Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 33-42

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_33_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WITTSTEIN (Dr Armin). — ZUR GESCHICHTE DES MALFATTI'SCHEN PROBLEMS. — Nordlingen, Beck'sche Buchhandlung, 1878; 27 pages, 2 Pl.

L'auteur a déjà fait paraître, en 1871, une intéressante histoire du problème de Malfatti, qui traitait déjà assez complétement le sujet. Toutefois, à cette époque, il lui avait été impossible de consulter une certaine partie des sources originales, et comme, en outre, dans ces dernières années, de nombreux documents nouveaux se sont ajoutés aux anciens, l'auteur a eu raison d'ajouter à son travail le présent Appendice.

La première Partie contient exclusivement des compléments à ses anciens travaux; il y est question des solutions analytiques du problème par Lechmütz, Adams, Cayley, et de la démonstration géométrique que Hart a donnée de la célèbre construction de Steiner. Viennent ensuite les travaux effectués dans les sept dernières années : on doit mentionner ici la manière dont Mertens a traité le problème dans le cas des triangles sphériques; deux solutions algébrico-géométriques par Simons et Catalan; une seconde étude de Mertens, qui introduit de la manière la plus ingénieuse les quantités imaginaires; enfin un ensemble de recherches synthétiques, se rattachant immédiatement aux méthodes de Steiner, et auxquelles l'auteur consacre un paragraphe spécial. Cette revue commence par la démonstration de Mendthal, puis elle passe à celle de Schroeter, qui, selon M. Wittstein, « répond seule à l'intention de Steiner », et que, pour cette raison, il expose avec grands détails; il termine par les démonstrations analogues de Godt et d'Affolter, où il est fait un usage répété de la transformation par rayons réciproques. Une biographie sommaire de Malfatti sert à arrondir cette esquisse, écrite d'un style qui sent la recherche.

Le nom de Lechmütz se trouvant assez souvent cité dans ce passage et ailleurs, nous croyons devoir faire observer, pour ne pas laisser accréditer une méprise, que, dans le Traité publié par Lehmus, alors professeur à Berlin (*Die reine Mathematik und die mechanischen Wissenschaften*, Berlin, 1845), on trouve, pages 126-129, une solution trigonométrique de notre problème, que l'auteur fait suivre de ces mots : « Cette solution a été déjà communiquée par l'auteur, en 1820, au professeur Gergonne, pour être insérée dans ses *Annales*. A l'impression, le nom de l'auteur a été transformé en *Lechmütz*. » S. GÜNTHER.

BILLWILLER (R.). — UEBER ASTROLOGIE. Vortrag gehalten von ROBERT BILLWILLER, Chef der schweiz. meteorol. Centralstation in Zürich. — Basel, Schweighauser'sche Buchhandlung, 1878; 33 pages.

Que non-seulement l'histoire générale de la civilisation, mais encore spécialement l'histoire des sciences mathématiques, ne puisse en aucune façon se dispenser de tenir compte de la superstition astrologique des anciens temps si l'on veut que certaines questions importantes ne restent pas à jamais sans réponse, c'est ce qu'aucun historien ne peut méconnaître. Nous savons donc gré à M. Billwiller d'avoir, par la publication en brochure de sa conférence populaire, contribué à attirer l'intérêt général sur ce point, qui n'est pas encore, à beaucoup près, apprécié à sa juste valeur. Après avoir exposé, dans une courte Introduction, la tendance de son discours, il nous dépeint le double caractère de la science des astres dans l'antiquité : d'un côté, c'était une science physique (principalement météorologique) dont le but était relativement raisonnable; d'autre part, c'était une doctrine purement arbitraire (l'Astrologie judiciaire) lorsqu'elle se mêlait de faire des prédictions sur le sort des hommes et des États. M. Billwiller, tout en reconnaissant Ptolémée comme l'auteur des *Apparentiæ stellarum*, défend énergiquement cet astronome contre l'imputation d'avoir écrit le Τετράβιβλος; ses conjectures sur le véritable auteur de ce méfait littéraire paraissent dignes d'attention. Passant aux Arabes, M. Billwiller développe les règles systématisées par les sages de cette nation pour l'établissement des horoscopes, et, à cette occasion, il apporte aussi quelques éclaircissements intéressants sur le *Wallenstein* de Schiller. Il précise ensuite le caractère de l'Astrologie du moyen âge, avec son influence sur la Chimie et la Médecine, et enfin il expose les conceptions géométrico-astrologiques créées par le génie original de Kepler, et à l'importance desquelles il rend pleine justice. « Si de nos jours », dit-il (p. 29), « dans la Psychologie spéculative, dans celle d'Erdmann par exemple, nous rencontrons encore l'expression de *genius terrester,* nous ne devrons pas trop chercher chicane à l'idée de Kepler, quand, à une époque remplie de mysticisme, il parle de l'âme de la Terre. » Nous irons plus loin : nous prétendons, d'accord avec l'excellent essai de Förster, *Johann Kepler und die Harmonie der Sphären,* que le grand astronome ne doit être aucunement séparé de l'ingénieux astrologue, et qu'au contraire l'un entraîne l'autre.

