Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 457-479

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_457_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LIAGRE (J.-B.-J.) et PENY (C.). — CALCUL DES PROBABILITÉS ET THÉORIE DES ERREURS, avec des applications aux sciences d'observation en général et à la Géodésie en particulier. — Bruxelles, Muquardt; Paris, Gauthier-Villars, 1879. In-8°, xx-582 pages.

La première édition du *Calcul des probabilités et théorie des erreurs* de M. Liagre date d'environ vingt-sept ans et est, depuis plusieurs années, devenue introuvable. Le succès de ce Volume, qui s'adressait à tous les astronomes et physiciens qui, sans être à même de faire une étude approfondie des grands Traités de Jacques Bernoulli, d'Euler, de Condorcet, de Laplace, de Gauss, de Legendre, de Cournot, etc., avaient cependant besoin, pour leurs déterminations d'orbites ou pour la discussion de leurs expériences, d'être initiés au mécanisme du calcul des erreurs et des résultats les plus probables d'une série d'observations, était d'ailleurs des mieux justifiés. M. le lieutenant général Liagre, s'inspirant des travaux de ses devanciers, avait en effet exposé d'une manière didactique et avec une rare clarté les principes généraux qui régissent cette branche importante des Mathématiques appliquées, et, par des exemples soigneusement choisis dans l'Astronomie, la Géodésie, l'Art militaire ou la Physique, il avait su élucider d'une manière complète ce que la théorie présente souvent d'abstrait. Tous ceux, et ils sont sans aucun doute nombreux, qui ont eu dans les mains et qui ont étudié le Volume que j'analyse ici rendront ce témoignage qu'il était un modèle de clarté et d'exposition classique.

La nouvelle édition du *Calcul des probabilités* que publie aujourd'hui M. Liagre a été revue et augmentée, par les soins de son auteur et de M. le capitaine d'état-major Peny, dans des proportions qui en font presque un Ouvrage nouveau. On y retrouvera d'ailleurs le même plan, la même division, les mêmes qualités d'exposition que dans le Volume de 1852.

La première Section traite des *probabilités théoriques* ou *a priori;* on y part des *causes,* supposées connues, et on les combine pour arriver à la probabilité des événements. Après une exposition de ce que l'on doit entendre par la *probabilité d'un événement,* l'auteur fait connaître d'une manière succincte les principes les plus généraux de la théorie des combinaisons. Vient ensuite un Chapitre consacré à la probabilité absolue, relative, simple ou composée. Le Chapitre III a pour but l'exposition des lois de la probabilité mathématique dans la répétition des mêmes épreuves. Enfin cette première Section se termine par l'exposé des règles du calcul de l'*espérance mathématique* et de leurs applications à la règle des parties.

Les quatre Chapitres dont nous venons d'indiquer brièvement le contenu sont consacrés au calcul de la probabilité des événements lorsqu'on connaît les causes qui les produisent et aux applications de ce calcul à quelques problèmes particulièrement intéressants. Les trois Chapitres qui suivent ont pour but la solution du problème inverse; ils traitent de la détermination de la probabilité des causes par la considération des événements eux-mêmes. En effet, dans les applications les plus nombreuses et pratiquement les plus importantes du Calcul des probabilités, les *rapports des chances*, qui servent de mesure à l'action des causes dont dépend la production des événements, ne sont pas connus *a priori*. On ne pourrait donc former aucune prévision sur le résultat d'épreuves ultérieures si l'on ne savait déduire des expériences déjà faites des évaluations plausibles sur ces rapports, c'est-à-dire sur la probabilité de l'action des causes. Les procédés qui ont pour but de déterminer la probabilité des événements à venir d'après les résultats des épreuves antérieures constituent le Calcul des *probabilités a posteriori*, qui fait l'objet de la deuxième Section de notre Volume.

Les questions de cet ordre peuvent elles-mêmes être envisagées à deux points de vue distincts :

1° La production d'un événement A peut être due à un nombre limité de causes, et alors, suivant la règle de Bayes, « les probabilités des causes (ou des hypothèses) sont proportionnelles aux probabilités que ces causes donnent pour les événements observés. La probabilité d'une de ces causes ou hypothèses est une fraction qui a pour numérateur la probabilité de l'événement par suite de cette cause et pour dénominateur la somme des probabilités semblables, relatives à toutes les causes ou hypothèses. » M. Liagre, après avoir montré par de nombreux exemples le sens exact de ce principe, en démontre rigoureusement la généralité.

2° La production d'un événement A doit, comme dans le cas d'un phénomène naturel, être considérée comme due à un nombre infini de chances ou d'hypothèses. Ce second cas est traité par M. Liagre avec non moins d'autorité que le premier, mais les conclusions auxquelles il arrive ne sont pas de nature à être résumées en quelques lignes.

L'auteur s'occupe ensuite des règles propres à démontrer l'existence d'une combinaison de causes favorables à la production d'un événement déterminé, et il examine, à ce propos, quelques résultats de la Statistique.

Parmi les causes il faut d'ailleurs distinguer : les causes constantes, qui ont pour elles un certain nombre *déterminé* de chances, une probabilité fixe; les causes variables, qui ont pour elles un nombre *variable* de chances, et par suite une probabilité qui peut osciller dans des limites plus ou moins larges; enfin les causes accidentelles, qui n'ont pas, à proprement parler, de chances en leur faveur, mais qui influent sur l'ordre de succession des événements.

L'existence de ces diverses espèces de causes amène d'ailleurs M. Liagre à définir la signification exacte des termes *moyenne arithmétique, valeur médiane* ou *valeur probable*, dont le sens différent est mis en lumière par l'étude d'une question spéciale, les variations diurnes et annuelles de la température et du baromètre.

Enfin cette deuxième Section du *Calcul des probabilités* se termine par une étude sur les Tables de mortalité et leurs conséquences au point de vue des problèmes des rentes viagères, des tontines, des caisses de prévoyance et de secours.

