BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 489-514

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_489_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KOENIGSBERGER (L.). — ZUR GESCHICHTE DER THEORIE DER ELLIPTISCHEN TRANSCENDENTEN IN DEN JAHREN 1826-29. Leipzig, 1879. — 1 vol. in-8°, 104 pages.

Voici un demi-siècle que Jacobi a fait paraître les *Fundamenta nova* et qu'Abel est mort; M. Koenigsberger, à l'occasion de cet anniversaire, a publié une intéressante étude historique sur cette période de trois années, si riche en découvertes de premier ordre, où Abel et Jacobi employèrent à l'envi les ressources de leurs rares génies à la fondation de la théorie des fonctions elliptiques. Le Volume de M. Koenigsberger se termine par une analyse de ceux des papiers posthumes de Gauss qui se rapportent à cette théorie; on en trouvera plus loin la traduction à peu près complète. Le sujet offre en lui-même un vif intérêt, et celui qui l'a traité est aussi compétent qu'il est possible. Nous résumons d'abord rapidement la partie historique de son Livre.

C'est à la découverte d'Euler qu'on peut faire commencer l'histoire de la théorie des transcendantes elliptiques. En 1786 Legendre publia le *Mémoire sur les intégrations par des arcs d'ellipse*, en 1793 le *Mémoire sur les transcendantes elliptiques;* il réunit ses recherches dans les *Exercices de Calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures* (1811-1819), et plus tard dans le *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes* (1825-1826). Abel et Jacobi, au moment de la publication de leurs premiers travaux, ne connaissaient que les *Exercices*.

Le *Traité* contient la réduction des intégrales de la forme

$$\int \frac{P\,dx}{R},$$

où P est une fonction rationnelle et R la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré, aux trois types fondamentaux, la réduction à la forme normale au moyen d'une transformation linéaire, le théorème de l'addition pour les intégrales de première espèce, l'application de ce théorème à la multiplication et à la division.

Le théorème de l'addition des intégrales elliptiques de seconde espèce donne à l'auteur l'occasion de réunir les divers théorèmes connus depuis longtemps sur les arcs d'ellipse et d'hyperbole. L'étude de l'intégrale complète le conduit à la relation célèbre

$$\mathrm{FE}' - \mathrm{F}'\mathrm{E} - \mathrm{FF}' = \frac{\pi}{2},$$

généralisée par Weierstrass et Riemann.

Les recherches relatives aux intégrales de troisième espèce, que le *paramètre* vient compliquer, présentaient de grandes difficultés. Legendre donne plusieurs résultats importants, notamment les théorèmes sur l'addition.

Il fait de la transformation de Landen une application singulièrement heureuse et féconde. En répétant cette transformation, il parvient à former une chaîne indéfinie de modules, qui fournit une méthode simple pour le calcul approché des intégrales de première et de seconde espèce.

Ce point appartient à la théorie de la transformation, que Legendre touche d'ailleurs dans un Chapitre de son Traité où il donne en particulier la transformation du troisième ordre, en restant toutefois principalement préocupé de l'intérêt que ce genre de recherches présente relativement au calcul numérique des intégrales elliptiques.

La publication du Livre de Legendre précède à peine celle des premiers travaux d'Abel et de Jacobi, travaux qui, ainsi qu'il a été dit, furent entrepris avant que leurs auteurs eussent connaissance de ce Traité.

Le premier travail d'Abel (publié dans ses papiers posthumes) est intitulé : *Propriétés remarquables de la fonction* $y = \varphi(x)$ *déterminée par l'équation*

$$f(y)\,dy - dx\sqrt{(a-y)(a_1-y)\ldots(a_m-y)} = 0,$$

$f(y)$ *étant une fonction quelconque de* y, *qui ne devient pas zéro ou infinie lorsque* $y = a, a_1, \ldots, a_m$.

Il établit la périodicité et détermine les zéros et les infinis. Ainsi Abel, dès l'été de 1825, s'était déjà occupé du problème de l'inversion des fonctions hyperelliptiques et était parvenu à la notion de la double périodicité des fonctions elliptiques; il ne paraît pas, d'ailleurs, avoir connu le résultat démontré plus tard par Jacobi, à savoir qu'il ne peut exister de fonction uniforme d'une seule variable ayant plus de deux périodes.

Dans le Mémoire *Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes,* il parvient au théorème sur l'interversion de l'argument et du paramètre pour les intégrales hyperelliptiques, et, dans son *Extension de la théorie précédente,* il établit une propriété analogue pour les intégrales d'une équation différentielle linéaire. Sans aucun doute, dès l'année 1825, non-seulement Abel était en possession des fondements d'une théorie étendue des fonctions elliptiques, mais encore il s'efforçait de fonder une théorie des intégrales à différentielle algébrique. On trouve dans ses papiers posthumes pour cette année un travail *Sur la comparaison des fonctions transcendantes* qui contient la généralisation célèbre du théorème d'Euler pour l'addition des intégrales elliptiques, généralisation qui est regardée à bon droit comme le théorème fondamental de la nouvelle Analyse.

Enfin il y a encore, pour cette même année 1825, dans les papiers d'Abel, un travail qui contient en germe les recherches publiées quelques années après dans le *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.* On y trouve la réduction aux types fondamentaux de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$$

et la relation la plus générale entre des intégrales elliptiques, sous la forme

$$K\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + K'\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \ldots + L^{(n)}\int\frac{dx}{(x-a_n)\sqrt{R}}$$
$$= A\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}} + A'\log\frac{P'+Q'\sqrt{R}}{P'-Q'\sqrt{R}}.$$

Le premier Volume du *Journal de Crelle* (1826) contient le Mémoire d'Abel (primitivement rédigé en français) intitulé *Ueber die Integration der Differentialformel* $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$, *wenn* R *und* ρ *ganze Functionen sind.* Abel y cherche toutes les différentielles de cette forme dont l'intégrale peut s'exprimer par une fonction de la forme $\log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$, et montre que ce problème est le plus général qu'on puisse se poser relativement à la réduction des intégrales de la forme $\int \frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$ à des fonctions logarithmiques. Ce travail fut vraisemblablement remis personnellement à Crelle par Abel, lorsqu'il passa à Berlin pour se rendre à Paris. Holmboe, l'éditeur de ses Œuvres complètes, rapporte qu'Abel lui avait dit que, « lors de son séjour à Paris, en 1826, il avait déjà achevé la partie essentielle des principes qu'il avançait dans la suite sur ces fonctions, et qu'il aurait bien voulu remettre la publication de ses découvertes jusqu'à ce qu'il en eût pu composer une théorie complète, si, en attendant, M. Jacobi ne s'était mis sur les rangs ».

