F. Casorati

Nouvelle théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre et du second degré entre deux variables

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 48-59
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_48_1>

NOUVELLE THÉORIE DES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE ET DU SECOND DEGRÉ ENTRE DEUX VARIABLES;

PAR M. F. CASORATI.

(Communication faite à l'Académie royale des Lincei, le 5 mars 1876) (¹).

(TRADUIT PAR M. E. DEWULF.)

Les théories des équations différentielles généralement connues jusqu'à ce jour sont toutes plus ou moins incomplètes et même en partie inexactes, ainsi que l'a fait remarquer aussi M. Darboux à l'Académie des Sciences de Paris, il y a quelques années (²). Cette nouvelle théorie ne paraîtra donc pas inopportune, si, comme je le pense, elle résout complétement et exactement les questions qui se présentent ordinairement au sujet de ces solutions. Cette Communication ne vise que la classe la plus simple des équations susceptibles de solutions singulières; mais cette classe a par elle-même une très-grande importance dans l'Analyse pure et dans ses applications, et, en outre, on reconnaîtra dans cette Communication une bonne partie des idées qui doivent servir à l'étude des autres classes.

Les propositions que nous ne ferons qu'énoncer se démontrent brièvement en s'appuyant sur la Note : *Quelques formules fon-*

(¹) *Nuova teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali di primo ordine e secondo grado tra due variabili.* Communicazione del prof. F. Casorati, fatta alla Reale Accademia dei Lincei, il 5 marzo 1876.

(²) *Sur la surface des centres de courbure des surfaces algébriques.* (*Comptes rendus* du 20 juin 1870). — *Réponse aux observations de M. Catalan.* (*Comptes rendus* du 25 juillet 1870).

damentales dans l'étude des équations différentielles algébriques, etc.

I.

Soit

$$\alpha(u,v)du^2 + 2\beta(u,v)du\,dv + \gamma(u,v)dv^2 = 0 \tag{1}$$

l'équation différentielle dont il s'agit, où $\alpha(u,v), \beta(u,v), \gamma(u,v)$ représentent des fonctions de u et v, *rationnelles, entières et premières entre elles*. Supposons que cette équation soit irréductible, c'est-à-dire qu'elle ne se décompose pas en deux équations *différentielles* aussi rationnelles en u, v, du, dv, et qu'elle admette une primitive complète algébrique; cette primitive pourra se mettre sous la forme

$$a(u,v)\Omega^2 + 2b(u,v)\Omega + c(u,v) = 0, \tag{2}$$

où $a(u,v)$, $b(u,v)$, $c(u,v)$ représentent des fonctions de u, v rationnelles, entières et premières entre elles, et où Ω est la constante arbitraire.

En éliminant Ω entre cette primitive et sa différentielle immédiate

$$da\,.\,\Omega^2 + 2db\,.\,\Omega + dc = 0,$$

on trouve la résultante

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ da & 2db & dc & 0 \\ 0 & da & 2db & dc \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

qui doit être le produit de (1) par une fonction

$$\theta(u,v)$$

rationnelle entière, qui peut être une constante.

Si une fonction $\Phi(u,v)$ rationnelle entière en u, v et non décomposable en facteurs aussi rationnels, égalée à zéro, donne une équation de laquelle il résulte que (3) est satisfaite sans que (1) le soit, cette fonction doit être un facteur de θ, et, si l'on veut, on pourra dire que l'équation $\Phi = 0$ est une solution de (3), mais *impropre*. Une solution de cette équation ne devant être dite *propre* que quand elle est aussi une primitive de (1), l'équation (1) ne peut se réduire à une identité qu'en ayant recours à la différentielle de la primitive.

Dans une équation rationnelle entière $E(u,v)=0$ qui se présente comme solution d'une équation différentielle, il est important de distinguer les diverses équations rationnelles entières des degrés les plus bas dans lesquelles elle peut se décomposer. Quelques-unes de ces équations pourront ne pas satisfaire à l'équation différentielle; chacune des autres donnera une solution *simple*. Si ces dernières sont $S_1(u,v)=0$, $S_2(u,v)=0$, ..., l'équation $E=0$ pourra être dite *solution composée* de ces solutions simples.