S. Günther.

АНДРЕЕВЪ (К.-А.), профессоръ чистой математики въ Харьковскомъ университета. — О геометрическихъ соотвѣтствіяхъ въ примѣненіи къ вопросу о построеніи кривыхъ линій (1).

(Traduit par M. Potocki.)

Le but de l'auteur est d'étudier le problème de la construction des courbes géométriques, en connaissant un nombre suffisant de leurs points. On trace les sections coniques à l'aide de deux faisceaux, entre les rayons desquels existe une dépendance projective ou uniforme. La question posée par l'auteur est : « Quelle modification faut-il faire subir à la méthode du tracé des sections coniques pour obtenir un procédé plus général pour tracer les courbes d'ordre supérieur ? »

Selon l'auteur, deux transformations sont possibles :

1° On peut modifier les éléments de formation, c'est-à-dire remplacer les faisceaux de droites par des formes géométriques plus compliquées, et laisser sans changement les relations projectives existant entre les faisceaux ;

2° Tout en considérant les faisceaux de droites, généraliser leur mode de dépendance.

(1) Andréief (K.-A.), professeur de Mathématiques pures à l'Université de Kharkof, *Des affinités géométriques appliquées au problème de la construction des courbes.* (*Математ. Сборникъ,* t. IX, 166 pages, gr. in-8°; 1879).

Dans le premier cas, les courbes d'ordre supérieur seront formées à l'aide des faisceaux de courbes d'ordre inférieur, dont les éléments sont liés par l'affinité homographique.

La question a été déjà traitée à ce point de vue ([1]).

Quant à la généralisation du second genre, tout en étant simple et naturelle au point de vue analytique, elle présente de grandes difficultés au point de vue géométrique. En effet, si une courbe d'ordre supérieur est engendrée par l'intersection des rayons correspondants des deux faisceaux rectilignes liés par une affinité d'ordre supérieur (multiforme), on devrait arriver à une construction qui, pour chaque rayon d'un faisceau, détermine les rayons correspondants de l'autre. La difficulté existe dans l'établissement de cette construction, et c'est à cette difficulté qu'on doit attribuer le fait que la généralisation du dernier genre n'a pas conquis jusqu'à présent dans la Science le rang atteint par celle du premier genre.

Pour résoudre le problème de construction des courbes par points, problème que Chasles appelle *le problème fondamental de la théorie des courbes géométriques* ([2]), l'auteur considère comme le plus commode de définir les courbes géométriques comme engendrées par deux faisceaux rectilignes dont les éléments sont liés par une affinité multiforme.

Dans ce cas, le problème de la construction des courbes géométriques d'après la connaissance d'un nombre suffisant de leurs points est ramené à la construction des éléments correspondants de deux faisceaux rectilignes étant entre eux dans une affinité multiforme, et en connaissant un nombre suffisant de couples de ces éléments. Au lieu d'un problème particulier de la construction des courbes, on arrive ainsi au *problème plus général de la théorie géométrique des affinités d'ordre supérieur*.