Dans cette même année, Abel communiqua à l'Académie des Sciences de Paris un important Mémoire sur les intégrales à différentielles algébriques. Ce Mémoire, écrit, paraît-il, d'une façon peu lisible, ne fut l'objet d'aucun rapport. On en demanda copie à l'auteur : il n'en remit point et le laissa là. Il ne fut publié qu'en 1841 par les soins de Libri. Il contient le théorème sur l'existence de l'équation

$$\int f(x_1, y_1)\,dx_1 + \int f(x_2, y_2)\,dx_2 + \ldots + \int f(x_n, y_n) = v,$$

une double méthode pour la détermination de la fonction algébrico-logarithmique v, et la réduction à un nombre déterminé des intégrales à différentielle algébrique. Enfin l'auteur particularise son théorème pour le cas où l'irrationnelle engagée sous le signe $\int$ est racine d'une équation binôme, et donne, sous une forme explicite, le théorème sur l'addition des intégrales elliptiques et hyperelliptiques.

Non-seulement Abel laissa, sans s'en occuper, son Mémoire à l'Académie des Sciences, mais il attendit trois années pour envoyer à Crelle (6 janvier 1829) un travail sur le même sujet, intitulé *Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes*. C'est une exposition rapide, pareille à celle qui a été trouvée dans les papiers posthumes et dont il a été déjà parlé.

En décembre 1826, il dit dans une Lettre à Holmboe : « J'ai écrit un grand Mémoire sur les fonctions elliptiques, qui renferme des choses assez curieuses et qui ne manquera pas, je m'en flatte, de fixer l'attention du monde littéraire. Entre autres choses, il traite de la division de l'arc de la lemniscate. Ah! qu'il est magnifique! Tu verras. J'ai trouvé qu'avec le compas et la règle on peut diviser la lemniscate en 2^n+1 parties égales, lorsque le nombre 2^n+1 est premier. La division dépend d'une équation du degré

$$(2^n+1)^2-1;$$

mais j'en ai trouvé la solution complète à l'aide des racines carrées. Cela m'a fait pénétrer en même temps le mystère qui a enveloppé la théorie de M. Gauss sur la division de la circonférence du cercle. Je vois, clair comme le jour, comment il y est arrivé. »

Dans une Lettre à Crelle, du même mois, il revient sur la même pensée.

Enfin, le 4 mars 1827, il écrit de Berlin à Holmboe :

« Mais voici le Mémoire qui l'emporte sur tous les autres : *Théorie des fonctions transcendantes en général et celle des fonctions elliptiques en particulier*. Mais différons de t'en faire part jusqu'à mon retour. »

C'est à partir de ce retour en Norvége que commence, à proprement parler, cette lutte glorieuse avec Jacobi, dont le résultat fut la création de la nouvelle théorie.

Ce dernier, dans deux Lettres à Schumacher (13 juin et 2 août 1827), imprimées en septembre 1827 dans le n° 123 des *Astronomische Nachrichten*, publia ses premières découvertes sur la transformation des intégrales elliptiques. La transformation générale de l'intégrale de première espèce y est donnée sans démonstration; les transformations du troisième et du cinquième degré y sont traitées explicitement, dans leur relation avec la multiplication et la division par 3 et par 5.

Legendre, comme il a été dit plus haut, avait parlé de la transformation du troisième degré dans son Traité, publié en janvier 1827, et que Jacobi ne connaissait pas encore; dès qu'il eut connaissance des Lettres à Schumacher, il entama avec Jacobi une importante correspondance, que le *Bulletin* a publiée, et dont M. Koenigsberger donne de nombreux extraits. Le géomètre allemand, avec une franchise qui est digne de son génie, y reconnaît qu'il était parvenu par induction au théorème général sur la transformation et qu'il l'a publié avant d'en avoir une preuve rigoureuse.

C'est aussi en septembre 1827 que parut dans le deuxième cahier du second Volume du *Journal de Crelle* la première Partie des *Recherches sur les fonctions elliptiques* d'Abel. L'auteur ne connaissait certainement pas la Communication de Jacobi lorsqu'il avait rédigé les deux Parties de ce Mémoire, comme il le dit lui-même dans une addition à la seconde Partie, où il parle de la Note de Jacobi insérée dans les *Astronomische Nachrichten* et où il montre que le théorème donné par celui-ci sans démonstration est contenu comme cas particulier dans une formule de son Mémoire. Au surplus, il est bien certain qu'Abel, en possession depuis deux ans d'une théorie générale dont celle des transcendantes elliptiques n'était qu'un cas particulier, était sur beaucoup de points en avance sur Jacobi, et celui-ci l'a reconnu lui-même; il est sûr aussi que c'est à ce dernier qu'on doit d'avoir donné de cette théorie une construction bien ordonnée, dont les diverses parties se relient et se tiennent mutuellement.

Dans ses *Recherches*, Abel définit la fonction inverse $x = \varphi(\alpha)$ de l'intégrale

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

établit le théorème de l'addition pour cette fonction et les fonctions correspondantes

$$f(\alpha) = \sqrt{1-c^2\varphi^2(\alpha)}, \quad F(\alpha) = \sqrt{1+e^2\varphi^2(\alpha)},$$

montre la double périodicité, détermine les zéros et les infinis de ces fonctions, développe les formules de la multiplication pour $\varphi(n\alpha), f(n\alpha), F(n\alpha)$, qu'il exprime rationnellement en $\varphi(\alpha), f(\alpha)$, $F(\alpha)$, et passe de là au difficile problème de la division. Il y donne les expressions algébriques de

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right), \quad f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right), \quad F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$$

sous la forme

$$\varphi(\beta) = \frac{1}{2n+1}\Big[\varphi_1(\beta) + \sqrt[2n+1]{C_1 + \sqrt{C_1^2 - D_1^{2n+1}}} + \dots$$
$$+ \sqrt[2n+1]{C_{2n} + \sqrt{C_{2n}^2 - D_{2n}^{2n+1}}}\Big],$$

où

$$\varphi_1(\beta) = \varphi(2n+1)\beta + \frac{1}{2n+1}\Big[\sqrt[2n+1]{A_1 + \sqrt{A_1^2 - D_1^{2n+1}}} + \dots$$
$$+ \sqrt[2n+1]{A_{2n} + \sqrt{A_{2n}^2 - B_{2n}^{2n+1}}}\Big],$$

et où les quantités C, D sont des fonctions rationnelles de $\varphi_1(\beta)$ et les A, B des fonctions de même nature de $\varphi(2n+1)\beta$. Ces expressions algébriques, dans le cas où l'on veut diviser les périodes, donnent les valeurs de

$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right), \varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)$$

et montrent que ces quantités dépendent de la résolution d'une équation de degré $(2n+1)^2 - 1$.

