BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur le tautochronisme quand on a égard au frottement

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 484-488
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_484_1>

SUR LE TAUTOCHRONISME QUAND ON A ÉGARD AU FROTTEMENT;

PAR M. G. DARBOUX.

Nous supposerons dans cet article qu'un point matériel soumis à l'action de forces dépendant uniquement de la position de ce point soit assujetti à se mouvoir sur une courbe, et nous nous proposons de former l'équation différentielle des courbes pour lesquelles le mouvement de ce point jouit de la propriété du tautochronisme quand on a égard au frottement. Nous suivrons, dans ce but, la belle méthode donnée par M. Puiseux (*Journal de Liouville*, t. XIX, 1re série, p. 418).

Soient T et N les composantes tangentielle et normale de la force qui agit sur le mobile. Désignons par v sa vitesse et par s l'arc parcouru, compté à partir d'un point fixe de la courbe. L'équation différentielle du mouvement sera, comme on sait,

$$\frac{d}{ds}\frac{v^2}{2} = \mathrm{T} - f\mathrm{N} - f\frac{v^2}{\rho}, \tag{1}$$

f désignant le coefficient de frottement et ρ le rayon de courbure de la courbe au point considéré.

Cette équation, étant linéaire, aura une intégrale de la forme

$$\frac{v^2}{2} = \mathrm{C}\varphi(s) + \psi(s),$$

φ et ψ étant deux fonctions de s à déterminer, et l'expression du temps sera

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{C}\varphi(s) + \psi(s)}}.$$

Pour que le mouvement jouisse de la propriété du tautochronisme, il faut que cette intégrale puisse se mettre sous la forme

$$t = a\int \frac{\mathrm{P}'\,ds}{\sqrt{\mathrm{A} - \mathrm{P}^2}},$$

P étant une certaine fonction de s, P' sa dérivée et A la constante arbitraire; on aura alors

$$\mathrm{T} = a\int_0^{\sqrt{\mathrm{A}}} \frac{d\mathrm{P}}{\sqrt{\mathrm{A} - \mathrm{P}^2}} = \frac{\pi a}{2}$$

et

$$a^2 v^2 = \frac{\mathrm{A} - \mathrm{P}^2}{\mathrm{P}'^2}. \tag{2}$$

On voit d'ailleurs, ce qui était évident *a priori*, que les deux limites entre lesquelles on intègre se rapportent au point $\mathrm{P} = \sqrt{\mathrm{A}}$ pour lequel la vitesse devient nulle, et au point $\mathrm{P} = 0$, pour lequel il y aurait équilibre si le mobile y était placé sans vitesse initiale.

Exprimons que la valeur (2) de v satisfait, quelle que soit la constante A, à l'équation différentielle (1); nous aurons les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\mathrm{P}'^2}\right) = -\frac{2f}{\rho\,\mathrm{P}'^2}, \\ &-\frac{\mathrm{P}}{a^2\mathrm{P}'} = \mathrm{T} - f\mathrm{N}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Pour intégrer la première, introduisons comme nouvelle variable l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x. En le désignant par ω, on aura

$$\frac{ds}{\rho} = d\omega,$$

et la première des équations (3) nous donnera

$$P' = e^{f\omega}.$$

On reconnaîtra aisément qu'il est inutile d'introduire une constante arbitraire.

Portons cette valeur de P' dans la seconde équation (3); nous aurons

$$\frac{P}{a^2} = e^{h\omega}(fN - T)$$

et, en différentiant les deux membres,

$$(4) \qquad \frac{\rho}{a^2} = f(fN - T) + \frac{d}{d\omega}(fN - T);$$

c'est l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Nous allons faire deux applications. Supposons d'abord que la force qui agit sur le mobile soit la pesanteur et que l'axe des y ait été pris vertical, on aura

$$T = -g\frac{dy}{ds} = -g\sin\omega,$$

$$N = \quad g\frac{dx}{ds} = \quad g\cos\omega,$$

et l'équation (4) deviendra

$$\frac{\rho}{a^2} = g(f^2 + 1)\cos\omega.$$

Cette équation est de même forme que dans le cas où il n'y a pas frottement. Donc :

La cycloïde est la seule courbe plane qui jouisse de la propriété du tautochronisme par rapport au mouvement d'un point pesant, quand on tient compte du frottement.

En second lieu, traitons le cas où la force est centrale. Si l'on considère la courbe sur laquelle le mobile est assujetti à se mouvoir comme l'enveloppe de la droite

$$x \sin\omega - y \cos\omega = \psi(\omega),$$

on trouvera aisément qu'en appelant r la distance à l'origine et en désignant par $r\varphi(r)$ la loi de la force émanant de ce point, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \varphi(r)\psi'(\omega), & r &= \sqrt{\psi^2 + \psi'^2}, \\ \mathrm{N} &= \varphi(r)\psi(\omega), & \rho &= \psi(\omega) + \psi''(\omega). \end{aligned}$$

L'équation (4) deviendra

$$\left[\frac{1}{a^2} + \varphi(r) - \frac{\varphi'\psi'}{r}(f\psi - \psi')\right](\psi + \psi'') = \psi(f^2 + 1)\varphi(r).$$

C'est une équation du second ordre en ψ qui paraît d'une intégration difficile.

Mais, si l'attraction est proportionnelle à la distance, $\varphi(r)$ sera une constante b, et l'équation deviendra

$$\left(\frac{1}{a^2} + b\right)(\psi + \psi'') = (f^2 + 1)\, b\psi$$

ou

$$\psi\left(\frac{1}{a^2} - bf^2\right) + \psi''\left(\frac{1}{a^2} + b\right) = 0.$$

Cette équation est encore de même forme que dans le cas où il n'y a pas de frottement. Donc :

L'épicycloïde est la seule courbe plane tautochrone pour des forces centrales proportionnelles à la distance, lorsqu'on tient compte du frottement.

En terminant, nous signalerons un élégant article de M. Haton de la Goupillière (*Journal de Liouville*, t. XIII, 2[e] série, p. 204), dans lequel il est démontré que l'épicycloïde est la courbe la plus générale pour laquelle la loi de la force soit comprise dans la formule générale de Lagrange relative au tautochronisme. Mais, comme le fait bien justement remarquer M. Haton de la Goupillière, la formule de Lagrange, qui contient des fonctions arbitraires d'une seule variable, est très-loin de donner la solution générale du problème du tautochronisme, et il résulte des remarques de M. Bertrand que la formule qui doit remplacer celle de Lagrange doit contenir dans son expression une fonction arbitraire de *deux* variables. La recherche que nous avons entreprise dans cet article n'était donc pas inutile.

Nous ferons d'ailleurs remarquer, en terminant, que la méthode suivie pourrait encore s'appliquer sans modification si l'on introduisait une résistance proportionnelle au carré de la vitesse et même de la forme

$$\varphi(s)v^2.$$