Nous nommerons *particulière*, suivant l'usage général, une solution ou primitive ou intégrale de (1) quand elle se confond avec une équation déduite de (2), en y mettant pour Ω un nombre particulier, ou quand elle est un facteur de cette équation, et *singulière* toute autre solution.

Dans les anciennes théories des solutions singulières, on affirmait, d'une manière plus ou moins différente, que l'on pouvait obtenir ces solutions en égalant à zéro l'un ou l'autre des discriminants

$$\sigma=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix},\quad g=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix},$$

sans tenir un compte suffisant du rapport entre ces deux discriminants, et sans faire une distinction suffisamment détaillée entre les différents facteurs en lesquels ils peuvent se décomposer. Cette distinction est indispensable, car ces facteurs se comportent diversement, suivant leurs divers degrés de multiplicité dans les deux discriminants, ce que les raisonnements les plus usités jusqu'ici ne faisaient même pas soupçonner.

D'après la relation

$$\theta^2\sigma=4k^2g,$$

qui a lieu entre σ, g, θ et le déterminant

$$k=\begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{da}{du} & \dfrac{db}{du} & \dfrac{dc}{du} \\ \dfrac{da}{dv} & \dfrac{db}{dv} & \dfrac{dc}{dv} \end{vmatrix},$$

il est manifeste que les facteurs rationnels et premiers, ou indécomposables, qui entrent un nombre *impair* de fois dans σ, entrent aussi un nombre impair de fois dans g. En tenant compte de cette observation, nous distinguerons les facteurs en sept espèces, et en désignant respectivement par p, q, r, σ, x, y, z un facteur quelconque de chaque espèce, nous exprimerons la composition de g et σ comme il suit :

$$(5) \qquad \begin{cases} g = p \ldots q \ldots r^{2\mu-1} \ldots s^{2\nu-1} \ldots x^{2\xi} \ldots y^{0} \ldots z^{2\zeta}, \\ \sigma = p \ldots q^{2\lambda+1} \ldots r \ldots s^{2\rho+1} \ldots x^{0} \ldots y^{2\eta} \ldots z^{2\omega}, \end{cases}$$

λ, μ, ν, ρ, ξ, η, ζ, ω représentant des nombres entiers *plus grands que zéro*. Et l'on entend qu'il peut exister plusieurs facteurs de chaque espèce, par exemple x_1, x_2, ... avec les exposants $2\xi_1$, $2\xi_2$, ... L'exposant o de x veut dire que cette espèce de facteurs manque toujours dans σ, et, s'il n'y en avait pas non plus dans g, x serait une constante.

Voici maintenant le *résumé* de la manière dont chacune de ces espèces de facteurs se comporte par rapport à (1). Nous indiquerons aussi quels facteurs divisent le multiplicateur θ, c'est-à-dire donnent (en les égalant à zéro) des solutions de (3) qui sont impropres si elles ne satisfont pas à (1), et quels facteurs divisent le déterminant k.

1° *Les facteurs p donnent toutes les solutions singulières et ne donnent qu'elles. Ils n'entrent ni dans θ ni dans k.*

2° *Les facteurs q donnent toujours des solutions particulières. Ils n'entrent pas dans θ, ils entrent dans k.*

3° *Les facteurs r ne donnent jamais de solutions. Ils entrent dans θ et dans k.*

4° *Les facteurs s ne donnent pas, en général, de solutions, et, quand ils en donnent, elles sont particulières. Ils entrent dans θ et dans k.*

5° *Les facteurs x ne donnent jamais de solutions. Ils entrent dans θ et dans k.*

6° *Les facteurs y ne donnent pas, en général, de solutions; celles qu'ils peuvent donner sont particulières. Ils n'entrent pas dans θ, ils entrent dans k.*

7° *Les facteurs z ne donnent pas, en général, de solutions, et,* *quand ils en donnent, elles sont particulières. Ils entrent dans θ et dans k.*

