Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

P. Du Bois-Reymond

Détermination de la valeur-limite d'une intégrale qui se présente dans la théorie des séries trigonométriques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 343-352

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_343_1>

MÉLANGES.

DÉTERMINATION DE LA VALEUR-LIMITE D'UNE INTÉGRALE QUI SE PRÉSENTE DANS LA THÉORIE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. P. DU BOIS-REYMOND.

Établir la limite de

$$(1) \qquad J = \int_0^{2\pi} \frac{(1-\varepsilon^2) f(\theta)\, d\theta}{1 - 2\varepsilon \cos(\theta - \alpha) + \varepsilon^2}$$

quand ε *s'approche de l'unité.*

I.

Supposons

$$1 > \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad 2\pi > \alpha > 0.$$

On commence par partager l'intégrale J en deux autres, de o à α

et de α à 2π, ce qui donne, après un changement de variables,

$$(2)\quad J=\int_0^{\alpha}\frac{(1-\varepsilon^2)f(\alpha-\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}+\int_0^{2\pi-\alpha}\frac{(1-\varepsilon^2)f(\alpha+\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}.$$

En écrivant $\varphi(\theta)$ au lieu de $f(\alpha-\theta)$ ou $f(\alpha+\theta)$, on voit que les deux intégrales du second membre de (2) ont la forme commune

$$(3)\qquad j=\int_0^{a}\frac{(1-\varepsilon^2)\varphi(\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2},\quad (2\pi>a>0),$$

qu'il faut discuter.

II.

Considérons en premier lieu l'intégrale plus simple

$$(4)\qquad (j)=\int_0^{a}\frac{(1-\varepsilon^2)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}.$$

On sait qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{(1-\varepsilon^2)\sin a}{(1+\varepsilon^2)\cos a-2\varepsilon};$$

mais cet arctang a l'inconvénient de n'être pas renfermé entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Pour le rendre tel, il faut lui ajouter π, comme je l'ai montré dans les *Annales de Leipzig*, t. VII, p. 257. Toujours est-il que cette forme de l'intégrale (4) se prête moins aisément à la recherche qui nous occupe, qu'une autre transformation que je vais indiquer.

Dans

$$(5)\qquad (j)=(1-\varepsilon^2)\int_0^{a}\frac{d\theta}{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos\theta}$$

on introduit $\frac{\theta}{2}$ au lieu de θ, ce qui donne

$$(6)\qquad \tfrac{1}{2}(j)=(1-\varepsilon^2)\int_0^{a}\frac{d\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{(1-\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)^2\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}}.$$

Maintenant, en faisant $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \tau\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$, la différentielle de l'intégrale prend la forme canonique $\frac{d\tau}{1+\tau^2}$; mais il est indispensable de traiter séparément les cas $a \leqq \pi$ et $a > \pi$.

Supposons d'abord $a \leqq \pi$. On trouve

$$\tag{7} \tfrac{1}{2}(j) = \int_0^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\operatorname{tang}\frac{a}{2}} \frac{d\tau}{1+\tau^2}.$$

Pour $a > \pi$, on a

$$\tfrac{1}{2}(j) = (1-\varepsilon^2)\int_0^a \frac{d\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{(1-\varepsilon)^2 + (1+\varepsilon)^2\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}} = (1-\varepsilon^2)\left(\int_0^\pi + \int_\pi^a\right).$$

On peut se servir de la substitution $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \tau\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ dans les deux intégrales du second membre, en songeant que $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$ est négative, de sorte que (j) devient, dans ce cas,

$$\tag{8} \tfrac{1}{2}(j) = \int_0^\infty \frac{d\tau}{1+\tau^2} + \int_{-\infty}^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\operatorname{tang}\frac{a}{2}} \frac{d\tau}{1+\tau^2}.$$

A présent (j) est ramené, dans les deux cas $a \leqq \pi$, $a > \pi$, à des formes qui permettent d'en établir sur-le-champ la limite pour ε s'approchant de l'unité. Si, dans les équations (7) et (8), $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ converge vers $+\infty$, l'intégrale dans (7) converge vers $\int_0^\infty d\operatorname{arc\,tang}\tau$, et la seconde intégrale dans (8) tend vers zéro, à cause de $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$ négative.

III.