Abel prouve que le problème se ramène à la résolution d'une équation du $(2n+2)^{\text{ième}}$ degré et de $2n+2$ équations du $n^{\text{ième}}$ degré. Ces dernières peuvent être résolues algébriquement par les méthodes employées par Gauss pour la division du cercle; mais la résolution ne peut pas, en général, s'effectuer pour l'équation de degré $2n+2$. Il y a exception dans le cas où $e = c$: c'est le théorème sur la division de la lemniscate par la règle et le compas.

A propos de ces *Recherches*, Gauss écrit à Crelle :

« .... D'autres occupations m'empêchent pour le moment de rédiger ces recherches. M. Abel m'a prévenu au moins d'un tiers. Il vient d'enfiler précisément la même route dont je suis sorti en 1798. Ainsi je ne m'étonne nullement de ce que, pour la majeure partie, il en soit venu aux mêmes résultats. Comme d'ailleurs, dans sa déduction, il a mis tant de sagacité, de pénétration et d'élégance, je me crois par cela même dispensé de la rédaction de mes propres recherches. »

Avant d'avoir lu le Mémoire d'Abel, Jacobi envoyait à Schumacher, sous le titre *Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis,* un travail publié en décembre 1827 dans le n° 127 des *Astronomische Nachrichten* et contenant la démonstration du théorème sur la transformation rationnelle, démonstration fondée sur le nombre de constantes que comporte la substitution rationnelle $y = \frac{U}{V}$. Jacobi y introduit aussi, indépendamment d'Abel, la fonction inverse uniforme de l'intégrale elliptique, appelant sin am ce qu'Abel appelait φ; il y donne enfin ce théorème, sans d'ailleurs rien dire de la suite des idées qui l'ont conduit au résultat :

L'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = \mathrm{M}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}$$

admet la solution

$$1-y = \frac{(1\pm x)\left(1\pm\dfrac{x}{\sin\operatorname{coam}\dfrac{2\mathrm{K}}{2n+1}}\right)^2\cdots\left(1\pm\dfrac{x}{\sin\operatorname{coam}\dfrac{2n\mathrm{K}}{2n+1}}\right)^2}{\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\operatorname{am}\dfrac{2\mathrm{K}}{2n+1}\right)\cdots\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\operatorname{am}\dfrac{2n\mathrm{K}}{2n+1}\right)}.$$

Dans une Lettre à Legendre (12 janvier 1828), Jacobi parle des équations modulaires en général, équations qui forment comme un lien entre la théorie des transcendantes elliptiques, l'Algèbre et la théorie des nombres; de l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfont les équations modulaires qui corrspondent à un degré quelconque de transformation, et ajoute la remarque suivante :

« Aussi j'ai trouvé que, dans certains cas, on retombe sur le même module.... Ce sera dans tous les cas où le nombre n est la somme de deux carrés, $n = a^2 + 4b^2$, $\varkappa$ étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$; la fonction elliptique se trouve alors multipliée par $a \pm 2bi$. C'est un genre de multiplication qui n'a pas son analogie dans les arcs de cercle. »

Dans cette même Lettre, il parle des *Recherches* d'Abel et les résume en employant ses propres notations. Il indique en outre une méthode plus simple pour la résolution algébrique de l'équation de la division. Il publia ce résultat dans une Lettre à Crelle, datée du 25 janvier 1828, que ce dernier inséra dans le premier cahier du troisième Volume de son *Journal*. A propos de cette démonstration, Abel envoya à Crelle (27 août 1828) les *Théorèmes sur les fonctions elliptiques* insérés dans le deuxième cahier du quatrième Volume. Il s'y appuie sur cette proposition fondamentale :

Soit $\psi(\theta)$ *une fonction entière quelconque de la quantité* $\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, *qui reste la même en changeant* θ *en* $\theta + \alpha$ *et en* $\theta + \beta$ $\left(\alpha = \frac{2\omega}{2n+1}, \beta = \frac{2\varpi i}{2n+1}\right)$; *soit* ν *le plus grand exposant de la quantité* $\varphi(\theta)$ *dans la fonction* $\psi(\theta)$; *on aura toujours*

$$\psi(\theta) = p + qf(2n+1)\theta . F2n+1)\theta,$$

où p *et* q *sont deux fonctions entières de* $\varphi(2n+1)\theta$, *la première du degré* ν *et la seconde du degré* $\nu - 2$.

Jacobi revient sur la résolution algébrique des équations de division et de transformation dans une intéressante Lettre à Legendre du 18 janvier 1829.

Pendant que Jacobi s'efforçait d'approfondir la nature des fonctions doublement périodiques et d'en asseoir, par l'introduction des fonctions ϑ, la théorie sur de nouvelles bases, Abel (12 février 1828) terminait la seconde Partie de ses *Recherches,* publiée dans le deuxième cahier du troisième Volume du *Journal de Crelle*. Il s'y occupe d'abord de la possibilité d'exprimer algébriquement la fonction $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ quand certaines relations entre e et c sont satisfaites :

« C'est », dit-il, « ce qui arrive toujours si $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$ peut être exprimé rationnellement par $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et des quantités connues, ce qui a lieu pour une infinité de valeurs de $\frac{c}{e}$. Dans tous les cas l'équation $P_n = 0$ peut être résolue par une seule et même méthode uniforme, qui est applicable à une infinité d'autres équations de tous les degrés. J'exposerai cette méthode dans un Mémoire séparé, et je me contenterai pour le moment de considérer le cas le plus simple et qui résulte de la supposition $e = c = 1$ et $n = 4\nu + 1$. »

Puis il donne le théorème sur la division de la lemniscate.

Il s'occupe ensuite de la théorie de la transformation, qu'il traite sans avoir eu connaissance des travaux de Jacobi, ainsi qu'il le dit lui-même à la fin de son Mémoire, ainsi que l'a reconnu d'ailleurs Jacobi avec des paroles qui témoignent de son admiration pour Abel.