Quoique les propositions qui constituent la partie purement analytique de notre théorie des solutions singulières pour les équations de la classe (1) se trouvent toutes dans le résumé précédent, nous pensons qu'il ne sera pas superflu de les énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME. — *Les équations que l'on obtient en égalant à zéro les différents facteurs premiers qui entrent une seule fois dans les deux discriminants des équations différentielle et intégrale sont toutes des primitives singulières, et il n'y en a pas d'autres.*

Ce théorème ne donne que la solution d'un des problèmes fondamentaux de la théorie, celui qui consiste à déduire les primitives singulières de la primitive complète. La solution du second problème, celui de déduire ces primitives de l'équation différentielle, découle de cet autre théorème :

THÉORÈME. — *Parmi les facteurs premiers et simples du discriminant de l'équation différentielle, ceux qui égalés à zéro satisfont à l'équation elle-même en donnent toutes les primitives singulières, et ils ne donnent qu'elles.*

Il s'agit toujours, bien entendu, de l'équation différentielle du second degré.

THÉORÈME. — *Tout facteur premier et simple de g donne une primitive de* (1).

THÉORÈME. — *Un facteur multiple de g ne donne, en général, qu'une solution impropre de* (3), *et, quand il donne une solution propre, elle est particulière.*

THÉORÈME. — *Parmi les facteurs premiers et simples de g, ceux qui sont multiples dans σ donnent des primitives particulières de* (1), *et, réciproquement, ceux qui donnent des primitives particulières de* (1) *sont multiples dans σ.*

Pour σ isolément :

THÉORÈME. — *S'il y a des solutions de* (1) *qui correspondent à* *des facteurs de σ, elles sont singulières quand elles correspondent à des facteurs simples, particulières quand elles correspondent à des facteurs multiples.*

Pour k :

Théorème. — *Les facteurs de g et de σ qui donnent des solutions singulières ne divisent pas k, tandis que tous les autres facteurs le divisent.*

II.

Quittons maintenant le champ de l'Analyse pure et entrons dans celui de la Géométrie, pour chercher, en nous appuyant sur les propriétés exposées, quelle est la signification que prennent les divers facteurs des deux discriminants dans l'interprétation géométrique ordinaire des équations différentielle et intégrale.

Cette interprétation consiste à considérer (2) comme l'équation en coordonnées cartésiennes u, v d'une famille de lignes L dans un plan, chacune d'elles correspondant à une valeur particulière de Ω. Par tout point (u_0, v_0) du plan passent deux *individus* L_1 et L_2 de cette famille; ce sont les deux lignes qui correspondent aux valeurs Ω_1 et Ω_2 de Ω qui sont les racines de l'équation

$$(6) \qquad a(u_0, v_0)\Omega^2 + 2b(u_0, v_0)\Omega_0 + c(u_0, v_0) = 0,$$

et dont les tangentes ou directions $(du : dv)_1$ et $(du : dv)_2$ en ce point sont données par l'équation

$$(7) \qquad \alpha(u_0, v_0)du^2 + 2\beta(u_0, v_0)du\,dv + \gamma(u_0, v_0)dv^2 = 0.$$

Pour tout point du lieu $g = 0$, les racines Ω_1 et Ω_2 sont égales entre elles, et, par suite, les lignes L_1, L_2 se confondent; pour tout point du lieu $\sigma = 0$, les deux tangentes se confondent.

En supposant que les coefficients des fonctions a, b, c, et par suite ceux des fonctions α, β, γ, soient réels, les régions du plan où il existe des lignes réelles de la famille (2) sont celles dont les points (u_0, v_0) donnent des racines réelles aux équations (6) et (7), c'est-à-dire celles pour lesquelles $g \leqq 0$, $\sigma \leqq 0$. Lorsque, dans le mouvement du point (u_0, v_0), ces discriminants passent de valeurs négatives à des valeurs positives, les racines de ces équations cessent d'être réelles. Les équations des confins entre les régions de réalité et celles de non-réalité s'obtiennent en égalant à zéro les facteurs qui entrent un nombre *impair* de fois dans g, ou, ce qui revient au même, dans σ.

En tenant présentes à l'esprit ces conclusions et les propositions du *résumé*, il est assez facile de trouver la signification de chacune des équations $p = 0, \ldots, q = 0, \ldots, z = 0, \ldots$.

