Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

G. Mittag-Leffler

Extrait d'une lettre à M. Hermite

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 269-278
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_269_1>

EXTRAIT D'UNE LETTRE A M. HERMITE;

PAR M. G. MITTAG-LEFFLER.

Voici les théorèmes que j'ai démontrés dans mon premier Mémoire en allemand, *Arithmetische Darstellung eindeutiger analytischer Functionen einer Veränderlichen,* qui est maintenant dans les mains de M. Weierstrass.

THÉORÈME I. — *Si une suite infinie de quantités données* x_1, x_2, x_3, ..., x_ν, ... *satisfait à la condition*

$$\lim_{n=\infty} |x_n| = \infty,$$

et que m_1, m_2, m_3, ..., m_ν, ... *soient des nombres donnés en-*

tiers et positifs, on peut alors, dans l'expression

$$(\mathrm{A}) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (x - x_\nu)^{-m_\nu} \mathrm{G}_{m_\nu - 1}(x - x_\nu) \left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\mu_\nu} \cdots,$$

déterminer, de plusieurs manières, les nombres entiers non négatifs $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_\nu, \ldots$ *et les expressions entières et rationnelles* $\mathrm{G}_{m_1-1}, \mathrm{G}_{m_2-1}, \mathrm{G}_{m_3-1}, \ldots, \mathrm{G}_{m_\nu-1}, \ldots$ *des degrés respectifs* $m_1 - 1$, $m_2 - 1$, $m_3 - 1$, $\ldots$, $m_\nu - 1$, $\ldots$, *de telle sorte que l'expression* (A) *devienne une fonction analytique de la variable* x, *jouissant des propriétés générales suivantes :*

La fonction sera uniforme; elle n'aura que le seul point singulier essentiel $x = \frac{1}{0}$, *et que les points singuliers non essentiels* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$, *et, pour des valeurs données arbitrairement de*

$$\begin{array}{lllll}
c_{1,-m_1}, & c_{1,-(m_1-1)}, & c_{1,-(m_1-2)}, & \ldots, & c_{1,-1}, \\
c_{2,-m_2}, & c_{2,-(m_2-1)}, & c_{2,-(m_2-2)}, & \ldots, & c_{2,-1}, \\
c_{3,-m_3}, & c_{3,-(m_3-1)}, & c_{3,-(m_3-2)}, & \ldots, & c_{3,-1}, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, \\
c_{\nu,-m_\nu}, & c_{\nu,-(m_\nu-1)}, & c_{\nu,-(m_\nu-2)}, & \ldots, & c_{\nu,-1}, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots
\end{array}$$

et des valeurs suffisamment petites de $|x - x_\nu|$, *elle sera développable sous la forme*

$$\begin{aligned} c_{\nu,-m_\nu}(x - x_\nu)^{-m_\nu} &+ c_{\nu,-(m_\nu-1)}(x - x_\nu)^{-(m_\nu-1)} + \ldots \\ &+ c_{\nu,-1}(x - x_\nu)^{-1} + \mathfrak{P}(x - x_\nu) \quad (^1). \end{aligned}$$

Si l'on ajoute à (A) *une fonction entière* [2] *quelconque de la variable* x, *on obtient ainsi la représentation de toutes les fonctions, qui jouissent des propriétés énoncées ci-dessus.*

Théorème II. — *Si une suite infinie de grandeurs données* x_1,

(1) Pour la signification de $\mathfrak{P}(x - x_\nu)$ *voir* Weierstrass, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen einer Veränderlichen*, p. 26, la note.

(2) Pour la signification du terme *fonction entière*, voir Weierstrass, *Zur Theorie*, etc., p. 17.