« M. Legendre », dit ce dernier, « a fait voir, dans ses *Exercices de Calcul intégral,* comment l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}$ peut être transformée en d'autres intégrales de la même forme avec un module différent. Je suis parvenu à généraliser cette théorie par le théorème suivant : *Si l'on désigne par* α *la quantité* $\frac{(m+\mu)\omega+(m-\mu)\varpi i}{2n+1}$, *où au moins l'un des deux nombres entiers* m *et* μ *est premier avec* $2n+1$, *on aura*

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

où

$$y = f.x \frac{(\varphi^2\alpha - x^2)\,..(\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha x^2)\ldots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha x^2)}.$$

Et plus loin :

« Pour avoir une théorie complète de la transformation des fonctions elliptiques, il faudrait connaître toutes les transformations possibles : or je suis parvenu à démontrer qu'on les obtient toutes en combinant celle de M. Legendre avec celles contenues dans la formule ci-dessus, même en cherchant la relation la plus générale entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques. Ce théorème, dont les conséquences embrassent presque toute la théorie des fonctions elliptiques, m'a conduit à un très grand nombre de belles propriétés de ces fonctions. »

Dans la Section intitulée *Sur l'intégration de l'équation séparée* $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+\mu^2y^2)}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+\mu^2x^2)}}$, il énonce le théorème suivant :

En supposant a réel et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que a soit un nombre rationnel; en supposant a imaginaire et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que a soit de la forme $m \pm \sqrt{-1}\sqrt{n}$, *où m et n sont* *des nombres rationnels. Dans ce cas, la quantité μ n'est pas arbitraire; il faut qu'elle satisfasse à une équation qui a une infinité de racines réelles et imaginaires. Chaque valeur de μ satisfait à la question.*

« La démonstration de ces théorèmes », dit-il plus loin, « fait partie d'une théorie très-étendue des fonctions elliptiques, dont je m'occupe actuellement, et qui paraîtra aussitôt qu'il me sera possible. »

L'année suivante, Abel mourait sans avoir pu publier cette théorie.

Dans le même cahier du *Journal de Crelle* qui contenait la seconde Partie des *Recherches*, paraissait une Lettre de Jacobi datée du 2 avril 1828, où il donnait l'expression de sinam comme quotient de deux séries de Fourier, les deux fonctions Θ et H, et le développement de $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ suivant les puissances de $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$.

Ces relations entre les périodes et les fonctions ϑ, et d'autres analogues, appartiennent à Jacobi seul. Abel, qui les donne en partie dans la *Note sur quelques formules elliptiques,* communiquée à Crelle en 1828 et parue en 1829 dans le premier cahier du quatrième Volume, s'exprime ainsi : « Formule due à M. Jacobi (t. III, p. 193, où ce géomètre en présente plusieurs autres très-remarquables et très-élégantes). »

Dans le même travail, Jacobi donne le développement de $\sqrt{\varkappa}$ comme quotient de deux séries procédant suivant les puissances à exposants carrés de q et de $q^{\frac{1}{4}}$. Enfin il y donne un résultat trouvé par Abel sous une autre forme, à savoir que, *à un module donné, pour un degré premier de transformation, correspondent toujours $n+1$ autres modules transformés que l'on obtient en remplaçant q par*

$$q^n,\quad q^{\frac{1}{n}},\quad \alpha q^{\frac{1}{n}},\quad \ldots,\quad \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}},$$

où $\alpha^n = 1$.

Ce même cahier du *Journal de Crelle* contient encore un travail de Jacobi, daté du 24 avril 1828 et intitulé *Note sur la décomposition d'un nombre en quatre carrés.*

Cependant Abel cherchait à généraliser le problème de la transformation, où, pour la publication, il avait été prévenu par Jacobi. Dans un travail daté du 27 mai 1828 et inséré dans le n° 138 des *Astronomische Nachrichten* en juin 1828, il annonce que les transformations algébriques peuvent toujours se ramener aux transformations rationnelles, et traite ces dernières en prenant pour base l'étude des périodes de l'intégrale proposée et de la transformée; il montre comment, lorsque le degré de transformation est composé, le problème se ramène à d'autres problèmes analogues, mais plus simples.

Vient ensuite une série de petites Notices, concernant la théorie de la transformation, où les deux géomètres rencontrent en partie les mêmes théorèmes et où chacun cherche à prévenir les publications de l'autre. Dans la *Suite des Notices sur les fonctions elliptiques,* datée du 21 juillet 1828 et publiée dans le troisième cahier du troisième Volume du *Journal de Crelle,* Jacobi introduit les fonctions Θ et H, considérées en elles-mêmes, comme fonctions fondamentales; il montre que les intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce peuvent s'exprimer au moyen des fonctions ϑ.

Il y développe l'équation aux dérivées partielles des fonctions ϑ, donne les développements de ces transcendantes en séries de puissances, donne l'élégante expression du multiplicateur de la transformation

$$M^2 = \frac{n(\varkappa - \varkappa^3)}{\lambda - \lambda^3}\frac{d\lambda}{d\varkappa},$$

donne la définition des équations du multiplicateur et cette propriété remarquable de leurs racines consistant en ce que, pour un degré premier de transformation, la moitié des valeurs de $\sqrt{M}$ s'exprime linéairement au moyen de l'autre moitié.

Il revient d'ailleurs sur l'expression des intégrales de troisième espèce au moyen des fonctions ϑ, dans un travail daté du 11 janvier 1829 et inséré dans le deuxième cahier du *Journal de Crelle;* il y donne la formule

$$\Pi(u, a) = uz(a) + \log\sqrt{\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}}.$$

Dans le même Mémoire, il développe les formules de transformation pour les intégrales de deuxième et de troisième espèce, et ajoute :

« On peut aussi parvenir directement de la fonction $\Theta(u)$ aux formules de transformation, en partant de son développement en produit infini, comme nous l'avons montré dans le troisième Volume de ce Journal. De là, en suivant une marche inverse de celle qu'on vient de présenter, on tire sur-le-champ les formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques de la première et de la troisième espèce, et, en différentiant, celles de transformation des fonctions elliptiques de la seconde espèce. »

Il donne enfin l'équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle satisfont le numérateur et le dénominateur d'une substitution rationnelle $\frac{U}{V}$ qui sert à la transformation des fonctions elliptiques de première espèce, en sorte que la formation algébrique d'une telle substitution « est entièrement réduite à la recherche des équations aux modules », et termine par le théorème suivant :