1° Imaginons que le point (u_0, v_0) partant de l'intérieur des régions de réalité parvienne en un point quelconque d'une ligne $p = 0$. Les racines Ω_1 et Ω_2 deviennent égales, et les individus L_1 et L_2 viennent se confondre en un seul individu L, qui touchera en ce point le confin $p = 0$ de réalité, mais sans le traverser et sans pouvoir se confondre avec lui, car $p = 0$ n'est jamais un individu ou une partie d'individu de la famille (2). Donc, $p = 0$ *est l'enveloppe de toutes les séries de lignes* L *ou de quelques-unes de ces séries.*

2° Au contraire, toute ligne de l'espèce $q = 0$ étant intégrale particulière, c'est-à-dire une ligne ou portion de ligne L, si le *point courant* (u_0, v_0) parvient à une ligne $q = 0$, les deux *branches courantes,* c'est-à-dire les branches de L_1 et L_2 qui passent par (u_0, v_0) viennent se confondre en une même branche de $L_1 = L_2$ qui sera la ligne $q = 0$ elle-même. Cette ligne, étant aussi un confin de réalité, peut être considérée comme une vraie *limite vers laquelle tendent les branches courantes* quand (u_0, v_0) tend vers ce confin.

Exemple :

$$[v\,du - (u + 2v)\,dv]^2 + 16v^3(u + v)\,dv^2 = 0, \quad \sigma = 16(u + v)v^5,$$
$$(\Omega + v^2)^2 + v(u + v) = 0, \quad g = v(u + v), \quad k = 2v^2, \quad \theta = 1.$$

La ligne $p = u + v = 0$ enveloppe réellement toutes les L correspondant à des valeurs négatives de Ω. La ligne $q = v = 0$ est une portion de celle en laquelle se confondent L_1 et L_2 quand (u_0, v_0) atteint $v = 0$.

3° Quand (u_0, v_0) parvient à une ligne $r = 0$, les branches courantes deviennent des branches de la ligne unique L, en laquelle se confondent L_1 et L_2, branches qui se toucheront sur $r = 0$, mais sans traverser ni toucher cette ligne, puisque $r = 0$ ne satisfait pas à l'équation différentielle. Donc $r = 0$ *est le lieu des points de rebroussement des lignes* L.

Exemple :

$$4du^2 - gvdv^2 = 0, \quad \sigma = -36v,$$
$$(u - \Omega)^2 - v^3 = 0, \quad g = -v^3, \quad k = 3v^2, \quad \theta = -v^3.$$

Les lignes L sont les lieux successivement occupés par l'une d'entre elles qui court parallèlement à l'axe des u ; $u^2 - v^3 = 0$ a un point cuspidal à l'origine, et, par suite, l'axe des u, c'est-à-dire $r = v = 0$, est le lieu de ces points cuspidaux.

4° Pour une $s = 0$, si l'équation différentielle n'est pas satisfaite, ce que nous avons dit pour $r = 0$ est vrai; si l'équation différentielle est satisfaite, ce que nous avons dit pour $q = 0$ est vrai.

Exemple de $s = 0$ ne satisfaisant pas à l'équation différentielle :

$$4(du + dv)^2 + 25v^3dv^2 = 0, \quad \sigma = 100v^3,$$
$$(\Omega + u + v)^2 + v^5 = 0, \quad g = v^5, \quad k = 5v^4, \quad \theta = v^5.$$

Les lignes L sont les lieux que pourrait occuper successivement l'une d'elles en courant parallèlement à l'axe des u. Cet axe $s = v = 0$ est parcouru par le point cuspidal de cette ligne.

Exemple de $s = 0$ satisfaisant à l'équation différentielle :

$$(vdu + 3udv)^2 + 16uvdv^2 = 0, \quad \sigma = 16uv^3,$$
$$(\Omega + v^2)^2 + uv^3 = 0, \quad g = uv^3, \quad k = -2v^4, \quad \theta = v^4.$$

Si (u_0, v_0) tend vers un point de $s = v = 0$, les branches courantes tendent à se confondre avec la branche $v = 0$ de L

$$(L_1 = L_2 = v^4 + uv^3 = 0)$$

correspondant à la racine double $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$. Quant à $p = u = 0$, elle enveloppe réellement les L qui correspondent aux valeurs négatives de Ω.