$x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots,$ *est telle que l'on ait*

$$\lim_{n=\infty} |x_n| = \infty,$$

et que $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\nu, \ldots; n_1, n_2, n_3, \ldots, n_\nu, \ldots$ *soient des nombres entiers non négatifs donnés, alors, dans l'expression*

$$\text{(B)} \qquad \Pi(x) \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (x - x_\nu)^{-(m_\nu+n_\nu+1)} \mathrm{G}_{m_\nu+n_\nu}(x - x_\nu) \left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\mu_\nu},$$

on pourra de plusieurs manières déterminer la fonction entière $\Pi(x)$, *les nombres entiers non négatifs* $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_\nu, \ldots$ *et les expressions rationnelles et entières* $\mathrm{G}_{m_1+n_1}, \mathrm{G}_{m_2+n_2}, \mathrm{G}_{m_3+n_3}, \ldots, \mathrm{G}_{m_\nu+n_\nu}, \ldots$ *des degrés respectifs* $m_1 + n_1, m_2 + n_2, m_3 + n_3, \ldots, m_\nu + n_\nu, \ldots,$ *de telle sorte que l'expression* (B) *devienne une fonction analytique de la variable* x, *jouissant des propriétés générales suivantes :*

La fonction sera uniforme, elle aura le seul point singulier essentiel $x = \frac{1}{0}$, *et, pour les seuls points donnés* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots,$ *elle aura des points singuliers non essentiels, et enfin, pour des valeurs choisies arbitrairement des quantités*

$$\begin{array}{llllllll}
c_{1,-m_1}, & c_{1,-(m_1-1)}, & c_{1,-(m_1-2)}, & \ldots, & c_{1,-1}, & c_{10}, & c_{11}, & \ldots, & c_{1n_1}, \\
c_{2,-m_2}, & c_{2,-(m_2-1)}, & c_{2,-(m_2-2)}, & \ldots, & c_{2,-1}, & c_{20}, & c_{21}, & \ldots, & c_{2n_2}, \\
c_{3,-m_3}, & c_{3,-(m_3-1)}, & c_{3,-(m_3-2)}, & \ldots, & c_{3,-1}, & c_{30}, & c_{31}, & \ldots, & c_{3n_3}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
c_{\nu,-m_\nu}, & c_{\nu,-(m_\nu-1)}, & c_{\nu,-(m_\nu-2)}, & \ldots, & c_{\nu,-1}, & c_{\nu 0}, & c_{\nu 1}, & \ldots, & c_{\nu n_\nu}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

et pour des valeurs assez petites de $|x - x_\nu|$, *elle sera développable sous la forme*

$$\begin{aligned}
&c_{\nu,-m_\nu}(x - x_\nu)^{-m_\nu} + c_{\nu,-(m_\nu-1)}(x - x_\nu)^{-(m_\nu-1)} + \ldots + c_{\nu,-1}(x - x_\nu)^{-1} \\
&\quad + c_{\nu 0} + c_{\nu 1}(x - x_\nu) + \ldots + c_{\nu n_\nu}(x - x_\nu)^{n_\nu} + (x - x_\nu)^{n_\nu+1} \mathfrak{P}(x - x_\nu).
\end{aligned}$$

Si à (B) *on ajoute encore*

$$\Pi(x)\,\overline{\mathrm{G}}(x)$$

où $\overline{\mathrm{G}}(x)$ *désigne une fonction entière quelconque de la variable* x, *on obtient ainsi la représentation de toutes les fonctions qui possèdent les propriétés en question.*

La fonction $\Pi(x)$ est déterminée par l'équation suivante :

$$\text{(C)} \qquad \Pi(x) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\left(1 - \frac{x}{x_\nu}\right) e^{\frac{x}{x_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_\nu}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\lambda_\nu}\left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\lambda_\nu}} \right]^{n_\nu+1}.$$

Par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$, j'entends ici des nombres entiers non négatifs, soumis à la seule condition que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{n_\nu + 1}{x_\nu} \left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\lambda_\nu}$$

représente une suite convergente pour toute valeur de x.