Étant supposés connus tous les modules dans lesquels on peut transformer un module donné $\varkappa$ *à l'aide d'une transformation correspondant au nombre* n, *on peut exprimer par ces modules toutes les quantités de la forme* $\sin\operatorname{am}\frac{2mK + 2m'iK'}{n}$, m, m' *étant des nombres quelconques, sans qu'il soit nécessaire de résoudre une équation algébrique.*

Enfin, dans le Mémoire intitulé *De functionibus ellipticis commentatio,* qui, daté du mois d'avril 1829, parut dans le quatrième cahier du quatrième Volume du *Journal de Crelle*, il donne les formules de transformation des intégrales de deuxième et de troisième espèce au moyen des formules de transformation des fonctions ϑ, et développe l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre à laquelle satisfont U et V; il ajoute : « Quod sane est theorema memorabile, satis reconditum, numeratorem et denominatorem substitutionis U, V singulos definiri posse per æquationem differentialem tertii ordinis.... Integrale completum æquationum differentialium tertii ordinis, quibus functiones U, V definiuntur, in promtu esse non videtur. »

En avril 1829, l'impression des *Fundamenta nova* était terminée.

Pendant que Jacobi s'efforçait d'approfondir la nature spéciale des fonctions elliptiques, de ces fonctions qui, suivant ses expressions, « ont une manière d'être pour ainsi dire absolue », et dont le « caractère spécial est d'embrasser tout ce qu'il y a de périodique dans l'analyse », Abel s'attaquait plus volontiers à des questions d'un caractère général.

Dans un travail daté du 25 septembre 1828, inséré dans le n° 147 des *Astronomische Nachrichten,* il se pose ce problème :

Trouver tous les cas possibles où l'on pourra satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = a\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

par une équation algébrique entre les variables x *et* y, *en supposant les modules* c *et* c_1 *moindres que l'unité et le coefficient* a *réel ou imaginaire.*

Il revient sur la transformation dans la Note *Sur le nombre des transformations différentes qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction donnée de premier degré,* publiée dans le quatrième cahier du troisième Volume du *Journal de Crelle,* et dans le Mémoire, publié en même temps, intitulé *Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce :*

« Si une intégrale algébrique $f(y, x) = 0$ satisfait à l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

on aura toujours

$$\int \frac{A+Bx^2}{1-\frac{x^2}{n^2}}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$
$$= \int \frac{A'+B'y^2}{1-\frac{y^2}{m^2}}\,\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} + k\log p,$$

où A, B, n sont des quantités données, A′, B′, m, k des quantités constantes, fonctions des premières, et p une certaine fonction algébrique de y et x. Il est très remarquable que les paramètres m et n sont liés entre eux par la même équation que y et x, savoir $f(m, n) = 0$. »

Le même cahier du *Journal de Crelle* contient les *Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine classe de fonctions transcendantes*. C'est la particularisation, pour le cas des intégrales hyperelliptiques, du théorème général contenu dans le Mémoire communiqué à l'Académie des Sciences de Paris en 1826. Il y parle d'ailleurs de la proposition générale et en promet la démonstration; mais, pour le moment, il ne veut que « considérer un cas particulier qui embrasse en même temps les fonctions elliptiques, savoir les fonctions contenues dans la formule

$$\psi(x) = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

R étant une fonction rationnelle et entière quelconque, et r une fonction rationnelle ».

Il montre d'abord que, en posant

$$\psi(x) = \int \frac{f(x)\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}},$$

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions entières, et

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x),$$
$$\Theta(x)^2\varphi_1(x) - \Theta_1(x)^2\varphi_2(x) = A(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_\mu)^{m_\mu},$$

on a, en désignant par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mu$ des quantités égales à ± 1,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 m_1 \psi(x_1) + \varepsilon_2 m_2 \psi(x_2) + \ldots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi(x_\mu) \\
&\quad = C - \frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}} \log\left[\frac{\Theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} + \Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\Theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} - \Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right] \\
&\qquad + \prod \frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \log\left[\frac{\Theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \Theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\Theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \Theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right];
\end{aligned}$$

il donne ensuite les théorèmes analogues pour les intégrales de la forme

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{\varphi(x)}}$$

et en conclut la proposition générale.

Abel travaillait alors, ainsi qu'il résulte d'une lettre à Legendre, à la composition d'un Ouvrage qui devait comprendre l'ensemble de ses découvertes; n'espérant point d'ailleurs pouvoir le faire imprimer en Norvége, il envoya à Crelle le travail considérable intitulé *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.*

« Surtout », dit-il, « j'ai cherché à donner de la généralité à mes recherches en me proposant des problèmes d'une vaste étendue. Si je n'ai été assez heureux de les résoudre complétement, au moins j'ai proposé les moyens pour y parvenir. L'ensemble de mes recherches sur cet objet formera un Ouvrage de quelque étendue, mais que les circonstances ne me permettent pas encore de publier. C'est pourquoi je vais donner ici un précis de la méthode que j'ai suivie, avec les résultats généraux auxquels elle m'a conduit. »

La première Partie du *Précis* contient deux théorèmes très généraux; voici le premier :

Si $\int \frac{r\,dx}{\Delta(x,c)}$, *où* r *est une fonction rationnelle quelconque de* x, *est exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques et par les fonctions elliptiques* $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots$, *on pourra toujours supposer*

$$\int \frac{r\,dx}{\Delta(x,c)} = p\Delta(x,c) + \alpha\psi(y) + \alpha'\psi_1(y_1) + \ldots$$
$$+ A_1 \log\left[\frac{q_1 + q'_1\Delta(x,c)}{q_1 - q'_1\Delta(x,c)}\right] + \ldots,$$

où toutes les quantités $p, q, \ldots, q_1, \ldots, q'_1, \ldots, y, y_1, y_2, \ldots$ *sont des fonctions rationnelles de* x.

Le second théorème répond à la question suivante :

Trouver tous les cas possibles dans lesquels on peut satisfaire à une équation de la forme

$$\begin{aligned}&\alpha_1\varpi(x_1, c_1) + \ldots + \alpha_n\varpi(x_n, c_n)\\ &\quad + \alpha'_1\varpi_0(x'_1, c'_1) + \ldots + \alpha'_m\varpi_0(x'_m, c'_m)\\ &\quad + \alpha''_1\Pi(x''_1, c''_1, \alpha_1) + \ldots + \alpha''_\mu\Pi(x''_\mu, c''_\mu, a_\mu)\\ &= u + A_1\log v_1 + \ldots + A_\nu \log v_\nu.\end{aligned}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_m, \alpha''_1, \ldots, \alpha''_\mu, A, \ldots, A_\nu$ *sont des quantités constantes,* $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_m, x''_1, \ldots, x''_\mu$ *des variables liées entre elles par des équations algébriques, et* $u, v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ *des fonctions algébriques de ces variables.*

Si une équation quelconque de cette forme a lieu, et qu'on désigne par c un quelconque des modules qui y entrent, il y aura parmi les autres au moins un module c′ tel qu'on puisse satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x, c)},$$

en mettant pour y une fonction rationnelle de x et vice versa.