5° Un facteur qui entre un nombre pair de fois dans g ou dans s ne donne pas de lignes faisant partie des confins de réalité des L. Donc, en particulier, une $x = 0$ peut s'étendre à l'intérieur et à l'extérieur de ces régions. Si le point (u_0, v_0) parvient à une $x = 0$

dans les régions de réalité, les branches courantes deviennent des branches d'une seule L; elles ne se touchent pas entre elles, puisque s ne s'annule pas. Cette L aura là un nœud; mais, dans les régions de non-réalité, le nœud est remplacé par un point isolé. En somme, $x = 0$ *est le lieu des nœuds ou des points isolés des* L.

Exemple :

$$(2v\,du + u\,dv)^2 + 4v\,dv^2 = 0, \quad \sigma = 16v^3,$$
$$(\Omega + v)^2 + vu^2 = 0, \quad g = vu^2, \quad k = -2uv, \quad \theta = u^2.$$

Toute L qui correspond à une valeur positive de Ω a un nœud dans la portion de droite $x = u = 0$ contenue dans la région $s < 0$; toute L qui correspond à une valeur négative de Ω a un point isolé dans l'autre portion de cette droite. Quant à la ligne $q = v = 0$, elle fait partie de la L correspondant à $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ et est asymptote des branches de L qui tendent vers elle quand (u_0, v_0) s'en approche.

6° Quand (u_0, v_0) parvient en un point d'une ligne $y = 0$ dans l'intérieur de la région de réalité, les branches courantes ne cessent pas d'appartenir à deux individus différents L_1 et L_2, mais leurs directions y coïncident. Donc, si l'équation différentielle n'est pas satisfaite, $y = 0$ *sera le lieu des contacts entre les* L. Quand, au contraire, $y = 0$ satisfait à l'équation différentielle et est, par suite, elle-même une branche de la famille (2), les branches courantes non-seulement se touchent, mais elles se confondent entièrement avec $y = 0$, une seule d'entre elles ne pouvant en rester distincte. La $y = 0$ appartiendra à deux L différentes.

Exemple de $y = 0$ ne satisfaisant pas à l'équation différentielle :

$$(2v^2 + 1)du^2 + (u^2 + v^2 + 2uv + 2)du\,dv + (2u^2 + 1)dv^2 = 0,$$
$$\sigma = \tfrac{1}{4}(v - u)^2(4 - u^2 - v^2 - 6uv),$$
$$\Omega^2 + (u + v)\Omega + 1 - uv = 0, \quad g = \tfrac{1}{4}(4 - u^2 - v^2 - 6uv),$$
$$k = \tfrac{1}{2}(v - u), \quad \theta = 1.$$

Les L sont des hyperboles équilatères, dont l'axe transverse est sur la droite $y = v - u = 0$, qui se touchent aux sommets dont cette droite est le lieu. Elles sont enveloppées par

$$p = 4 - u^2 - v^2 - 6uv = 0.$$

Exemple de $y = 0$ satisfaisant à l'équation différentielle :

$$(v - 8u + 8u^3)v\,du^2 + 2(v - 4u - 4u^3)u\,du\,dv + u^2 dv^2 = 0,$$
$$\sigma = 16u^4[uv - (1 + u^2)^2],$$
$$\Omega^2 + 2u^2\Omega + uv - 2u^2 - 1 = 0,$$
$$g = uv - (1 + u^2)^2, \quad k = 2u^2, \quad \theta = 1.$$

La droite $y = u = 0$ appartient aux deux L qui correspondent aux valeurs -1 et $+1$ de Ω. Quant à la ligne $p = uv - (1 - u^2)^2 = 0$, elle enveloppe réellement les L qui correspondent aux valeurs négatives de Ω.