Reprenons maintenant la formule générale (3) :

$$j = \int_0^a \frac{(1-\varepsilon^2)\varphi(\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}, \quad (2\pi > a > 0).$$

La substitution $\tang\frac{\theta}{2} = \tau\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ l'aurait transformée, pour $a \leqq \pi$, en

$$(9)\qquad \tfrac{1}{2}j = \int_0^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\tang\frac{a}{2}} \varphi\left[2\,\mathrm{arc\,tang}\left(\tau\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\right]\frac{d\tau}{1+\tau^2},$$

et, pour $a > \pi$, en

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}j &= \int_0^{\infty} \varphi\left[2\,\mathrm{arc\,tang}\left(\tau\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\right]\frac{d\tau}{1+\tau^2} \\ &+ \int_{-\infty}^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\tang\frac{a}{2}} \varphi\left[2\,\mathrm{arc\,tang}\left(\tau\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right]\frac{d\tau}{1+\tau^2}. \end{aligned}\right.$$

Pour simplifier, faisons

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \gamma, \quad \tang\frac{a}{2} = \mathrm{A}, \quad \varphi[2\,\mathrm{arc\,tang}(x)] = \psi(x).$$

Les formules (9) et (10) deviennent ainsi

$$(9_a)\qquad \tfrac{1}{2}j = \int_0^{\frac{\mathrm{A}}{\gamma}} \psi(\gamma\tau)\frac{d\tau}{1+\tau^2}, \quad (\mathrm{A} > 0),$$

$$(10_a)\qquad \tfrac{1}{2}j = \int_0^{\infty} \psi(\gamma\tau)\frac{d\tau}{1+\tau^2} + \int_{-\infty}^{\frac{\mathrm{A}}{\gamma}} \psi(\gamma\tau)\frac{d\tau}{1+\tau^2}, \quad (\mathrm{A} < 0).$$

Quant à $\gamma = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$, on a $0 < \gamma$, et, pour $\lim\varepsilon = 1$, $\lim\gamma = 0$.

Cherchons d'abord la limite de j dans (9_a). Nous partageons cette intégrale en deux autres :

$$(11)\qquad \tfrac{1}{2}j = \int_0^{c} \psi(\gamma\tau)\frac{d\tau}{1+\tau^2} + \int_0^{\frac{\mathrm{A}}{\gamma}} \psi(\gamma\tau)\frac{d\tau}{1+\tau^2}, \quad \left(0 < c < \frac{\mathrm{A}}{\gamma}\right).$$

La fonction $\psi(x)$ est supposée finie entre les limites des intégrales (9_a) et (10_a), c'est-à-dire que $\varphi(\theta) = \psi(x)$ est finie entre les limites $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. De plus, $\psi(x)$ est supposée intégrable. C'est à cela que se bornent nos suppositions. Alors, à cause de $\frac{1}{1+\tau^2}$ positif et du théorème ordinaire des valeurs moyennes :

$$\int_a^b \psi(x)\varphi(x)\,dx = \psi(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad (a \leqq \xi \leqq b),$$

l'équation (11) devient

$$(12) \qquad \tfrac{1}{2}j = \psi(\gamma c_1)\int_0^c d\,\mathrm{arc\,tang}\,\tau + \psi(\gamma c_2)\int_c^{\frac{A}{\gamma}} d\,\mathrm{arc\,tang}\,\tau,$$

$$\left(0 \leqq c_1 \leqq c \leqq c_2 \leqq \frac{A}{\gamma}\right).$$

Pour trouver la limite de j, γ tendant vers zéro, nous supposerons c croissant au delà de toute limite pendant que γ décroît, mais sous cette condition, que le produit γc converge en même temps vers zéro, ce qui aura lieu, par exemple, si l'on fait $c = \gamma^{-\frac{1}{2}}$. Évidemment on aura

$$\lim \tfrac{1}{2}j = \frac{\pi}{2}\lim\psi(\gamma c_1) + 0.\lim\psi(\gamma c_2),$$

et, si l'on suppose finalement encore que $\lim\psi(\delta)$, $(0 < \delta)$, pour $\delta = 0$, est une quantité déterminée, quelle que soit la nature de la quantité évanouissante δ, on trouve

$$(13) \qquad \lim j = \pi \lim\psi(\delta), \quad (\delta > 0).$$

L'équation (10_a) donne la même limite de j; car, en opérant sur la première intégrale de son second membre comme nous venons de le faire sur l'intégrale $\frac{1}{2}j$ de l'équation (9_a), on voit immédiatement que sa limite est $\pi\lim\psi(\delta)$. La seconde intégrale, mise sous la forme

$$\psi(\gamma\tau_1)\int_{-\infty}^{\frac{A}{\gamma}} d\,\mathrm{arc\,tang}\,\tau, \quad \left(-\infty < \tau_1 < \frac{A}{\gamma}\right),$$

a la limite zéro, à cause de $\psi(\gamma\tau_1)$ finie et de $A < 0$.