La seconde Partie du *Précis* ne fut point publiée.

« C'est jusqu'ici, dit Crelle, que ce Mémoire est parvenu à l'éditeur; M. Abel est mort (6 avril 1839) sans l'avoir fini. »

Il devait contenir l'étude des intégrales elliptiques à module réel et plus petit que 1, des fonctions inverses des intégrales elliptiques de première espèce et des intégrales de deuxième et de troisième espèce, de la double périodicité, la détermination des zéros et des infinis, le théorème de l'addition, la théorie de la division. Abel devait aussi, dans cette Partie, revenir sur la théorie générale des transformations algébriques en partant de la considération des périodes des fonctions inverses, s'occuper des équations modulaires et traiter de ces transcendantes qui constituent le numérateur et le dénominateur des fonctions inverses; enfin tous les résultats de la seconde Partie devaient être étendus aux intégrales ayant un module quelconque réel ou imaginaire.

« Dans ce qu'il a fait », dit Poisson, « la postérité saura reconnaître tout ce qu'il aurait pu faire s'il eût vécu davantage. »

Nous ne suivrons pas M. Koenigsberger dans l'analyse des *Fundamenta nova*, et nous arrivons à ce qui concerne les papiers posthumes de Gauss, de celui que Legendre, dans une de ses Lettres à Jacobi, ne pouvant croire à un silence si longtemps gardé sur des découvertes aussi considérables, appelait familièrement l'*envahisseur*, et qui laissa à d'autres, tout entière, une gloire qui aurait pu lui appartenir et que, malgré le rang que lui assurent ses immortels travaux, il n'aurait sans doute pas jugée indigne de lui. M. Koenigsberger, dans ce qui suit, pour ce qui concerne les dates, prend pour base le travail de M. Schering.

M. Schering fait d'abord remarquer que, d'après une communication relative à une déclaration orale de Gauss, ce dernier paraît avoir connu dès l'année 1794 les relations qui existent entre la moyenne arithmético-géométrique et les séries de puissances où les exposants procèdent suivant les carrés des nombres entiers, c'est-à-dire, dans le langage actuel, le développement de l'intégrale elliptique complète K suivant les puissances de q, ou, si l'on veut, cette équation

$$K = 2\pi \vartheta_3^2,$$

qui est une des plus belles découvertes de Jacobi.

Il existe une Note manuscrite de Gauss ainsi conçue : *Functiones lemniscaticas considerare cœperamus* 1797, *Januar* 8.

Les recherches qui portent ce titre : *Elegantiores integralis* $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ *proprietates* doivent évidemment être classées parmi les premières qu'il ait faites sur ce sujet. L'auteur part de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, forme la fonction inverse et pose

$$\mathrm{sl}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x, \quad \mathrm{cl}\left(\frac{\omega}{2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\right) = x,$$

développe le théorème de l'addition pour $\mathrm{sl}(a \pm b)$, $\mathrm{cl}(a \pm b)$, détermine les zéros de ces fonctions lemniscatiques, établit le théorème de la multiplication pour $\mathrm{sl}(n\varphi)$ et $\mathrm{cl}(n\varphi)$ et les développements procédant suivant les puissances pour $\mathrm{arc\,sl}\,x$ et $\mathrm{sl}\,\varphi$. Enfin il introduit comme numérateur et dénominateur de $\mathrm{sl}\,\varphi$ les transcendantes $P(\varphi)$ et $Q(\varphi)$, donne leurs développements suivant les puissances et détermine les limites de convergence; ces transcendantes sont précisément les fonctions de Weierstrass $\mathrm{Al}(w)_1$, $\mathrm{Al}(w)_0$ dans le cas où $k^2 = -1$.

Dans un cahier de notes commencé en juillet 1798 et portant le titre *De curva lemniscata,* il établit l'intégrale algébrique de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0,$$

en déduit le théorème de l'addition pour $\mathrm{sl}(p \pm q)$, et donne le développement du numérateur $P(\varphi)$ et du dénominateur $Q(\varphi)$ de $\mathrm{sl}(\varphi)$ en un produit simplement infini, dont les facteurs sont respectivement

$$1 + \frac{4s^2}{(e^{k\pi} + e^{-k\pi})^2}, \quad 1 - \frac{4s^2}{\left(e^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} + e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2}}\right)^2}.$$

Sur cette représentation analytique des transcendantes $P(\varphi)$ et $Q(\varphi)$, Gauss dit : « *Id quod rigorose demonstrare possumus.* » Nous devons donc supposer qu'il était en possession d'une partie des propositions de la théorie des fonctions relatives au développement en produit infini d'une fonction uniforme. Entre $P(\varphi)$ et une fonction $\mathfrak{P}(\varphi)$ qu'il définit à nouveau [et qui n'est autre que la fonction $P(\varphi)$ de la définition précédente], il établit des relations de la forme

$$\mathfrak{P}(\psi\omega) = e^{\frac{1}{2}\pi\psi^2}\, P(\psi\omega);$$

c'est précisément, avec les notations actuelles, la relation

$$\mathrm{Al}(w)_3 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\, e^{-\frac{E\varkappa^2}{2\Omega}w^2}\, \frac{\vartheta\left(\frac{2w}{\Omega}\right)}{\vartheta_1}.$$

Enfin il donne le développement de $\mathrm{sl}(\varphi)$ en fractions simples et celui de $\log P(\psi\omega)$ en cosinus de multiples de $2\psi\pi$.

