Bulletin des sciences

mathématiques et astronomiques

Ossian Bonnet

Note sur la formule qui sert de fondement à une théorie des séries trigonométriques; (Extrait d'une Lettre écrite à M. Darboux)

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 480-484

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_480_0>

MÉLANGES.

NOTE SUR LA FORMULE QUI SERT DE FONDEMENT A UNE THÉORIE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

(Extrait d'une Lettre écrite à M. Darboux),

PAR M. OSSIAN BONNET.

Il y a longtemps que je possède une solution entièrement satisfaisante de la question assez délicate que M. du Bois-Reymond vient de traiter dans votre dernier *Bulletin*. J'ai fait allusion à cette solution dans mon Mémoire sur les séries couronné par l'Académie de Bruxelles (note au bas de la page 11), et, il y a deux ou trois ans, je l'ai communiquée à M. Hermite, qui était alors préoccupé de l'insuffisance des raisonnements de Poisson et de Cauchy.

Peut-être penserez-vous qu'en raison de leur extrême simplicité les considérations dont je fais usage pourront encore aujourd'hui intéresser vos lecteurs.

a et $b > a$ étant deux nombres finis quelconques, positifs ou négatifs, et comprenant un nombre quelconque de multiples pairs de π parmi lesquels nous comptons zéro, il s'agit de trouver la limite vers laquelle tend

$$\int_a^b \frac{(1-\alpha^2)f(x)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} \tag{1}$$

lorsque α tend vers 1 en lui restant constamment inférieure.

Nous supposerons que l'intervalle de a à b ne renferme comme multiple pair de π que zéro, de sorte que a sera négatif et supérieur à -2π, et b positif et inférieur à 2π. On sait du reste que le cas général se ramène à celui-là en décomposant l'intégrale proposée en plusieurs intégrales partielles et en faisant pour chacune de celles-ci un facile changement de variable. Soit ε un nombre positif que nous n'assujettirons pour le moment qu'aux conditions d'être inférieur à b, à $2\pi-b$ et aux valeurs absolues de a et de $-2\pi-a$. Décomposons l'intégrale (1) en quatre de la manière suivante :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{-\varepsilon} \frac{(1-\alpha^2)f(x)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} + \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{(1-\alpha^2)f(x)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} \\ &\quad + \int_0^{\varepsilon} \frac{(1-\alpha^2)f(x)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} + \int_{\varepsilon}^{b} \frac{(1-\alpha^2)f(x)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}. \end{aligned}\right.$$

D'après les hypothèses faites sur ε, on a, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites de la première et de la quatrième intégrale,

$$\cos x < \cos\varepsilon,$$

par suite

$$1+\alpha^2-2\alpha\cos x > 1+\alpha^2-2\alpha\cos\varepsilon,$$

par suite

$$1+\alpha^2-2\alpha\cos x > \sin^2\frac{\varepsilon}{2};$$

car

$$1+\alpha^2-2\alpha\cos\varepsilon = (1-\alpha)^2\cos^2\frac{\varepsilon}{2} + (1+\alpha)^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$

est évidemment

$$> \sin^2\frac{\varepsilon}{2};$$

et enfin

$$\frac{1}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} < \frac{1}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Donc, si l'on appelle M un nombre positif égal ou supérieur à la plus grande valeur absolue que prend $f(x)$ quand x varie de a à b, le premier et le quatrième terme de la somme (2) seront, en valeur absolue, respectivement moindres que

$$\frac{(1-\alpha^2)\mathrm{M}(-a)}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}},\quad \frac{(1-\alpha^2)\mathrm{M}b}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}.$$

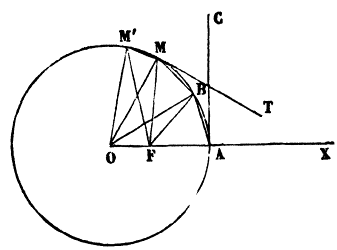
On en déduit que ces deux termes tendent vers zéro lorsque α tend vers 1, et cela quelle que soit la valeur attribuée à ε, pourvu que cette valeur reste invariable.

Reste à trouver les limites du deuxième et du troisième terme de la somme (2), ou simplement de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{(1-\alpha^2) f(x)\, dx}{1+\alpha^2 - 2\alpha \cos x},$$

car l'autre intégrale se déduit de celle-ci en changeant $f(x)$ en $f(-x)$.