La troisième Section présente les *applications* du Calcul des probabilités aux observations et aux expériences; elle indique la manière la plus avantageuse de combiner les équations de condition et de répartir les erreurs fortuites; elle apprend à trouver les résultats moyens les plus probables et à en estimer la précision. Le guide de M. Liagre, dans toute la partie théorique de cette Section, est Gauss; mais les démonstrations de l'illustre auteur du *Theoria motus* sont présentées avec plus de netteté, et la part des hypothèses, légitimes d'ailleurs, qu'il est inévitable de faire, sur le mode de répartition des erreurs accidentelles des diverses grandeurs mise plus en évidence. La notion d'une erreur probable et d'une erreur

32.

moyenne, liée à la première, apparaît ainsi comme nécessaire, et les notions de poids et de précision se trouvent naturellement introduites. L'application de ces principes à la détermination d'un angle, à la mesure de la densité de la Terre et à la recherche de la composition de l'eau termine ce Chapitre et la troisième Partie.

La quatrième Section commence par un Chapitre relatif au calcul de l'erreur moyenne et de la précision d'une fonction linéaire de plusieurs quantités directement mesurées : c'est le cas qui se présente quand on détermine un angle par la somme de deux autres, une base topographique à l'aide de règles géodésiques, etc.

Mais le cas qui se présente le plus souvent dans la pratique est celui où l'on doit déterminer des inconnues à l'aide d'équations linéaires dont le nombre est supérieur à celui des inconnues elles-mêmes : c'est pour ce cas que Legendre et Gauss ont proposé la méthode des moindres carrés. M. Liagre légitime d'abord cette méthode, puis il en expose les calculs en suivant pas à pas le Mémoire que Gauss lui a spécialement consacré. Une fois en possession de cet ensemble de règles, les applications se présentent nombreuses et variées; mais c'est sur les questions géodésiques que M. Liagre s'étend particulièrement.

Il traite d'abord du calcul de l'erreur moyenne d'une base géodésique, puis de la mesure des angles géodésiques et de la compensation des triangles, de la détermination des directions les plus probables fournies par les observations faites à une station géodésique et de la compensation de l'ensemble d'un réseau trigonométrique. Enfin le Volume se termine par une théorie du nivellement trigonométrique et de sa compensation par la méthode de Gauss.

Tel est le résumé des principales questions étudiées par MM. Liagre et Peny dans leur Traité du Calcul des probabilités et de la théorie des erreurs; quelque incomplet qu'il soit, j'espère qu'il sera de nature à montrer aux lecteurs du *Bulletin* l'intérêt qui s'attache à cet Ouvrage.

G. R.

ЕРМАКОВЪ (В.-П.). — Теорія вѣроятностей. Лекціи читанныя въ Императорскомъ Университетѣ Св. Владиміра профессоромъ *В.-П. Ермаковымъ*. Кіевъ, 1879 (1). — Gr. in-8°, 140 p.

L'auteur expose d'abord, dans sa Préface, le but qu'il a poursuivi en publiant ses Leçons. Les Traités que l'on possède sur le Calcul des probabilités passent trop rapidement sur les principes fondamentaux de cette science et réservent les développements pour les applications diverses aux assurances, aux témoignages judiciaires, aux Tables de mortalité, etc. M. Ermakof a consacré son Ouvrage entièrement à la théorie. De plus, il a comblé une lacune qui se rencontre chez les autres auteurs, en ajoutant à la fin du Volume un Recueil d'exercices variés sur le Calcul des probabilités, avec l'indication des résultats.

Parmi les parties nouvelles qu'il a introduites dans sa rédaction, il signale une démonstration, due à M. Tchebychef, d'un théorème très général contenant, comme cas particulier, le théorème de Bernoulli (2).

La théorie des combinaisons, telle qu'elle est exposée dans les Traités d'Algèbre ordinaires, ne suffit pas pour la solution des problèmes de probabilités, dans lesquels on doit chercher, parmi toutes les combinaisons des événements, le nombre de celles qui satisfont à des conditions données. Les anciens auteurs ont résolu ces difficultés par des méthodes particulières, en s'aidant le plus souvent de l'induction. Laplace a traité les mêmes problèmes par le calcul des différences finies; mais l'emploi de cette méthode est parfois sujet à de grandes difficultés, soit pour la position de l'équation aux différences, soit pour son intégration. Une Note de M. Camille Jordan, publiée dans le Tome LXV des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, p. 993, a fourni à M. Ermakof une solution facile et générale de cette classe de questions.

---

(1) Ermakof (V.-P.), *Théorie des probabilités*. Leçons professées à l'Université impériale de Saint-Vladimir. Kief.

(2) *Математическій Сборникъ*, t. II, *Sur les valeurs moyennes*.

Le Traité de M. Ermakof se divise en cinq Chapitres; dont le premier est consacré à l'exposé de la théorie des combinaisons (p. 1-20).

Le Chapitre II (p. 21-54) traite des méthodes générales pour la détermination des probabilités des événements tant simples que composés : probabilités des événements simples; probabilités des événements composés consistant dans la production simultanée de plusieurs événements simples; probabilités des événements dans le cas où les circonstances favorables à leur arrivée ne sont pas également probables; probabilité de l'arrivée de l'un de ces événements.

Le Chapitre III (p. 55-78) a pour objet les probabilités des divers événements dans les épreuves répétées : théorème de Jacques Bernoulli; espérance mathématique.

Les matières traitées dans le Chapitre IV (p. 79-98) sont les suivantes : probabilités des événements dont la production dépend de causes diverses; espérance mathématique dans le cas de plusieurs causes agissantes; probabilités d'un événement futur, déduites des observations; probabilités des causes, déduites des observations.

Le Chapitre V (p. 99-116) est consacré à la recherche de la probabilité que, parmi une suite d'événements désignés d'avance, arrivent certains événements. L'auteur applique à la résolution de cette classe de problèmes la méthode de M. C. Jordan.

Le Recueil d'exercices qui termine le Volume comprend soixante et un énoncés de questions variées, dont les résultats sont donnés, quelques-uns avec des indications sur la marche à suivre.

ГРОМЕКА. — Очеркъ теоріи капиллярныхъ явленій. Теорія поверхностнаго сцѣпленія жидкости. Москва, 1879. — Grand in-8°, 68 pages (¹).