Tout ceci aboutit donc au théorème :

Soit donnée l'intégrale

$$j = \int_0^a \frac{(1-\varepsilon^2)\varphi(\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}, \quad (2\pi > a > 0),$$

la fonction $\varphi(\theta)$ *étant assujettie aux conditions d'être intégrable dans l'intervalle* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, *et d'avoir une limite déterminée* $\lim \varphi(\delta)$ *pour* $\delta > 0$, δ *s'approchant d'une manière quelconque de zéro. Si dans l'intégrale* j *la quantité* ε, *supposée* < 1, *tend vers l'unité,* j *tend vers* $\pi \lim \varphi(\delta)$.

IV.

Après avoir établi la limite de j, celle de l'intégrale J, qui est l'objet de cette analyse, n'offre plus aucune difficulté.

Nous avons en effet, formule (2),

$$J = \int_0^\alpha \frac{(1-\varepsilon^2) f(\alpha-\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2} + \int_0^{2\pi-\alpha} \frac{(1-\varepsilon^2) f(\alpha+\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\theta\,\varepsilon^2}.$$

En faisant tour à tour $f(\alpha+\theta) = \varphi(\theta)$, $f(\alpha-\theta) = \varphi(\theta)$, *nous trouvons pour* α, *contenu entre* 0 *et* 2π,

$$(14) \qquad \lim J = \pi[\lim f(\alpha-\delta) + \lim f(\alpha+\delta)],$$

sous l'hypothèse du théorème que je viens d'énoncer, que $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$, et que $\lim f(\alpha-\delta)$, $\lim f(\alpha+\delta)$ sont des valeurs déterminées, indépendantes de la manière dont δ s'évanouit.

Jusqu'à présent nous avons supposé α différent de zéro et de 2π. Pour achever notre tâche, il reste à trouver la limite de J pour $\alpha = 0$, $\alpha = 2\pi$ et α en dehors de l'intervalle $0\ldots 2\pi$.

Pour $\alpha = 0$ on fait

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{(1-\varepsilon^2) f(\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2} = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}.$$

La première intégrale à droite donne, d'après ce qui précède, $\pi \lim f(\delta)$ pour limite. Dans la seconde intégrale, on pose

$$\theta = 2\pi - \theta_1,$$

ce qui la transforme en celle-ci,

$$\int_0^{\pi} \frac{(1-\varepsilon^2)f(2\pi-\theta_1)\,d\theta_1}{1-2\varepsilon\cos\theta_1+\varepsilon^2},$$

dont la limite est $\pi \lim f(2\pi - \delta)$.

Donc on a, pour $\alpha = 0$,

$$(15) \qquad \lim J = \pi[\lim f(\delta) + \lim f(2\pi - \delta)].$$

Pour $\alpha = 2\pi$, J ne change pas, de sorte qu'on obtient la même valeur de $\lim J$.

Quant aux valeurs de α *en dehors de l'intervalle* $0\ldots 2\pi$, *elles résultent de la périodicité de la fonction* $\lim J = F(\alpha)$.

Le résultat de notre recherche par rapport à cette fonction peut donc s'énoncer ainsi :

La fonction

$$\lim J = F(\alpha) = \frac{1}{2}\lim \int_0^{2\pi} \frac{(1-\varepsilon^2)f(\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos(\theta-\alpha)+\varepsilon^2}$$

est, pour les fonctions $f(\theta)$ *qui n'ont un nombre infini ni de maxima et minima ni de discontinuités, identiquement la même que celle-ci*

$$F_1(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(u)\,du + \cos\alpha \int_0^{2\pi} f(u)\cos u\,du + \ldots$$
$$+ \sin\alpha \int_0^{2\pi} f(u)\sin u\,du + \ldots.$$

Une première différence entre les deux représentations $F(\alpha)$ et $F_1(\alpha)$ s'accuse quand on les applique à des fonctions possédant un nombre infini de maxima et minima. *Alors on trouverait que la première est bien plus générale que la seconde, qui se refuse déjà à représenter certaines fonctions continues, tandis que la première n'exige que l'intégrabilité de* $f(x)$, *et donne* $F(\alpha) = \pi\,[\lim f(\alpha+\delta) + \lim f(\alpha-\delta)]$ *partout où ces limites existent.*

V.

Une autre différence peut être constatée si l'on ne cherche pas seulement les valeurs $\lim_{\varepsilon=1} J(\alpha)$ pour des α fixes, mais plus généralement toutes les valeurs $\lim_{\varepsilon=1,\delta=0} J(\varepsilon, \alpha+\delta)$ pour des relations quelconques entre $1-\varepsilon$ et δ.