7° Enfin, quand (u_0, v_0) parvient à une $z = 0$, les branches courantes deviennent des branches de la L où viennent coïncider entre elles L_1 et L_2, et, puisque les tangentes à ces branches viennent aussi se confondre, nous concluons que $z = 0$ *est le lieu des contacts entre deux branches d'une même* L. Par suite, si l'équation différentielle est satisfaite, la $z = 0$ sera une ligne où les deux branches dont nous venons de parler, non-seulement se touchent, mais se confondent.

Exemple de $z = 0$ ne satisfaisant pas à l'équation différentielle :

$$4(1 + v)du^2 - v^2(4 + 5v)^2 dv^2 = 0, \quad \sigma = -4v^2(1 + v)(4 + 5v)^2,$$
$$(\Omega + u)^2 - v^4 - v^3 = 0, \quad g = -(1 + v)v^4,$$
$$k = -(4 + 5v)v^3, \quad \theta = -v^4.$$

Les L sont les lieux que peut successivement occuper une de ces courbes courant parallèlement à l'axe des u. Pour $\Omega = 0$, la L est symétrique par rapport à l'axe des v et a la forme d'une boucle qui s'élargit depuis $v = 1$ jusqu'à $v = -\frac{4}{5}$, puis se resserre et forme à l'origine la singularité que M. Cayley nomme *tacnœud* et qui s'étend enfin en deux branches infinies dans la région $v > 0$. Quand L se déplace, le tacnœud décrit la droite $z = v = 0$, et le point du minimum $v = -1$ décrit l'enveloppe $p = 1 + v = 0$; les points de u maximum et minimum décrivent la droite

$$y = 4 + 5v = 0,$$

sur laquelle se touchent, par conséquent, les diverses positions de la ligne mobile.

Exemple de $z = 0$ satisfaisant à l'équation différentielle :

$$v^2 du^2 + 4uv\,du\,dv + 4u(u+1)dv^2 = 0, \quad \sigma = 4uv^2,$$

$$\Omega^2 + 2v\Omega + v^2(u+1) = 0, \quad g = uv^2, \quad k = -v^2, \quad \theta = v^2.$$

La droite $z = v = 0$ fait partie de la ligne $v^2(u+1) = 0$ où, pour $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, L_1 et L_2 viennent se confondre.

Ce qui précède jette aussi une grande lumière sur les propriétés de la jacobienne $k = 0$; mais, pour ne pas dépasser les limites d'une simple Communication, nous laisserons de côté, pour le moment, les observations relatives à ce lieu. Nous ne dirons rien non plus du lieu $\theta = 0$, et, à plus forte raison, des autres particularités intéressantes dont le nombre et la variété, comme on le voit immédiatement, se multiplient à mesure que l'on approfondit le sujet en subdivisant les singularités. Nous ajouterons cependant quelques remarques très-courtes sur les Notes de M. Darboux citées plus haut, sans vouloir en diminuer la valeur, que nous estimons très-grande; nous voulons rendre encore plus manifeste combien M. Darboux a eu raison de donner l'éveil sur la prétendue exactitude des théories des solutions singulières.

La condition (3) de la page 267 (*Comptes rendus* du 25 juillet 1870) est satisfaite par les équations de l'espèce $p = 0$, comme cela se voit sur-le-champ; elle ne l'est pas par celles des espèces $r = 0$, $x = 0$. Les dérivées de R, c'est-à-dire $\frac{d\sigma}{du}$, $\frac{d\sigma}{dv}$, s'annulent, en même temps, avec des facteurs des espèces q, s, y, z. Par suite, la distinction des cas faite aux n^os^ 1, 2, 3 de la page 268 doit être complétée suivant notre analyse. Le cas des points cuspidaux correspond seulement aux facteurs des espèces r, s.

Ce qui est écrit dans les lignes 8-14 exige une correction. Notre analyse fait voir que même dans cette condition les enveloppes peuvent faire défaut; nous avons voulu donner un exemple de cela dans les deuxième, troisième et cinquième cas particuliers.

Enfin, relativement à ce qui est dit de la courbe (R) ou σ dans les lignes 5-8 de la page 270, nous réclamons la nécessité de distinguer les parties de (R) qui correspondent aux facteurs qui entrent dans R un nombre *impair* de fois des autres parties qui ne constituent pas des confins de réalité des lignes données par les primitives particulières [1].