Ce problème forme le principal objet du travail analysé. L'au-

---

([1]) Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*. Bologne, 1862, § 10.

De Jonquières, *Essais sur la génération des courbes géométriques*.

Hartenberger, *Ueber die Erzeugung geometrischer Curven*. (*Journal de Crelle*, t. 58).

([2]) Chasles, *Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points*. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXVI).

teur considère le principe des affinités comme le principe fondamental de la Géométrie moderne. Dans la Géométrie synthétique, tout genre d'affinité ne peut être considéré comme déterminé que lorsque la construction qui le produit est connue.

Si à chaque élément d'une forme correspondent plusieurs éléments d'une autre, une telle affinité s'appelle *multiforme*. Le domaine des affinités multiformes présente encore un vaste champ à l'exploration. Le professeur Em. Weyr donne, dans son Ouvrage intitulé : *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde,* une définition géométrique précise de l'affinité monobiforme. En 1875, M. Andréief, dans un Ouvrage : *De la formation géométrique des courbes planes,* donna le premier essai d'une représentation géométrique de l'affinité biforme réciproque sous une forme tout à fait générale.

Dans le Mémoire actuel, l'auteur cherche à développer les principes géométriques généraux pour obtenir, à l'aide des constructions, les affinités multiformes telles que le nombre d'éléments de chaque forme, correspondants à un élément quelconque d'une autre forme, n'y dépasse pas quatre. Il parvient ainsi à construire sur un plan les courbes géométriques générales jusqu'au cinquième ordre, y compris plusieurs groupes de courbes, dont certaines propriétés particulières appartiennent aux courbes d'ordres plus élevés. Dans toute son exposition, l'auteur suppose connues les définitions géométriques et les propriétés principales des affinités collinéaires et corrélatives.

Le deuxième Chapitre est intitulé : *Affinité biforme réciproque des faisceaux et construction des courbes des troisième et quatrième ordres.* Dans ce Chapitre, l'auteur étudie la construction à l'aide de laquelle on peut déterminer, pour chaque rayon d'un faisceau, deux rayons correspondants d'un autre faisceau. L'auteur établit, entre l'affinité de deux faisceaux réciproquement biformes, déterminés par huit couples de rayons, une dépendance déterminée par l'affinité corrélative de deux plans. En appliquant l'affinité biforme à la construction des courbes, il résout le problème relatif à la dépendance de l'ordre de la courbe engendrée et des caractéristiques numériques de la multiplicité des affinités entre les faisceaux qui l'engendrent. Ici l'auteur cite le théorème connu :

Deux faisceaux de droites liés entre eux par une dépendance multiforme telle, qu'à chaque rayon du premier correspondent m' rayons du second, et réciproquement à chaque rayon du second faisceau correspondent m rayons du premier, engendrent une courbe d'ordre $m'+m$; les centres de cette courbe renferment des points multiples dont les multiplicités sont respectivement égales à m et m'.

La connaissance de la construction des rayons correspondants de deux faisceaux liés par l'affinité réciproquement biforme permet à l'auteur de résoudre les deux problèmes suivants :

1° *Construire une courbe du quatrième ordre en connaissant dix de ses points, dont deux doubles*;

2° *Construire une courbe du troisième ordre, en connaissant neuf de ses points.*

Le troisième Chapitre a pour objet l'exposition géométrique des transformations dites de Cremona et de leurs applications.

Après avoir donné une définition géométrique de la correspondance quadratique, c'est-à-dire de la transformation du deuxième degré de Cremona, et avoir exposé ses propriétés fondamentales, l'auteur donne un aperçu historique sur le développement graduel de la théorie des transformations au point de vue purement géométrique. Il indique l'affinité établie pour la première fois par Steiner (1) ou la projection gauche de Transon (2), et les définitions géométriques de cette affinité données par Seydewitz (3), Reye (4), Darboux (5), Hirst (6), etc.

---

(1) STEINER, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*. Berlin, p. 351; 1832.