L'auteur remarque avant tout que la théorie des phénomènes capillaires suit deux directions : une indiquée par Laplace, l'autre par le mathématicien anglais Th. Young.

(¹) GROMÉKA, *Exposé de la théorie des phénomènes capillaires; théorie de la cohésion superficielle des liquides*. Moscou, 1879.

Newton encore, dans son *Optique*, a décrit l'ascension de l'eau dans un tube capillaire et expliqué la loi, trouvée expérimentalement par Jurine, que cette ascension est inversement proportionnelle au diamètre du tube ; mais il n'a pas donné à son explication de développement suffisant.

Daniel Bernoulli et Clairaut ont fait les premiers essais d'une théorie mathématique des phénomènes capillaires.

Daniel Bernoulli ([1]) n'est pas parvenu à déterminer la loi de ces phénomènes. Clairaut ([2]), en s'appuyant sur les lois générales de l'Hydrostatique, expliqua l'ascension et l'abaissement dans les tubes étroits et indiqua la dépendance de ces phénomènes et de la forme du ménisque. En supposant que les parois du tube agissent sur toute la masse liquide intérieure et que l'ascension et l'abaissement dépendent de l'action de l'extrémité inférieure du tube, immergée dans le liquide, il n'est pas parvenu à établir analytiquement la loi de Jurine.

Le premier essai, mieux réussi, de la théorie en question est dû à Segner ([3]). Il admet que l'attraction mutuelle des particules liquides n'agit qu'à des distances inappréciables. De cette hypothèse il déduit les conditions d'équilibre des particules liquides, tant intérieures que contiguës à la surface, et démontre que la cohésion de ces dernières diffère de la cohésion des premières. Il examine ensuite les formes de gouttes liquides, posées sur un plan horizontal ou suspendues au bout d'une pointe, et conclut que la hauteur de ces gouttes est inversement proportionnelle au rayon de courbure du ménisque.

Enfin, d'après ces formules, il a dressé des Tables pour comparer les résultats théoriques avec ceux qu'il a obtenus dans ses recherches expérimentales.

Deux ans avant l'apparition de la théorie de Laplace, vers la fin de 1805, le mathématicien anglais Young ([4]) présenta à la Société Royale de Londres une dissertation sur la cohésion des liquides. Il

---

([1]) *Hydrodynamique*, 1738.

([2]) Clairaut, *Théorie de la figure de la Terre*, 1741.

([3]) Segner, *De figuris superficierum fluidorum* (*Comment. Societ. Scient. Gœtting.*, 1751).

([4]) Young, *An essay on the cohesion of fluids* (*Phil. Transactions*, 1805).

admettait aussi l'existence, dans les couches superficielles, des forces particulières de cohésion. Se fondant sur cette hypothèse, il a établi l'équation de la surface du liquide et a découvert la grandeur constante de l'angle que fait cette surface avec la paroi du tube. Young se proposait de développer sa théorie, mais il fut arrêté par l'apparition de l'Ouvrage de Laplace. Ultérieurement Young se borna à faire sur la théorie de Laplace quelques remarques, insérées dans le *Course of Lectures on Natural Philosophy,* pour l'année 1807.

Laplace ([1]) expliqua les phénomènes capillaires par l'attraction des molécules. Sa théorie peut servir de modèle quant aux recherches ayant trait aux phénomènes physiques, à l'aide de l'Analyse mathématique. L'auteur fait ici une remarque inexacte, que la théorie de Laplace ne met pas en évidence la grandeur de l'angle fait par la surface libre du liquide avec la paroi du vase. Dans les Suppléments 2 et 3, Laplace établit la valeur de cet angle.

Gauss ([2]) a exposé une autre théorie, fondée aussi sur l'attraction moléculaire, mais déduite du principe des vitesses virtuelles.

Laplace et Gauss n'ont pas assez remarqué cette circonstance, que les couches superficielles de tous les liquides possèdent des propriétés particulières, qui les distinguent de la masse intérieure ; la cohésion des molécules superficielles est plus considérable.

Poisson ([3]), dans son Ouvrage fondé sur l'hypothèse de l'attraction intermoléculaire, remarqua aussi ce changement rapide de densité à la surface des liquides. Dans cet Ouvrage, Poisson a étudié si complétement tant de questions diverses, qu'il a, pour ainsi dire, épuisé toute la théorie de la capillarité.

L'auteur a oublié d'indiquer ici la grande importance des expériences de Simon, dans la théorie des phénomènes capillaires. Ces expériences ont démontré que, dans le cas de tubes très-étroits, l'ascension n'est pas inversement proportionnelle au diamètre du tube, et alors la théorie de Poisson est en défaut : ce qui décida l'Académie des Sciences de Paris à mettre au concours le complément, dans ce sens, de la théorie de Poisson.

([1]) LAPLACE, *Mécanique céleste*, t. IV.

([2]) GAUSS *Werke*, t. V : *Principia generalia theoriæ fluidorum in statu æquilibrii.*

([3]) POISSON, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, 1831.

Le professeur Davidof [1] prend soin d'accorder la théorie de Poisson avec la théorie générale d'équilibre des liquides, à l'aide du principe des vitesses virtuelles, et en même temps il s'occupe des circonstances physiques ayant un rapport essentiel avec ce sujet.

Son Ouvrage remarquable se compose de deux Parties. Dans la première, intitulée *Théorie physique des phénomènes capillaires*, sont réunis et systématisés les résultats des recherches expérimentales relatives à ces phénomènes ; dans la seconde est exposée la théorie mathématique de la capillarité.

En 1859, Paul du Bois-Reymond [2] soutint à Berlin une dissertation consacrée à la théorie de la capillarité, où il a exposé la théorie du potentiel des forces capillaires, et a donné une série de formules auxiliaires pour transformer les intégrales doubles en intégrales simples. Certaines de ces formules se trouvent dans les œuvres de Laplace et de Poisson ; cependant du Bois-Reymond les a établies indépendamment, en considérant la variation de la surface. Du Bois-Reymond ramène à quatre problèmes fondamentaux toutes les questions relatives à la théorie de la capillarité. La solution du quatrième problème, relatif à l'équilibre d'un corps flottant, appuyée, d'après l'opinion de M. Groméka, sur une hypothèse inexacte, l'a amené à des conclusions erronées, relativement au rapport existant entre le volume total d'un corps flottant et sa partie immergée.

