_1 = \frac{2ab}{a+b},$$

et par la proportion $\frac{a_1}{a} = \frac{b}{b_1}$, il vient

$$b_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Observons, en terminant, que, si la méthode des deux moyennes est comparée avec la méthode plus récente des fractions continues, l'avantage revient à la première. Qu'on développe, en effet, en fractions continues $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$; on constate que les valeurs trouvées par l'emploi des moyennes reviennent au calcul des réduites successives dont les rangs sont en progression géométrique de raison $= 2$, cas pour lequel M. Éd. Lucas veut bien nous faire observer que M. Serret a donné dès 1847 (*Journal de Liouville*, t. XIII, p. 518) les formules retrouvées par lui-même et par M. Alexéief ([1]). Il est également curieux d'observer que l'application simultanée des méthodes d'interpolation par les parties proportionnelles et de Newton à l'extraction de la racine carrée du produit ab fournit comme valeurs approchées par défaut et par excès la moyenne harmonique et la moyenne arithmétique des deux nombres a et b.

([1]) En 1873, une question proposée par M. le prince Boncompagni dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, tome XII, p. 191, a conduit aussi à ces formules M. Moret-Blanc (t. XII, p. 477-480).