(2) TRANSON, *De la projection gauche*. (*Nouvelles Annales de Mathém.*, t. IV, p. 285-393, 1865, et t. V, p. 63-70; 1866).

(3) SEYDEWITZ, *Darstellung der geometrischen Verwandtschaften*. (*Grunert's Archiv*, t. VII, p. 113-148).

(4) REYE, *Geometrische Verwandtschaft zweiten Grades*. (*Zeitschrift für Math. und Ph.*, t. XI, p. 280-310; 1866).

(5) DARBOUX, *Sur un mode de transformation des figures*. (*Bull. de la Soc. Ph.*, t. XI, p. 72-80; 1868).

(6) HIRST, *On the quadric conversion of plane curves*. (*Proceedings of the Royal Soc.*; 1865).

Les transformations de Cremona d'ordres supérieurs se présentent comme dérivant de la répétition de la dépendance quadratique. La possibilité d'obtenir par ce procédé toutes les transformations de Cremona a été démontrée pour la première fois par Nöther[1] et Rosanes[2], qui l'ont fait indépendamment l'un de l'autre. A propos des transformations de Cremona, on remarque que la construction donnée par Saltel[3] pour établir le principe appelé par lui *arguesien* n'est autre chose que la transformation du troisième degré de Cremona. On donne ensuite la généralisation de cette construction, déjà indiquée par Saltel.

Parmi les applications géométriques, la plus remarquable est celle qui est relative à la construction des courbes rationnelles ou unicursales. L'auteur démontre que, si une courbe de ce genre est déterminée par la connaissance d'un nombre suffisant de ses points, parmi lesquels se trouvent tous les points multiples donnés avec leur degré de multiplicité, tous les autres points de cette courbe peuvent être obtenus à l'aide d'une règle.

Une autre application consiste dans la recherche des points d'intersection de deux coniques sans tracer ces courbes. L'auteur donne deux procédés pour la solution de ce problème. Par le premier, la construction s'effectue à l'aide d'une règle et d'une courbe du troisième ordre et de troisième classe, située dans le plan d'une manière quelconque. Le second consiste dans l'emploi de la règle, du compas et d'une section conique située dans le plan d'une manière quelconque, mais autre que la circonférence ou deux droites.

Dans le quatrième Chapitre, l'auteur examine les systèmes linéaires des coniques. Le plus simple de ces systèmes est un faisceau. Vient après le réseau, c'est-à-dire un système linéaire contenant un nombre doublement infini de courbes. L'auteur appelle *réseau du deuxième genre* un système linéaire contenant un nombre triplement infini de courbes. De la même manière on formerait les réseaux de troisième, quatrième genre, etc.

---

(1) Nöther, *Mathematische Annalen*, t. III; 1870.

(2) Rosanes, *Ueber diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung zulassen.* (*Journal de Crelle*, t. LXXIII, p. 97-110; 1871.)

(3) Saltel, *Sur l'application de la transformation arguesienne, etc.* (*Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique*, t. XXII; 1872).
Saltel, *Mémoire sur le principe arguesien unicursal.* (*Ibid.* t. XXIII; 1873).

Après avoir donné une définition géométrique rigoureuse des réseaux et indiqué leurs propriétés fondamentales, l'auteur résout quelques problèmes relatifs à la construction d'une conique, avec la condition que cette conique appartienne à un ou à plusieurs réseaux déterminés. Vient après l'étude des affinités entre les réseaux de sections coniques. En premier lieu, l'auteur examine les affinités collinéaires, et il démontre qu'une telle affinité entre deux réseaux de même espèce peut être entièrement déterminée à l'aide d'un nombre suffisant de couples de courbes et indique la construction qui permet de trouver, pour chaque conique d'un réseau, une conique correspondante de l'autre.