D'après l'avis de l'auteur, pendant que la théorie de Laplace est arrivée, par suite des travaux des savants nommés plus haut, à un développement notable, la méthode de Young se développait beaucoup plus lentement et trouvait, pendant un certain temps, peu de partisans. En 1845 et 1846, Hagen [3] a repris, dans une série de Mémoires et au point de vue de Young, la théorie générale de la capillarité et plusieurs questions particulières qui s'y rapportent.

Depuis ce temps, plusieurs physiciens, Plateau, Lamarle, Van der Mensbrugghe, etc., se sont servis de l'hypothèse sur la cohésion superficielle des liquides, dans leur examen des phénomènes capillaires. Le nombre des imitateurs de Young croît constamment,

---

(1) DAVIDOF, *Теорія капиллярныхъ явленій*, 1851. Москва.

(2) P. DU BOIS-REYMOND, *De æquilibrio fluidorum*. Dissertatio inauguralis.

(3) HAGEN, *Denkschriften der Berl. Akad.*, 1845 et 1846.

d'après l'avis de l'auteur, qui expose brièvement la polémique des partisans de deux directions dans le *Journal de Physique* de d'Almeida. En premier lieu, Moutier [1] y inséra un article, en vue de démontrer la supériorité de la théorie de Laplace. Renouvelant les reproches faits à la théorie de Young, qu'elle est fondée seulement sur l'analogie entre la couche superficielle d'un liquide et une mince plaque élastique, Moutier démontre que la théorie de l'attraction moléculaire est suffisante pour expliquer tous les phénomènes capillaires, sans qu'on ait besoin d'une hypothèse, sur l'existence d'une mince plaque élastique sur la surface d'un liquide.

Dans le même Volume se trouve une Lettre de Van der Mensbrugghe, qui combat chaudement l'opinion de Moutier, que l'idée d'extension est tout à fait inutile. Ayant remarqué que cette idée n'exclut point la justesse de la théorie de Laplace, et rappelant l'essai de Lamarle [2] pour expliquer l'extension précisément par cette théorie, Van der Mensbrugghe indique les travaux de Quincke, de Lüstye et de beaucoup d'autres. Les problèmes si nombreux, ajoute Van der Mensbrugghe, examinés, sinon résolus, par ces savants, ont suffisamment démontré la grande utilité de ce point de vue, qui ne tardera pas à être introduit dans les Cours de Physique.

Dans le même Journal, on rencontre aussi les essais de Duclaux [3] pour réaliser la pensée de Van der Mensbrugghe et fonder, sur le principe de la cohésion superficielle des liquides, une théorie élémentaire des phénomènes capillaires. Une théorie pareille se trouve dans le Manuel de Grashof.

Tel est l'aperçu historique du progrès de la théorie de la capillarité que l'auteur a cru devoir donner au lecteur, pour mieux apprécier son propre point de vue sur cette théorie.

Après avoir mis en évidence que les deux directions suivies, dans l'étude de la théorie capillaire, diffèrent non-seulement dans ces bases, mais deviennent même incompatibles entre elles, dans l'exposition de certains écrivains, l'auteur cherche à établir son point de vue particulier sur la théorie de la cohésion superficielle

(1) Moutier, *Journal de Physique* de M. d'Almeida, t. I.

(2) Ath. Dupré, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXIV; 1867.

(3) Duclaux, *Sur la capillarité*. Extrait d'un travail inédit : *Théorie élémentaire de la capillarité* (*Journal de d'Almeida*, 1872).

des liquides. Il soutient que ce point de vue est capable d'accorder les deux directions et de justifier la théorie de Young de la principale des objections, qu'elle n'est pas suffisamment établie sur les principes généraux de la Mécanique rationnelle.

On sait que la solution théorique des problèmes où il est question des forces moléculaires devient plus facile en y introduisant l'idée auxiliaire de la pression. Cauchy définit la pression comme la résultante d'un certain système des forces moléculaires mutuelles.

Cette idée se prête avantageusement à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques, liquides, etc.

L'auteur croit que l'application de cette idée aux phénomènes capillaires conduit à la théorie de la cohésion superficielle et supprime sa discordance avec la théorie de Laplace. Remplissant sa tâche, l'auteur commence par l'exposition des théorèmes généraux relatifs à la pression, découverts par Cauchy et rentrés déjà dans quelques cours d'enseignement. Dans la méthode analytique, il commence par les équations de du Bois-Reymond, représentant le rapport entre les intégrales dont les unes s'étendent sur une partie de la surface courbe et les autres sur le contour de cette surface. D'après son avis, ces équations sont utiles, tant pour l'établissement d'une des principales conditions d'équilibre capillaire, relatives à la surface libre d'un liquide, que pour la démonstration des théorèmes relatifs aux diverses portions d'un volume liquide. Ces équations, d'après l'avis de l'auteur, sont la partie fondamentale de la théorie des phénomènes capillaires. A l'aide de ces équations et des conditions d'équilibre des forces capillaires, il démontre le remarquable théorème suivant, qui peut être considéré comme une généralisation de la loi d'Archimède :

Lorsqu'un corps quelconque flotte librement sur la surface horizontale d'un liquide, une certaine portion de ce liquide s'élève ou s'abaisse autour de sa surface, et la somme des masses, exprimées près du niveau de flottaison, est égale à la somme de ces masses par lesquelles les premières sont remplacées.

Laplace [1] a déduit ce théorème de la considération d'un large

(1) LAPLACE, *Mécanique céleste*, t. IV (Suppl.), p. 34.

canal rempli de liquide et terminé par deux branches coudées verticalement.