La formule (A) contient aussi le cas où une des quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$, par exemple x_1, est nulle, pourvu que l'on remplace $\frac{x}{x_1}$ par 1. La formule (B) contient aussi ce cas où l'on pose x égal à

$$\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) e^{\frac{x}{x_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\lambda_1}}$$

et où l'on remplace, de plus, $\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\mu_1}$ par l'unité.

THÉORÈME III. — *Si une suite infinie des quantités données $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$ est telle que*

$$\lim_{n=\infty} |x_n| = \infty,$$

et si $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu, \ldots, n_1, n_2, n_3, \ldots, n_\nu, \ldots$ sont des nombres donnés entiers et non négatifs, on peut de diverses manières représenter arithmétiquement une fonction de la variable x, jouissant des propriétés générales suivantes :

La fonction sera une fonction uniforme et entière, pour laquelle les valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$ comprennent tous les zéros de la fonction, et pour laquelle étant données arbitrairement *les quantités*

$$
\begin{array}{lllll}
c_{1p_1}, & c_{1p_1+1}, & c_{1p_1+2}, & \ldots, & c_{1p_1+n_1}, \\
c_{2p_2}, & c_{2p_2+1}, & c_{2p_2+2}, & \ldots, & c_{2p_2+n_2}, \\
c_{3p_3}, & c_{3p_3+1}, & c_{3p_3+2}, & \ldots, & c_{3p_3+n_3}, \\
\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
c_{\nu p_\nu}, & c_{\nu p_\nu+1}, & c_{\nu p_\nu+2}, & \ldots, & c_{\nu p_\nu+n_\nu}, \\
\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots,
\end{array}
$$

parmi lesquelles aucune des suivantes $c_{1p_1}, c_{2p_2}, c_{3p_3}, \ldots, c_{\nu p_\nu}, \ldots$, *ne doit avoir pour valeur zéro, le développement a lieu, dans le voisinage de toute valeur donnée* x_ν, *sous la forme*

$$
\begin{aligned}
&c_{\nu p_\nu}(x - x_\nu)^{p_\nu} + c_{\nu p_\nu+1}(x - x_\nu)^{p_\nu+1} + \ldots + c_{\nu p_\nu + n_\nu}(x - x_\nu)^{p_\nu+n_\nu} \\
&\quad + (x - x_\nu)^{p_\nu+n_\nu+1}\, \mathfrak{P}(x - x_\nu).
\end{aligned}
$$

On peut aussi former une série, procédant suivant les puissances entières et positives de x *et constamment convergente, qui comprend toutes les fonctions jouissant des propriétés ci-dessus énoncées.*

Ce qu'il y a de nouveau dans le problème contenu dans ce théorème est ainsi de former une fonction qui n'ait pas d'autres zéros que les zéros donnés ci-dessus. Sans cette condition, le problème serait déjà résolu par mon théorème II.

THÉORÈME IV. — *Étant donnée une suite infinie de quantités* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$, *telles que l'on ait*

$$\lim_{n=\infty} |x_n| = \infty,$$

et $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu, \ldots, q_1, q_2, q_3 \ldots q_\nu, \ldots$ *étant des nombres donnés entiers et non négatifs satisfaisant à la condition que, pour chaque valeur du nombre entier et positif* ν, *l'un au moins des nombres* p_ν, q_ν *soit toujours égal à zéro, et enfin* $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_\nu, \ldots$ *étant des nombres entiers et non négatifs donnés arbitrairement, on peut de diverses manières déterminer deux fonctions entières, de manière que ces deux fonctions ne deviennent jamais nulles à la fois, et que leur quotient soit une fonction de la variable* x, *jouissant des propriétés générales suivantes :*