Après avoir remarqué que chaque réseau est un système auquel le principe de dualité s'applique, l'auteur passe à l'affinité réciproque entre les réseaux. Dans ce cas, à chaque point situé sur un plan de l'un des réseaux correspond une conique située dans le plan de l'autre. Deux points dont chacun se trouve sur une conique correspondante à l'autre s'appellent *conjugués.*

S'étant assuré d'abord que l'affinité réciproque de deux réseaux de coniques peut être déterminée à l'aide d'un nombre suffisant de couples d'éléments réciproquement correspondants, l'auteur démontre encore que chaque couple de ces éléments peut être remplacé par un nombre suffisant de couples de points conjugués. De là résulte la possibilité de déterminer l'affinité réciproque des réseaux simplement à l'aide d'un nombre suffisant de couples de points conjugués.

Le cinquième Chapitre est intitulé : *Affinité réciproque triforme et tétraforme de faisceaux; construction de courbes engendrées par deux faisceaux liés par l'affinité de ce genre.*

Ce Chapitre est principalement consacré à la construction des courbes géométriques. A l'aide d'une construction très-simple, l'auteur est parvenu à lier l'affinité réciproque de réseaux avec l'affinité entre deux faisceaux rectilignes, telle qu'à chaque rayon d'un faisceau correspondent au plus quatre rayons de l'autre, de manière que ces deux espèces d'affinités s'établissent l'une par l'autre.

Le lieu géométrique des points d'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux reliés par l'affinité nommée tout à l'heure est une courbe géométrique d'un ordre qui n'est pas supérieur à huit. On sait que Chasles a donné une méthode de construction d'une courbe du troisième ordre dont neuf points sont connus. M. de Jonquières a donné quelques principes particuliers pour la construction des courbes du quatrième ordre.

En définitive, le résultat du Mémoire analysé conduit à fournir une méthode très-générale de tracé des courbes du quatrième ordre déterminées par quatorze points, et des courbes du cinquième ordre déterminées par vingt points. En outre, l'auteur donne la construction de plusieurs formes particulières de courbes d'ordres supérieurs. Les moyens géométriques employés pour ces constructions sont les mêmes que les moyens employés pour la détermination des points d'intersection de deux sections coniques, c'est-à-dire une règle et une courbe fixe du troisième ordre et de la troisième classe, ou une règle, un compas et une conique fixe autre qu'une circonférence ou un système de deux droites.

Il importe d'ajouter que le Mémoire de M. Andréief est remarquable par la clarté de son exposition, la profondeur de vues et l'originalité des résultats qu'il contient.

N. Bougaïef.

KOENIGSBERGER (L.). — Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale. — Leipzig, 1878. In-8°, 170 p.

Dans ces dernières années, M. Koenigsberger a publié dans divers Recueils mathématiques une suite de travaux sur les fonctions hyperelliptiques; il rend un véritable service à ceux qui s'occupent de ces matières en réunissant les résultats complétés et ordonnés de ses recherches en un Volume, qui formera une suite naturelle à ses Leçons classiques sur la théorie des fonctions elliptiques [1]; on y retrouvera les mêmes qualités d'ordre, de clarté et de concision.

Après avoir montré comment on peut, sur une surface de Riemann à deux feuillets, représenter la racine carrée d'un polynôme, et discuté les conditions nécessaires et suffisantes sur le nombre et la position des points critiques sur une telle surface pour l'existence

[1] Voir *Bulletin*, IX, 145.

d'une fonction rationnelle de z et de $\sqrt{R(z)}$, l'auteur définit les intégrales des trois espèces et établit leur forme, puis montre comment une intégrale hyperelliptique peut être déterminée par les conditions relatives à la discontinuité et aux périodes. L'auteur passe ensuite à la réduction de l'intégrale hyperelliptique générale aux intégrales des trois types normaux, étudie les coefficients de ces intégrales dans les formules de réduction, établit les relations entre les périodes de deux intégrales hyperelliptiques appartenant à la même irrationnalité, démontre le théorème d'Abel, traite le problème de la transformation dans sa généralité. Enfin, les deux derniers Chapitres sont consacrés, l'un aux intégrales hyperelliptiques qui se réduisent aux fonctions algébriques et aux transcendantes élémentaires, l'autre à la multiplication et à la division des intégrales hyperelliptiques.