Poisson a remarqué que cette méthode de démonstration est insuffisante, au point de vue de la théorie, et a démontré ce théorème seulement pour le cas particulier où le corps flottant est limité par une surface de révolution d'axe vertical.

L'auteur, dans les § 24 à 29 de son Ouvrage, donne une démonstration de ce théorème, pour les hypothèses les plus générales. En outre, il considère les relations qui existent entre les positions des centres de gravité des masses considérées, dont ne parlent ni Laplace ni Poisson. Il soutient enfin que les hypothèses erronées de du Bois-Reymond relatives à ce problème l'ont conduit à des formules erronées.

L'Ouvrage de M. Groméka contient trois Chapitres, intitulés :

1° *Conditions générales d'équilibre des liquides;*
2° *Propriétés des surfaces de séparation de deux liquides ;*
3° *Équilibre des corps flottants.*

Bien que l'Ouvrage analysé laisse certaines questions sans solution complète, on ne peut cependant nier son utilité, par suite d'un nouveau point de vue, pris par l'auteur, dans son essai de traiter cette théorie. Enfin l'exposition est, dans certains cas, très-brève et très-simplifiée.

N. BOUGAÏEF.

RICCARDI (Prof. PIETRO). — CENNI SULLA STORIA DELLA GEODESIA IN ITALIA DALLE EPOCHE FIN OLTRE ALLA METÀ DEL SECOLO XIX. Parte prima. Bologna, Tipi Gamberini e Parmeggiani, 1879. In-4°, 100 pages, 1 planche (2).

L'auteur, bien connu par une longue série de monographies historiques, commence avec ce premier fascicule son histoire de la Géométrie pratique en Italie, entreprise qui sera d'autant plus importante et plus digne d'intérêt, qu'elle peut être regardée, à un certain point de vue, comme faisant suite à l'excellent Livre de

(1) POISSON, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, p. 168.

(2) Extrait des *Memorie dell'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, 3e série, t. X.

M. Cantor, dont il a été rendu compte dans ce *Bulletin* (¹). Au début, les deux auteurs traitent le même sujet; toutefois, M. Riccardi sait encore ici faire preuve d'une incontestable originalité. Nous allons esquisser à grands traits la marche du développement des idées de notre auteur.

L'Introduction examine les travaux des Grecs qui se rapportent à la Géodésie et à la Géographie mathématique; puis viennent les Étrusques, sur lesquels on n'a, il est vrai, que peu de renseignements positifs, et ensuite les Romains. Une explication très-intéressante, appuyée d'un dessin, nous fait connaître l'instrument d'arpentage de l'ancienne Italie, la *groma;* M. Riccardi établit (p. 24) que les auteurs récents qui se sont occupés de la disposition de cet instrument (²) ont le plus souvent laissé de côté les recherches importantes sur cette question de Cavedoni et de Promis. Le deuxième Chapitre, consacré au célèbre Ouvrage de Léonard de Pise, contient encore bien plus de faits nouveaux, du moins pour les étrangers à l'Italie. On doit savoir gré à l'auteur d'y avoir fait connaître les commencements du tracé scientifique des Cartes, et en particulier le fameux plan du monastère de Saint-Gall, de même que nous pensons qu'en présence des connaissances mathématiques dont la possession distinguait si avantageusement ce monastère des autres établissements on ne pouvait s'empêcher de porter sur ce sujet une attention spéciale. D'un certain Alberti, qui vivait vers le milieu du xvᵉ siècle, on peut citer, outre ses essais hydrométriques, un projet pour mesurer les profondeurs de la mer, qui fut repris, deux cents ans plus tard, par l'encyclopédique Hooke. Le premier Livre imprimé en Italie dans lequel il soit question de Géométrie pratique est le Traité de Valturio, *De re militari* (1472). Viennent ensuite les Ouvrages bien connus de Pacioli, le *Libro di Aritmetica e Geometria speculativa e praticale* (1526), dans lequel on revient à la méthode des coordonnées d'Héron, et la *Nova Scientia* de Tartaglia. Le grand peintre Raphaël nous est présenté ici sous

---

(¹) T. X, p. 161.

(²) Parmi ces auteurs, M. Riccardi cite Stoeber (*Die römischen Grundsteuervermessungen;* München, 1877), mais ne cite pas Hankel, dont l'Ouvrage (*Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*, p. 298) aurait dû être mentionné au même titre.

un tout autre aspect que celui auquel nous sommes habitués : on nous le signale comme l'inventeur de la *bussola della calamita*. Nous trouvons une introduction systématique à la science de l'arpentage dans l'Ouvrage de Bartoli (1564), dans lequel, entre autres, il est fait mention d'une triangulation exécutée dans les alentours de Florence. A partir de là commence à s'accroître notablement le nombre des Ouvrages consacrés à la description des instruments géodésiques et des procédés de mesure nouvellement inventés; il fallait toute l'immense érudition de l'auteur de la *Biblioteca matematica* pour mettre tous ces écrivains chacun à leur place. Une circonstance bien digne de remarque, c'est que des rangs des hommes de guerre et des jurisconsultes est sorti un nombre considérable de Traités de Géométrie : tel est, par exemple, le *Tyberias* de Bartolo, auquel toutefois Botcon (1) reproche de nombreuses erreurs. Le Livre le plus important de la seconde moitié du XVIe siècle est la *Geometria pratica* de Pomodoro, qui représente dans de belles planches gravées tout l'assortiment d'instruments dont faisaient usage les géodésistes de cette époque.