Un cahier de notes commencé en novembre 1799 contient, sur la lemniscate, le développement en série de Fourier des fonctions $P(\psi\omega)$, $Q(\psi\omega)$, le développement déjà cité

$$\sqrt{\frac{\omega}{\pi}} = 1 - 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} - \ldots,$$

les développements en séries de Fourier de $\frac{1}{\mathrm{sl}(\psi\omega)}$, $P^2(\psi\omega)$, $Q^2(\psi\omega)$, et, sous le titre *Variæ summationes serierum absconditæ*, des résultats de la forme

$$\left(\frac{2}{e^{\pi} + e^{-\pi}}\right)^2 + \left(\frac{2}{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}\right)^2 + \left(\frac{2}{e^{3\pi} + e^{-3\pi}}\right)^2 + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\pi^2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2},$$

et le développement en produit de la période

$$\frac{\omega}{2} = \frac{3}{2}\,\frac{4}{5}\,\frac{7}{6}\,\frac{8}{9}\,\frac{11}{10}\,\frac{12}{13}\cdots$$

Enfin, à l'aide de la moyenne arithmético-géométrique, sur laquelle nous reviendrons bientôt, il obtient des formules sur la division en cinq parties égales de la lemniscate, formules qui se relient évidemment avec ces théorèmes généraux sur la division de la lemniscate, dont, comme le prouve la publication des *Disquisitiones arithmeticæ,* Gauss était en possession, et qu'Abel retrouva trente ans plus tard. Concurremment avec ses recherches sur les fonctions lemniscatiques, Gauss s'occupait des intégrales et des fonctions elliptiques en général. Dans un cahier dont la première page porte en tête *Varia, imprimis de integrali* $\int \frac{du}{\sqrt{1+\mu^2 \sin^2 u}}$, *Novembr.* 1799, nous trouvons traité, pour l'intégrale générale elliptique de première espèce, prise sous la forme normale de Legendre, le problème de l'inversion, tel qu'il a été résolu, tant d'années plus tard, par Abel et Jacobi.

L'auteur y suppose connue la théorie de la moyenne arithmético-géométrique, ou, si l'on veut, la connaissance de ce théorème que, *si dans l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dT}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2 T + n^2 \sin^2 T}}$$

on fait la substitution

$$\sin T = \frac{2m \sin T'}{(m+n)\cos^2 T' + 2m \sin^2 T'},$$

l'intégrale se change en

$$\int_0^{2\pi} \frac{dT'}{2\pi\sqrt{m'^2\cos^2 T' + n'^2 \sin^2 T'}},$$

où

$$\frac{m+n}{2} = m', \quad \sqrt{mn} = n',$$

en sorte que, si l'on forme la suite indéfinie des moyennes arithmétiques et géométriques m', n', m'', n'', ..., moyennes qui tendent vers une limite commune $\mu = \mathrm{M}(m, n)$, on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\mathrm{T}}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2\mathrm{T} + n^2\sin^2\mathrm{T}}} = \frac{1}{\mu}.$$

Ce sont là d'ailleurs des propositions que Gauss ne publia que beaucoup plus tard, en janvier 1818, dans un travail intitulé *Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datæ exercet planeta*. Dans l'analyse donnée par lui-même de son Mémoire il s'exprime ainsi (9 février 1818) :

« L'auteur a saisi la première occasion qui s'offrait à lui pour donner les premiers linéaments d'un *nouvel algorithme*, dont il s'est servi depuis de longues années pour la détermination de ces transcendantes, et sur lequel il publiera dans l'avenir des recherches étendues contenant un grand nombre de résultats importants. »

Il fait comprendre aussi qu'il est en possession d'une théorie très-étendue des transcendantes elliptiques, dont les recherches de Lagrange et de Legendre ne sont que les commencements :

« Il n'échappera pas au lecteur qu'une multitude de problèmes intéressants, qui se relient aux transcendantes en question, se trouvent résolus avec la plus grande facilité au moyen de cet algorithme. Comme exemple, nous citerons la rectification de l'ellipse : en posant son demi-grand axe $= n$, sa circonférence sera

$$\frac{2\pi}{\mu}[m'^2 - 2(m''^2 - n''^2) - 4(m'''^2 - n'''^2) - \ldots].$$

Un autre exemple est fourni par la durée des oscillations d'un pendule sur un arc fini, durée qui est à celle des oscillations infiniment petites comme l'unité est à la moyenne arithmético-géométrique entre 1 et le cosinus de l'arc total d'oscillation. Enfin il faut encore remarquer que l'auteur a cru devoir publier sous leur forme primitive ces résultats, trouvés il y a bon nombre d'années, indépendamment des recherches analogues de Lagrange et de Legendre, quoiqu'ils puissent en partie être déduits aisément des découvertes de ces géomètres, tant parce que cette forme lui paraît présenter des avantages essentiels que parce qu'elle est précisément le point de départ d'une théorie beaucoup plus étendue où ses travaux l'ont conduit dans une direction toute différente de celle qui a été suivie par les géomètres qu'il a nommés. »

Les recherches de Gauss sur la moyenne arithmético-géométrique sont contenues sous ces titres :

De origine proprietatibusque generalibus numerorum arithmetico-geometricorum

et

De functionibus transcendentibus quæ ex differentiatione mediorum arithmetico-geometricorum oriuntur,

dans un cahier dont Gauss a commencé à se servir depuis l'année 1800, et où il se trouve divers développements en séries relatives à la moyenne arithmético-géométrique.

C'est en partant de ces recherches que Gauss jette les fondements de la théorie des intégrales elliptiques et des fonctions inverses.

Faisant

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+\mu^2\sin^2 u}} = \varphi$$

et substituant $\mu = \tang \nu$, il définit les périodes par les expressions

$$\frac{\pi}{M(1, \sqrt{1+\mu^2})} = \frac{\pi \cos\nu}{M(1, \cos\nu)} = \omega,$$

$$\frac{\pi}{\mu M\left(1, \sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}\right)} = \frac{\pi \cos\nu}{M(1, \sin\nu)} = \omega';$$

il pose

$$\sin u = S(\varphi) = S(\psi\omega),$$

donne les développements en série trigonométrique de la fonction inverse uniforme, et écrit

$$S(\psi\omega) = \frac{T(\psi\omega)}{V(\psi\omega)},$$

où T et V sont, à un facteur constant près, ce que l'on a appelé plus tard ϑ_1 et ϑ_0; il développe ces fonctions et leurs carrés en séries de

Fourier et en produits infinis sous la forme même qui a été donnée plus tard par Abel et Jacobi.