Décrivons une circonférence de rayon 1, et sur le rayon OA prenons une longueur $\mathrm{OF} = \alpha < 1$; regardons x comme l'angle formé



par le rayon variable OM avec le rayon fixe OA, et soit BOA la valeur particulière de x désignée plus haut par ε. Tirons FM : nous formerons un second angle MFA, fonction de x, et que nous désignerons par y. Nous allons d'abord évaluer la dérivée $\frac{dy}{dx}$. Pour cela donnons à x un accroissement infiniment petit Δx, ce qui amènera OM en OM'; l'accroissement infiniment petit correspondant Δy de y sera M'FM, et nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\mathrm{M'FM}}{\mathrm{M'OM}} = \lim \frac{\sin \mathrm{M'FM}}{\text{corde}\,\mathrm{M'M}} = \lim \frac{\sin \mathrm{FM'M}}{\mathrm{FM}} = \frac{\sin \mathrm{FMT}}{\mathrm{FM}},$$

MT étant la tangente à la circonférence de rayon 1 au point M; on peut encore écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \mathrm{FMO}}{\mathrm{FM}}.$$

Mais le triangle OMF donne

$$\overline{\mathrm{FM}}^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x, \quad \alpha^2 = 1 + \overline{\mathrm{FM}}^2 - 2\,\mathrm{FM} \cos \mathrm{FMO};$$

donc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\overline{FM}^2-\alpha^2}{2\overline{FM}^2}=\frac{1}{2}+\frac{1-\alpha^2}{2(1+\alpha^2-2\alpha\cos x)},$$

d'où

$$\frac{(1-\alpha^2)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}=2dy-dx,$$

et par suite

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{(1-\alpha^2)f(x)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}=\int_0^{\varepsilon}f(x)(2dy-dx)$$
$$=k\int_0^{\varepsilon}(2dy-dx)=k(2\,\mathrm{BFA}-\mathrm{BOA}),$$

en appelant k une quantité convenable comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs que reçoit $f(x)$ lorsque x varie de o à ε. Faisant maintenant tendre α vers 1 ou le point F vers le point A, en laissant ε constant, c'est-à-dire en laissant le point B fixe, BFA tendra vers $\mathrm{BAX}=\frac{\pi}{2}+\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{BOA}$; donc la limite de l'intégrale sera πk.

k représente, avons-nous dit, une certaine quantité comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs que reçoit $f(x)$ lorsque x varie de o à ε; mais, comme ε peut être pris aussi petit que l'on veut, on voit que k ne peut être que $f(0)$ ou plutôt que $f(+0)$, en représentant ainsi la limite vers laquelle tend $f(x)$ lorsque x tend vers zéro en restant positif; ainsi

$$\lim\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x)(1-\alpha^2)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}=\pi f(+0).$$

On trouverait de même

$$\lim\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{f(x)(1-\alpha^2)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}=\pi f(-0),$$

$(f-0)$ étant la limite vers laquelle tend $f(x)$ lorsque x tend vers zéro en restant négatif; par conséquent,

$$\lim\int_a^{b}\frac{f(x)(1-\alpha^2)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}=\pi[f(+0)+f(-0)].$$

Si le seul multiple pair de π compris entre a et b, au lieu d'être zéro, était $2n\pi$, on aurait

$$\lim \int_a^b \frac{(1-\alpha^2) f(x)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} = \pi[f(2n\pi+0)+f(2n\pi-0)],$$

et, si a et b comprenaient un nombre fini quelconque de multiples pairs de π, $2n\pi$, $2(n+1)\pi$, $2(n+2)\pi$, ..., $2(n+p)\pi$, on aurait

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & \lim \int_a^b \frac{(1-\alpha^2) f(x)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} \\ & = \pi \left\{ \begin{array}{l} f(2n\pi+0)+f[2(n+1)\pi+0]+f[2(n+2)\pi+0]+\ldots+f[2(n+p)\pi+ \\ +f(2n\pi-0)+f[2(n+1)\pi-0]+f[2(n+2)\pi-0]+\ldots+f[2(n+p)\pi- \end{array} \right. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons encore que, lorsque la limite supérieure b de l'intégrale est un multiple pair de π, on doit introduire dans le second membre de l'équation (3) un nouveau terme égal à $\pi f(b-0)$, et que, lorsque la limite inférieure a est un multiple pair de π, on doit encore tenir compte de $\pi f(a+0)$.