Après avoir, dans le Chapitre II, considéré plus particulièrement les doctrines qui font partie de la Géométrie pratique, dans le sens étroit du mot, l'auteur consacre spécialement le Chapitre III au développement de la Géodésie supérieure, c'est-à-dire de la science qui s'occupe de la mesure et de la représentation des parties de la surface terrestre dont la courbure ne saurait être négligée. L'auteur jette un coup d'œil sur les œuvres de traduction et nous dépeint ensuite l'état des connaissances en Géographie mathématique chez les encyclopédistes du XIIIe et du XIVe siècle, chez Brunetto Latini, Ristoro d'Arezzo, Pietro d'Abano, Cecco d'Ascoli, et avant tout chez le grand poète et polygraphe Dante Alighieri. Il est aussi question de cette étrange hypothèse dont l'auteur de cet article a cherché à retracer l'histoire dans le troisième fascicule de ses *Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie* (2), et suivant laquelle l'enveloppe fluide du globe terrestre devrait avoir un autre centre que le noyau solide proprement dit. Toscanelli sert de transition à la part considérable qui

(1) *Voir* KAESTNER, *Geschichte der Mathematik*, t. I, p. 474.
(2) Voir *Bulletin*, III$_1$, 84.

revient aux Italiens dans les grandes découvertes géographiques de la fin du moyen âge, ainsi que dans les progrès de la Cartographie. On doit aussi une mention spéciale aux travaux entrepris par les Italiens sur la Géographie de Ptolémée, considérée comme la principale source de la Science. Nous apprenons à connaître un grand nombre d'Ouvrages de Cosmographie et de Recueils de Cartes; parmi les premiers, on doit remarquer particulièrement ceux de Maurolycus et ceux de Barocius, bien connu d'ailleurs pour ses recherches sur les asymptotes. La fin de ce Chapitre, et jusqu'à présent de l'Ouvrage entier, contient une intéressante définition de ce que l'auteur entend par *Indagini geodetico-nautiche*. Relativement à ces dernières, nous renvoyons à l'interprétation que nous avons donnée, dans le sixième fascicule de nos *Studien* (¹), de la *raxon del marteloio*, que M. Riccardi cite seulement en passant (p. 93); nous serions heureux de voir nos vues partagées par un juge aussi compétent que le savant auteur.

Nous avons l'espoir de pouvoir bientôt rendre compte dans ce Recueil de la suite de cet excellent Ouvrage. S. G.

SCHWERING (Dr K.). — DIE PARALLELCURVE DER ELLIPSE, ALS CURVE VOM RANGE EINS, UNTER ANWENDUNG EINES NEUEN LINIENCOORDINATENSYSTEMS. Brilon, Westphalen, 1877.

L'auteur de cet intéressant programme scolaire, bien supérieur au niveau moyen des travaux de cette nature et digne à ce titre même d'être signalé aux lecteurs de l'étranger, a déjà plusieurs fois entrepris de mettre à la portée d'un public plus nombreux les recherches abstraites, bien connues, de Weierstrass sur les fonctions elliptiques, en appliquant ces nouvelles méthodes à des problèmes particuliers. Il a repris aujourd'hui la même voie, et à l'intérêt qu'offre déjà par elle-même la discussion, à l'aide des fonctions ϑ, d'une courbe remarquable, se joint encore une autre considération importante, l'auteur ayant fait usage dans cette recherche d'un système de coordonnées encore peu connu, mais qui évidemment doit offrir

(¹) Voir *Bulletin*, III_1, p. 330.

une grande utilité. Ce système a été décrit pour la première fois par M. Schwering dans le Tome XXI du *Zeitschrift* de Schlömilch; mais on n'en a bien apprécié l'importance spéciale que lorsque V. Schlegel eut démontré, dans le Tome XXIII du même journal, que le système de coordonnées de lignes en question se comportait complètement comme le réciproque du système usuel de coordonnées de points, et que, par suite, on pouvait être certain de voir ce système se développer, comme étant à la fois simple et facile à manier.

Le Mémoire actuel confirme pleinement cette attente. M. Schwering démontre qu'une courbe de rang 1, déjà traitée autrefois par Clebsch, est complétement identique avec la courbe que l'on obtient en portant des longueurs égales sur les normales d'une ellipse, prolongées à l'extérieur, et joignant leurs extrémités par un trait. On voit sans difficulté que l'étude de cette courbe, qui, dans le système de Schwering, aurait pour équation

$$uv - \frac{k}{2b}\sqrt{4b^2 + (u-v)^2}\,(u+v) + \frac{k^2}{4b^2}[4b^2 + (u-v)^2] = a^2,$$

exige impérieusement l'emploi d'un système de coordonnées de lignes. Mais l'extrême simplicité avec laquelle l'auteur parvient, à l'aide de ce système, à déduire toutes les singularités et les autres propriétés fondamentales ne peut être appréciée que par la lecture du travail original, que nous recommandons à tous les points de vue.

S. G.

ЗОЛОТАРЕВЪ. — Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ съ приложеніемъ къ интегральному исчисленію. С. Петербургъ, 1874. — In-4°, 174 pages (¹).

Gauss a introduit dans l'Analyse les nombres complexes de la forme $a + bi$ (²). Ces nombres jouent un rôle considérable dans la

(¹) ZOLOTAREF, *Théorie des nombres entiers complexes et son application au Calcul intégral*. Saint-Pétersbourg, 1874.

(²) GAUSS *Werke*, 2. Bd., *Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda.*

théorie des résidus quadratiques et dans celle de la division du cercle et de la lemniscate. Dans ces recherches, l'algorithme de Gauss sert de point de départ; à l'aide de cet algorithme on trouve aussi le plus grand commun diviseur des nombres entiers.

Après la théorie des nombres complexes de la forme $a+bi$, on a commencé à s'occuper de l'étude des nombres complexes, dépendants des racines d'un degré quelconque de l'unité. A l'aide de ces nombres, les savants essayèrent, d'un côté, à démontrer le théorème de Fermat sur l'impossibilité de résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda,$$

où λ est un nombre entier plus grand que 2; d'un autre côté, l'étude de ces nombres était indispensable pour la démonstration de la loi de réciprocité des résidus des degrés supérieurs.

Lamé et Cauchy (1) ont fait les premiers essais dans cette direction; mais ces essais n'ont pas entièrement réussi, parce que ces savants ont pris pour base de cette théorie l'algorithme pareil à celui qui sert à trouver le plus grand diviseur de deux nombres entiers ordinaires, et déduit de là les conséquences semblables à celles qu'a déduites Gauss des nombres de la forme $a+bi$. Les résultats ont démontré que cet algorithme n'est pas applicable en général.