La fonction est une fonction uniforme, ne présentant que le seul point singulier essentiel $x = \frac{1}{0}$, *pour laquelle, de plus, les valeurs données* $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu, \ldots$ *comprennent tous les points singuliers non essentiels, ou tous les zéros, ou encore tous les points singuliers non essentiels en même temps que tous les zéros; et pour laquelle enfin, pour des quantités données arbitrairement*

$$\begin{array}{lllll}
c_{1p_1}, & c_{1p_1+1}, & c_{1p_1+2}, & \ldots, & c_{1p_1+n_1}, \\
c'_{1q_1}, & c'_{1q_1+1}, & c'_{1q_1+2}, & \ldots, & c'_{1q_1+n_1}, \\
c_{2p_2}, & c_{2p_2+1}, & c_{2p_2+2}, & \ldots, & c_{2p_2+n_2}, \\
c'_{2q^2}, & c'_{2q^2+1}, & c'_{2q_2+2}, & \ldots, & c'_{2q_2+n_2}, \\
c_{3p_3}, & c_{3p_3+1}, & c_{3p_3+2}, & \ldots, & c_{3p_3+n_3}, \\
c'_{3q_3}, & c'_{3q_3+1}, & c'_{3q_3+2}, & \ldots, & c'_{3q_3+n_3}, \\
\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
c_{\nu p_\nu}, & c_{\nu p_\nu+1}, & c_{\nu p_\nu+2}, & \ldots, & c_{\nu p_\nu+n_\nu}, \\
c'_{\nu q_\nu}, & c'_{\nu q_\nu+1}, & c'_{\nu q_\nu+2}, & \ldots, & c'_{\nu q_\nu+n\nu}, \\
\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots,
\end{array}$$

parmi lesquelles aucune des premières

$$\begin{array}{ll}
c_{1p_1}, & c'_{1q_1}, \\
c_{2p_2}, & c'_{2q_2}, \\
\ldots\ldots & \ldots, \\
c_{\nu p_\nu}, & c'_{\nu q_\nu}, \\
\ldots\ldots & \ldots
\end{array}$$

ne doit avoir la valeur zéro, et pour des valeurs suffisamment petites de $|x - x_\nu|$, *le développement*

$$\frac{c_{\nu p_\nu}(x-x_\nu)^{p_\nu} + c_{\nu p_\nu+1}(x-x_\nu)^{p_\nu+1} + \ldots + c_{\nu p_\nu+n_\nu}(x-x_\nu)^{p_\nu+n_\nu} + (x-x_\nu)^{p_\nu+n_\nu+1}\mathfrak{P}(x-x_\nu)}{c'_{\nu q_\nu}(x-x_\nu)^{q_\nu} + c'_{\nu q_\nu+1}(x-x_\nu)^{q_\nu+1} + \ldots + c'_{\nu q_\nu+n_\nu}(x-x_\nu)^{q_\nu+n_\nu} + (x-x_\nu)^{q_\nu+n_\nu+1}\mathfrak{P}(x-x_\nu)}$$

est possible.

On peut aussi former une expression qui se présente comme le quotient de deux séries procédant suivant les puissances entières et positives de x, *constamment convergentes et ne s'annulant jamais toutes les deux à la fois, et qui comprend toutes les fonctions jouissant des propriétés énoncées plus haut.*

Je travaille en ce moment à un nouveau Mémoire en langue allemande, qui va contenir d'autres théorèmes dans le même genre que mes quatre théorèmes précédents, et où je veux donner une représentation arithmétique générale de fonctions uniformes, qui aient une infinité multiple de points singuliers essentiels.

Dans ces derniers temps, en m'appuyant sur votre travail : *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, que vous avez eu la bonté de m'envoyer, je me suis occupé d'une autre application des remarquables théorèmes que M. Weierstrass a fait connaître dans son célèbre Mémoire *Sur la théorie des fonctions analytiques uniformes*.

Je cherche la condition à laquelle doivent être assujetties les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., $f_n(x)$, ..., pour que chaque intégrale de l'équation différentielle

$$(\mathrm{D}) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = f_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + f_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + f_n(x)\,y,$$

soit une fonction uniforme de la variable x qui n'ait pas d'autre point singulier essentiel que $x = \frac{1}{0}$.