Toutes ces recherches étaient vraisemblablement terminées en 1798, comme il résulte d'un passage d'une Lettre de Crelle à Abel, où il cite une communication de Gauss, qui s'exprime ainsi :

« Il (Abel) vient d'enfiler précisément la même route dont je suis sorti en 1798. »

Sous ce titre, *Einige neue Formeln die lemniscatischen Functionen betreffend,* on trouve, dans un cahier commencé en 1801, une suite de résultats intéressants et qui probablement ont été trouvés beaucoup plus tôt. L'auteur part de la multiplication complexe de la fonction lemniscatique, donne le développement en série de celle-ci, ainsi que l'équation différentielle pour la transcendante $P(\varphi)$ et le développement de cette dernière en série de puissances.

En faisant abstraction du passage célèbre des *Disquisitiones,* les publications relatives à toutes ces recherches se réduisent à deux Mémoires : l'un est intitulé *Summatio quarundam serierum singularium,* et a été publié en septembre 1808; on y trouve étudiés les séries et les produits qui appartiennent à la théorie des fonctions elliptiques; l'autre est le Mémoire sur la *Determinatio attractionis,* etc., de janvier 1818, dont nous avons déjà parlé et où Gauss traite de la moyenne arithmético-géométrique.

De l'année 1808, il y a une suite d'importantes recherches sous ce titre, *Zur Theorie der transcendenten Functionen.* Gauss y donne la définition des fonctions ϑ, qu'il appelle T; elles y sont définies comme sommes infinies de quantités exponentielles à exposants quadratiques : il les développe en séries de cosinus des multiples de l'argument, établit les relations entre les différentes fonctions ϑ pour l'argument zéro, développe la formule pour une transformation du second degré de ces transcendantes, traite les équations de la division pour les nombres 3, 5 et 7. Enfin la fonction ϑ est développée en un produit doublement infini; de ce développement résulte une formule de transformation linéaire. Nous savons en outre, par une lettre de Jacobi à Legendre du 5 août 1827, que Gauss, outre la théorie de la division par 3, 5 et 7, connaissait la chaîne des modules qui correspond à ces degrés de transformation.

Le cahier terminé le 28 avril 1809 contient les relations entre les fonctions ϑ à argument zéro pour des multiples du module et les relations entre les fonctions ϑ à argument quelconque. Mais plus intéressantes et plus importantes sont les recherches, dont les résultats ont été retrouvés plus tard par Abel, qui sont contenues dans le cahier terminé le 2 mai 1809; elles portent ce titre : *Fortsetzung der Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel.* Elles contiennent les relations entre les fonctions ϑ de module τ et les fonctions correspondantes de modules 4τ, 16τ, ..., les développements en série des fonctions ϑ à variables nulles, les relations entre les diverses fonctions ϑ pour le module augmenté d'une unité et la transformation linéaire complète de ces transcendantes pour la valeur zéro de l'argument. Là aussi sont traitées les relations qui existent entre les fonctions ϑ pour des relations linéaires entre des modules que l'on suppose racines d'équations quadratiques ayant le même déterminant négatif, c'est-à-dire pour les modules de la multiplication complexe. Enfin on y trouve encore les formules de transformation du second degré pour les fonctions ϑ, leur équation aux dérivées partielles et les formules connues pour la seconde dérivée logarithmique de ces fonctions.

Le cahier commencé en mai 1808 contient les formules d'addition et de multiplication (même pour un argument complexe), et aussi les formules de transformation de degré n pour les fonctions ϑ qui correspondent aux fonctions lemniscatiques. Enfin les *Hundert Theoreme über die neuen Transcendenten,* dont, d'après M. Schering, on ne peut pas fixer la date, concernent encore le développement des fonctions ϑ, contiennent différents cas simples de transformation de ces transcendantes pour l'argument zéro et diverses relations entre ces fonctions et la moyenne arithmético-géométrique.

Ce n'est plus que le 20 février 1817 qu'on retrouve dans les papiers de Gauss une indication relative à la *lemniscatische Function.* En faisant

$$\mathrm{sl}(x) = \mathrm{X}, \quad \int x^2 d\mathrm{X} = \mathrm{F}(\mathrm{X}),$$

elle contient le théorème de l'addition des intégrales de seconde espèce, connu depuis longtemps, sous la forme

$$F(a+b) = F(a) + F(b) - \mathrm{sl}\,a.\mathrm{sl}\,b.\mathrm{sl}(a+b).$$

Les recherches d'Abel et de Jacobi fournirent de nouveau à Gauss l'occasion de revenir à des études abandonnées depuis longtemps; comme le fait ressortir M. Schering, les Lettres de Gauss à Schumacher, du 4 et du 19 août 1827, montrent que Schumacher, avant de publier la Lettre de Jacobi dans les *Astronomische Nachrichten,* en avait communiqué l'original à Gauss. On trouve dans les papiers posthumes de ce dernier un passage vraisemblablement inspiré par la lecture de la première Lettre de Jacobi à Schumacher. Dans un travail intitulé *Allgemeines Theorem* (6 août 1827), la transformation, pour les degrés 2, 3, 7, est traitée au moyen des formules de transformation, correspondantes à ces degrés, des fonctions ϑ de Jacobi que Gauss appelle P, Q, R, S; elle est fondée sur une méthode que Jacobi développa plus tard. La seconde Lettre de Jacobi, sur l'expression analytique générale des transformations rationnelles, donne à Gauss l'occasion (29 août) de rechercher quelles relations doivent exister, pour l'argument zéro, entre les fonctions ϑ primitives et transformées, et de former l'équation modulaire pour la transformation du cinquième degré. La fin des indications relatives à cette époque concerne le développement d'un cas de la transformation linéaire des fonctions ϑ et des conditions de convergence de ces dernières; à ces conditions se relie immédiatement une proposition appartenant à la théorie des fonctions : *Si à l'intérieur d'un contour fermé on a constamment*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

et si sur le contour V *est constamment égal à* A, *on a partout* V = A.

En considérant l'ensemble des recherches faites par ce géomètre d'un incomparable génie, que nous a fait connaître la publication des papiers posthumes de Gauss, on est sûr de ne pas aller trop loin en affirmant qu'il avait trouvé à peu près trente ans avant Abel et Jacobi, au moins dans leurs lignes principales, une bonne partie des résultats et des méthodes dont la Science, en ce qui touche la théorie des fonctions elliptiques, est redevable à ces deux mathématiciens; il faut seulement excepter les recherches algébriques de Jacobi sur la théorie des fonctions elliptiques et ses découvertes concernant l'introduction des fonctions ϑ dans la théorie des intégrales de seconde et de troisième espèce, ainsi que les travaux d'Abel sur le théorème auquel on a donné son nom, sur la théorie de la transformation en général et sur la réduction des intégrales à différentielles algébriques. J. T.