Kummer donna le premier sa remarquable théorie des nombres complexes dépendants des racines d'un degré quelconque de l'unité. Kronecker indiqua l'application de cette théorie à l'Algèbre et démontra que toutes les équations abéliennes, dont les coefficients sont soit les nombres entiers ordinaires, soit les nombres de la forme $a+bi$, sont les équations de la division du cercle ou de la lemniscate.

Outre les nombres complexes dépendants directement des racines de l'unité, on a étudié aussi les autres nombres complexes, ayant une relation avec la théorie de la division du cercle. L'Ouvrage d'Eisenstein (2) se rapporte à ce genre de recherches.

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1847.

(2) EISENSTEIN, *Ueber Formen 3-ten Grades mit 3 Variabeln, welche der Kreistheilung ihre Entstehung verdanken* (*Journal de Crelle*, t. 28).

Le professeur Zolotaref expose la théorie des nombres complexes, dépendants des racines de l'équation indéterminée

$$F(x) = 0$$

d'un degré quelconque, à coefficients entiers, dont ceux des puissances les plus élevées de x sont égaux à l'unité. Cette théorie est fondée sur les propriétés des congruences fonctionnelles.

Les propriétés principales des congruences rationnelles, c'est-à-dire les propriétés des polynômes à coefficients entiers, par rapport à un certain module simple, étaient déjà connues de Gauss en 1797 et 1798; l'exposition de ces propriétés forme le huitième Chapitre de ses *Disquisitiones arithmeticæ*. M. Serret trouva ensuite ces propriétés, les développa dans son *Cours d'Algèbre supérieure* et les appliqua à la théorie des équations. Du reste, dans son Mémoire présenté en 1865 à l'Académie des Sciences de Paris, M. Serret remarque que les premières recherches sur ce sujet, quoique à un autre point de vue, se trouvent déjà dans les travaux de Galois.

L'ouvrage de Zolotaref se compose de quatre Chapitres.

Pour établir une liaison entre la théorie des nombres complexes et celle des congruences fonctionnelles, l'auteur consacre le premier Chapitre à l'exposition des propriétés de ces dernières. Ce Chapitre forme la base de la théorie des nombres idéaux.

Le second Chapitre est consacré à la théorie des unités complexes. L'auteur y expose les résultats des recherches de Dirichlet, Kummer, Kronecker. Ses démonstrations sont appuyées sur la proposition de M. Hermite, relative à la limite du minimum des formes quadratiques.

Dans le Chapitre III, l'auteur généralise la théorie de Kummer de nombres complexes dépendants des racines de l'unité; il examine l'équation irréductible

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

dont les coefficients sont des nombres entiers.

Tous les nombres complexes dépendants de la racine x_0 de cette équation se présentent sous la forme

$$\zeta_0 + \zeta_1 x_0 + \zeta_2 x_0^2 + \ldots + \zeta_{n-1} x_0^{n-1},$$

où $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ sont des nombres entiers ordinaires.

Le contenu des Chapitres III et IV est l'œuvre propre de l'auteur.

Il est à remarquer qu'un essai de généralisation des nombres idéaux de Kummer fut fait par Selling ([1]); mais cet essai n'a aucune relation avec l'Ouvrage de l'auteur. Il en est de même du remarquable ouvrage de Dedekind, où celui-ci s'occupe des multiplicateurs idéaux, mais à un autre point de vue.

Le Chapitre IV est consacré à l'application des nombres complexes à un problème du Calcul intégral. On découvre, dans cette application, un nouveau lien entre la théorie des nombres et ce calcul. Ce problème est :

Étant donnée la différentielle

$$\frac{(x+\mathrm{A})\,dx}{\sqrt{x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\varepsilon x+\zeta}},$$

où γ, δ, ε, ζ *sont des coefficients réels,* A *le paramètre, reconnaître si l'on peut, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, déterminer* A *de manière que l'intégrale de cette différentielle soit exprimée en logarithmes.*

Abel a démontré encore que, si l'intégrale

$$\int \frac{\rho\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}$$

est exprimée en logarithmes, sous la forme

$$\mathrm{A}\log\frac{p+q\sqrt{\mathrm{R}(x)}}{p-q\sqrt{\mathrm{R}(x)}},$$

où p et q sont des fonctions de x, $\sqrt{\mathrm{R}(x)}$ est développable en fraction continue périodique, et réciproquement

Il a démontré aussi que, si l'intégrale

$$\int \frac{\rho\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}$$

([1]) Schlömilch's *Zeitschrift für Math. und Phys.*, 1865.

s'exprime en logarithmes, elle prendra la forme

$$C \log\left[P + Q\sqrt{R(x)}\right],$$

où C est une constante et P et Q des fonctions entières de x, satisfaisant à l'équation

$$P^2 - Q^2 R(x) = \text{const.}$$

Les recherches d'Abel ne conduisent pas directement au critérium désiré; car, si grand que soit le nombre de réduites de la fraction continue, résultant de la décomposition de $\sqrt{R(x)}$, qu'on puisse calculer, on ne saurait encore conclure que la périodicité ne se présente pas plus loin. Jusqu'à ce moment le critérium qui permettrait d'affirmer, après un nombre fini d'opérations, que la différentielle générale $\sqrt{R(x)}$ peut ou non être intégrée en logarithmes, n'existe pas.

Pour le cas particulier où $R(x)$ est un polynôme du quatrième degré à coefficients rationnels, l'académicien Tchebychef a donné un critérium de ce genre, très-remarquable.

Tchebychef [1] a exposé la méthode d'intégration de la différentielle

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta}}, \tag{1}$$

où γ, δ, ε, ζ sont des nombres rationnels.

D'après cette méthode, l'expression (1) s'intègre par logarithmes, chaque fois que cela est possible.

Le professeur Zolotaref a démontré cette méthode dans son Mémoire intitulé: *Sur la méthode d'intégration de M. Tchebychef.*

Les conditions d'intégration en logarithmes de la différentielle (1) employées par l'auteur sont différentes de celles qu'avait données Abel. Ces conditions démontrent clairement la liaison du problème de l'intégration de cette différentielle en logarithmes avec le problème de la division des fonctions elliptiques. Ces conditions ont été établies par Weierstrass [2] pour le cas général où l'on considère

---

(1) TCHEBYCHEF, *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. III, 1860.