Depuis que j'ai obtenu cette condition, je puis, toutes les fois qu'elle est remplie, former, pour l'équation différentielle (D), un système fondamental d'intégrales particulières, chaque intégrale étant le quotient de deux séries de puissances entières et positives de la variable x, et qui convergent pour une valeur quelconque de cette variable.

Je prends la liberté de vous envoyer un opuscule en langue suédoise [1] qui contient une généralisation de la formule d'interpolation que vous avez communiquée à M. Borchardt dans une Lettre du 5 juillet 1877.

J'admets que, dans le théorème I, les points singuliers non essentiels x_1, x_2, x_3, ..., x_ν, ... (parmi lesquels le point $x = 0$, s'il est une singularité non essentielle, ne doit cependant être compté),

---

[1] *En ny serientveckling för funktioner af rationel karakter* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XI).

les nombres entiers $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\nu, \ldots$ et les constantes

$$\begin{array}{l}
c_{1,-m_1},\ c_{1,-(m_1-1)},\ c_{1,-(m_1-2)},\ \ldots,\ c_{1,-1},\\
c_{2,-m_2},\ c_{2,-(m_2-1)},\ c_{2,-(m_2-2)},\ \ldots,\ c_{2,-1},\\
c_{3,-m_3},\ c_{3,-(m\ -1)},\ c_{3,-(m_3-2)},\ \ldots,\ c_{3,-1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
c_{\nu,-m_\nu},\ c_{\nu,-(m_\nu-1)},\ c_{\nu,-(m_\nu-2)},\ \ldots,\ c_{\nu,-1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

appartiennent à une fonction uniforme connue $F(x)$, qui n'a aucun point singulier essentiel autre que $x = \frac{1}{0}$.

J'obtiens alors

$$(\mathrm{E})\qquad \left\{\begin{array}{l} F(x) = \overline{G}(x) + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (x - x_\nu)^{-m_\nu} G_{m_\nu - 1}(x - x_\nu) \left(\dfrac{x}{x_\nu}\right)^\mu \\ \qquad + \displaystyle\int^{S} \frac{F(z)}{z - x} \left(\frac{x}{z}\right)^\mu dz. \end{array}\right.$$

Par μ, je désigne un nombre entier positif. On suppose l'intégration effectuée le long d'une ligne fermée S, formant la limite d'une aire simplement connexe, à l'intérieur de laquelle sont situés x_1, $x_2, x_3, \ldots, x_n$, et extérieurement à laquelle sont situés x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots$.

Le point x est supposé ne coïncider avec aucun des points x_1, $x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$.

En outre, on a

$$\begin{aligned} \overline{G}(x) = c_{0,-m_0} x^{-m_0} + c_{0,-(m_0-1)} x^{-(m_0-1)} + \ldots + c_{0,-1} x^{-1} \\ + c_{00} + c_{01} x + c_{02} x^2 + \ldots + c_{0\mu-1} x^{\mu-1}, \end{aligned}$$

où les coefficients

$$c_{0,-m_0},\ c_{0,-(m_0-1)},\ \ldots,\ c_{0,-1},\ c_{00},\ c_{01},\ c_{02},\ \ldots,\ c_{0\mu-1}$$

sont définis par l'égalité

$$\begin{aligned} F(x) = c_{0,-m_0} x^{-m_0} + c_{0,-(m_0-1)} x^{-(m_0-1)} + \ldots + c_{0,-1} x^{-1} \\ + c_{00} + c_{01} x + c_{02} x^2 + \ldots + c_{0\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

J'imagine maintenant que les dimensions de la ligne S croissent suivant une loi telle que chaque S embrasse le S précédent et que, de plus pour chaque point singulier de $F(x)$, situé à distance finie, il se trouve toujours une ligne S correspondante, qui entoure ce point. Si alors la fonction $F(x)$ est de telle nature qu'à cette fonction correspondent un nombre entier μ et une ligne S telle que l'on ait

$$\lim_{s=\infty} \int^{S} \frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{\mu} dz = 0,$$

on conclura alors de (E)

$$\text{(F)} \qquad F(x) = \overline{G}(x) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (x-x_\nu)^{-m_\nu} G_{m_\nu - 1}(x-x_\nu)\left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\mu}.$$