Le problème d'établir dans sa conception la plus générale la limite d'une expression analytique ne saurait être considéré comme entièrement résolu si sa *limite mixte*, comme on peut nommer des limites telles que $\lim_{\varepsilon=1,\delta=0} J(\varepsilon,\alpha+\delta)$, n'est déterminée aussi. Ce problème des limites mixtes peut présenter des difficultés très-sérieuses; mais, pour des cas analogues à celui que nous traitons ici, on en trouve facilement la solution au moyen d'une proposition que j'ai communiquée dans les *Annales de Leipzig* (t. VII, p. 251), et dont voici la teneur :

Soient

$$G_+ = \lim_{h=\infty} \int_0^b d\beta\,\Phi(\beta,h),$$

$$G_- = \lim_{h=\infty} \int_{-a}^0 d\beta\,\Phi(\beta,h),$$

des quantités indépendantes de b et de a. On aura généralement

$$(G_- + G_+)f(x) = \lim_{h=\infty} \int_A^B d\beta f(\beta)\Phi(\beta - x, h),$$

en supposant $A < x < B$, *et* $f(x)$ *continue entre les limites* A *et* B. *Mais, si* $f(x)$ *prend pour un point* $x = x_1$ *deux valeurs différentes* $f(x_1 - 0)$ *et* $f(x_1 + 0)$, *on aura*

$$\begin{aligned}&\lim_{h=\infty,\,x=x_1} \int_A^B d\beta f(\beta)\Phi(\beta - x,h)\\ &\quad= f(x_1+0)G_+ + f(x_1-0)G_-\\ &\qquad- [f(x_1+0) - f(x_1-0)]\lim_{h=\infty,\,x=x_1}\int_0^{x_1-x} d\beta\,\Phi(h,\beta).\end{aligned}$$

Si l'on applique cette formule à la série

$$F_1(\alpha, n) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(u)\,du$$

$$+ \cos\alpha \int_0^{2\pi} f(u)\cos u\,du + \ldots + \cos n\alpha \int_0^{2\pi} f(u)\cos nu\,du$$

$$+ \sin\alpha \int_0^{2\pi} f(u)\sin u\,du + \ldots + \sin n\alpha \int_0^{2\pi} f(u)\sin nu\,du,$$

en posant $n = h$, $x = \alpha$, $x_1 = \alpha_1$, elle devient (*Ann. de Leipzig*, t. VII, p. 254)

$$\lim_{n=\infty,\ \alpha=\alpha_1} F_1(\alpha, n) = \frac{\pi}{2}[f(\alpha_1 + 0) + f(\alpha_1 - 0)]$$

$$+ [f(\alpha_1 + 0) - f(\alpha_1 - 0)] \lim_{n=\infty,\ \alpha=\alpha_1} \int_0^{n(\alpha-\alpha_1)} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

En l'appliquant ensuite à la fonction

$$F(\alpha, \varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{(1-\varepsilon^2) f(\theta)\,d\theta}{1 - 2\varepsilon\cos(\theta - \alpha) + \varepsilon^2},$$

et en posant $\frac{1}{1-\varepsilon} = h$, $x = \alpha$, $x_1 = \alpha_1$, on trouve

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon=1,\ \alpha=\alpha_1} F(\alpha, \varepsilon) = \frac{\pi}{2}[f(\alpha_1 + 0) + f(\alpha_1 - 0)] \\ &\quad + [f(\alpha_1 + 0) - f(\alpha_1 - 0)] \lim_{\varepsilon=1,\ \alpha=\alpha_1} \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \operatorname{tang} \frac{\alpha - \alpha_1}{2}\right]. \end{aligned}\right.$$

Ces deux formules pour les limites mixtes de $F_1(\alpha, n)$ et $F(\alpha, \varepsilon)$ peuvent être comparées, si l'on suppose les quantités $h = n$, $h = \frac{1}{1-\varepsilon}$ égales.

Soit, par exemple,

$$h = \frac{\pm\rho}{\alpha - \alpha_1},$$

selon que $\alpha \gtrless \alpha_1$, et ρ signifiant une constante arbitraire. Nos deux formules deviennent

$$\lim_{n=\infty,\,\alpha=\alpha_1} F_1(\alpha, n) = \frac{\pi}{2}[f(\alpha_1+0)+f(\alpha_1-0)]$$
$$\pm [f(\alpha_1+0)-f(\alpha_1-0)]\int_0^{\rho}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

$$\lim_{\varepsilon=1,\,\alpha=\alpha_1} F(\alpha, \varepsilon) = \frac{\pi}{2}[f(\alpha_1+0)+f(\alpha_1-0)]$$
$$\pm [f(\alpha_1+0)-f(\alpha_1-0)]\operatorname{arc\,tang}\rho,$$

et donnent évidemment des valeurs de F et F_1 différentes entre elles quand on assigne des valeurs quelconques à l'arbitraire ρ.

Les n^{os} IV et V de cet article, notamment les formules (14), (15) (16), contiennent la solution complète du problème proposé.