(2) *Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1857.

les intégrales d'une fonction rationnelle de x et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré.

Les conditions de Weierstrass font dépendre la solution du problème de la possibilité d'exprimer la constante donnée à l'aide de valeurs K et K_1 sous la forme

$$\frac{\nu K + \nu' K_1\sqrt{-1}}{\lambda},$$

où ν, ν' et λ sont des nombres entiers.

La méthode de Tchebychef s'appliquait au cas où λ, δ, ε, ζ sont des nombres rationnels.

A l'aide de sa théorie des nombres complexes, le professeur Zolotaref a réussi à résoudre le problème de l'intégration de cette différentielle en logarithmes, dans les cas où γ, δ, ε, ζ sont des nombres réels quelconques. Ces recherches ne doivent pas être confondues avec les recherches relatives au même problème, mais d'un autre genre, faites par Weierstrass, Clebsch [1] et autres.

Pour résoudre son problème, Zolotaref transforme l'intégrale

$$(2)\qquad \int\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\varepsilon x+\zeta}}$$

en une intégrale de la forme

$$(3)\qquad \frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}},$$

où α et β sont les valeurs réelles satisfaisant à l'inégalité $\beta > \alpha > 1$. Il transforme ensuite l'intégrale (3) en une autre de la forme

$$(4)\qquad \frac{(z+B)\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_1)(z-\beta_1)}},$$

où

$$\alpha_1 = \left(\frac{\alpha+\beta-1}{1+\beta-\alpha}\right)^2,\quad \beta_1 = \left(\frac{\alpha+\beta-1}{1+\alpha-\beta}\right)^2.$$

En continuant à répéter plusieurs fois de pareilles transformations, l'auteur démontre que, si l'intégrale (2) peut être exprimée

[1] *Journal de Crelle*, t. 64.

en logarithmes, les paramètres suivants

$$\alpha_1 = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{1 + \beta - \alpha}\right)^2, \quad \beta_1 = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{1 + \alpha - \beta}\right)^2,$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 - 1}{1 + \beta_1 - \alpha}\right)^2, \quad \beta_2 = \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 - 1}{1 + \alpha_1 - \beta_1}\right)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

doivent former une série périodique, c'est-à-dire que, dans ce cas, ont lieu les égalités $\alpha_\mu = \alpha_m$, $\beta_\mu = \beta_m$, ..., où $\mu > m$. Le théorème réciproque est vrai.

En partageant les valeurs de paramètres α et β en trois classes, l'auteur résout, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, le problème : si l'intégrale (2) peut être exprimée en logarithmes, ou non. L'auteur appuie sa solution sur la théorie des grandeurs complexes, qu'il a établie.

Le professeur Zolotaref est mort, dans le plein développement de son remarquable talent pour les Mathématiques ; cette mort est une perte cruelle pour la Science russe. N. Bougaief.

HOCHHEIM (Professor Dr Adolf). — Al Kafî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî nach der auf der herzoglich-gothaischen Schlossbibliothek befindlichen Handschrift. Verlag von Louis Nebert. Halle, 1879, 29 pages.

Nous avons déjà rendu compte dans le *Bulletin* (¹) de la première Partie de cet intéressant écrit. Alkarkhî traite d'abord le problème de simplifier les expressions numériques compliquées, chose indispensable pour l'auteur arabe, par suite du manque d'une notation générale pour représenter les fractions, et les « mettre en rapport » avec les autres nombres. Ce problème n'est posé que pour les nombres commensurables ; deux nombres n'ayant pas de diviseur commun ne peuvent être « mis en rapport ». Pour des raisons faciles à comprendre, l'un des termes des rapports à former est générale-

(¹) Voir *Bulletin*, II_2, 236.

ment le nombre 60. Dans le vingt et unième Chapitre, l'auteur traite en détail la multiplication de deux séries de fractions irréductibles, et cela d'une manière qui, d'après l'opinion de l'éditeur, ne se trouve chez aucun autre auteur arabe. La multiplication et la division des parties du cercle est naturellement l'objet d'une attention particulière. En abordant la théorie de l'extraction de la racine carrée, Alkarkhî, se conformant rigoureusement au langage des géomètres grecs, indique la différence entre les racines rationnelles et irrationnelles en les nommant « racines exprimables et inexprimables » (ῥητὰ καὶ ἄλογα). Sa méthode est au fond la méthode, bien connue, de Théon; cependant on trouve chez lui l'expression approximative $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a+1}\cdot$ La théorie des proportions se rattache au modèle classique donné par Euclide; mais elle fait entrer en considération les besoins de la vie pratique d'une tout autre manière que les Grecs. Avec le quarante-quatrième Chapitre commence la partie géométrique. Parmi les définitions, celles des cercles et des « lignes non circulaires » tiennent une place tout à fait à part, autant du moins que, pour la seconde de ces définitions, on peut considérer comme exacte la correction, d'ailleurs très-plausible, que M. Hochheim a faite au texte. Le calcul des aires des figures planes se rapporte, à l'exemple des géomètres de l'Inde, à des figures dont les dimensions sont exprimables en nombres entiers; ainsi, l'exemple choisi pour le trapèze a pour les quatre côtés 20, 15, 34, 13, et pour la hauteur 12. Le calcul des segments de cercle est aussi très-intéressant. Le mérite d'avoir exactement déterminé la surface convexe d'un cône tronqué appartient bien à Alkarkhî; du moins la vraie formule ne se rencontre pas chez son collègue Beha-Eddin. Les essais de cubature contiennent également beaucoup de résultats originaux et nous font attendre avec impatience le contenu de la troisième Partie de la publication de M. Hochheim. Le fascicule actuel se termine par ces paroles, remplies de promesses, du géomètre arabe : « Après avoir maintenant traité en problèmes les remarquables particularités de l'Arithmétique, je vais donner dans la suite les problèmes les plus remarquables de la Géométrie. »

S. G.