Je suppose maintenant, de plus, que, dans le théorème II, les points singuliers non essentiels $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$, les nombres entiers $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\nu, \ldots, n_1, n_2, n_3, \ldots, n_\nu, \ldots$, et les constantes

$$\begin{array}{l}
c_{1,-m_1},\ c_{1,-(m_1-1)},\ c_{1,-(m_1-2)},\ \ldots,\ c_{1,-1},\ c_{10},\ c_{11},\ c_{12},\ \ldots,\ c_{1n_1},\\
c_{2,-m_2},\ c_{2,-(m_2-1)},\ c_{2,-(m_2-2)},\ \ldots,\ c_{2,-1},\ c_{20},\ c_{21},\ c_{22},\ \ldots,\ c_{2n_2},\\
c_{3,-m_3},\ c_{3,-(m_3-1)},\ c_{3,-(m_3-2)},\ \ldots,\ c_{3,-1},\ c_{30},\ c_{31},\ c_{32},\ \ldots,\ c_{3n_3},\\
\ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\\
c_{\nu 1-m_\nu},\ c_{\nu,-(m_\nu-1)},\ c_{\nu,-(m_\nu-2)},\ \ldots,\ c_{\nu,-1},\ c_{\nu 0},\ c_{\nu 1},\ c_{\nu 2},\ \ldots,\ c_{\nu n_\nu},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

appartiennent à la fonction connue $F(x)$. Je trouve alors

$$\text{(G)} \left\{ \begin{aligned} F(x) &= \Pi(x)\overline{G}(x) + \Pi(x)\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (x-x_\nu)^{-(m_\nu - n_\nu + 1)} G_{m_\nu + n_\nu}(x-x_\nu)\left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\mu} \\ &+ \int^{S} \frac{F(z)}{z-x}\,\frac{\Pi(x)}{\Pi(z)}\left(\frac{x}{z}\right)^{\mu} dz. \end{aligned} \right.$$

La fonction $\Pi(x)$ est définie par la formule (C). Par $\overline{G}(x)$ je désigne la fonction

$$\begin{aligned} \overline{G}(x) = k_{0,-m_0} x^{-m_0} + k_{0,-(m_0-1)} x^{-(m_0-1)} + \ldots + k_{0,-1} x^{-1} \\ + k_{00} + k_{01} x + k_{02} x^2 + \ldots + k_{0\mu-1} x^{\mu-1}, \end{aligned}$$

où les coefficients

$$k_{0,-m_0},\ k_{0,-(m_0-1)},\ \ldots,\ k_{0,-1},\ k_{00},\ k_{01},\ k_{02},\ \ldots,\ k_{0\mu-1}$$

sont définis par l'équation

$$\frac{F(x)}{\Pi(x)} = k_{0,-m_0}x^{-m_0} + k_{0,-(m_0-1)}x^{-(m_0-1)} + \ldots + k_{0,-1}x^{-1}$$
$$+ k_{00} + k_{01}x + k_{02}x^2 + \ldots + k_{0\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots.$$

Si maintenant la fonction $F(x)$ est de telle nature qu'à cette fonction correspondent un nombre entier μ, une fonction $\Pi(x)$ et une ligne S, de sorte qu'on ait

$$\lim_{S=\infty} \int^{S} \frac{F(z)}{z-x}\,\frac{\Pi(x)}{\Pi(z)}\left(\frac{x}{z}\right)^{\mu} dz = 0$$

on conclut alors de (G)

$$\text{(H)}\quad F(x) = \Pi(x)\overline{G}(x) + \Pi(x)\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}(x-x_\nu)^{-(m_\nu+n_\nu+1)}G_{m_\nu+n_\nu}(x-x_\nu)\left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\mu}.$$