Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 193-206

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_193_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

THOMAE (J.). — ABRISS EINER THEORIE DER COMPLEXEN FUNCTIONEN UND DER THETAFUNCTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN. 2 Auflage. 1 vol. in-8°, 197 p. Halle, 1874.

Le Livre de M. Thomae contient sous une forme condensée, ainsi que l'indique le titre, les propriétés les plus essentielles des fonctions Θ d'une seule variable, propriétés qui constituent le fondement de la théorie des fonctions elliptiques; elles sont résumées en soixante-dix pages. La première Partie de l'Ouvrage est consacrée à l'établissement des propositions fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, des intégrales prises entre des limites imaginaires, à quelques notions sur les surfaces de Riemann, nécessaires pour la représentation d'une fonction rationnelle de x et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en x, enfin aux intégrales elliptiques.

Les premières pages du livre de M. Thomae, employées à définir nettement les fonctions dont l'auteur va s'occuper à discuter différents genres de discontinuité, à prévenir le lecteur contre certaines erreurs où tombent volontiers les commençants et dont tous les livres élémentaires ne sont pas exempts, sont peut-être particulièrement dignes de fixer l'attention.

Pour ce qui concerne les fonctions d'une seule variable réelle, nous citerons la construction simple d'une fonction bien définie de x, entre a et b, pour laquelle le rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

quand h tend vers zéro par des valeurs positives, a toujours pour limite zéro, et qui toutefois n'est pas constante. Supposant que l'on ait $a<\alpha<\beta<\ldots<b$, on donnera à la fonction la valeur zéro pour toutes les valeurs de x comprises entre a et α, la limite supérieure α étant exceptée, la valeur 1 pour toutes les valeurs de x qui vont de α à β, en excluant la dernière limite (et non la première), etc... L'existence d'une telle fonction met en évidence la fausseté d'une démonstration bien connue de ce qu'une fonc-

tion dont la dérivée est constamment nulle entre deux limites a et b est constante entre ces limites, démonstration qui suppose seulement que le rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tend vers zéro quand h tend vers zéro par des valeurs positives; l'erreur tient à ce que la supposition précédente n'entraîne pas l'existence d'un nombre h tel que pour *toute* valeur de x comprise entre a et b le rapport soit plus petit qu'un nombre donné. M. Thomae montre que, lorsque, pour toute valeur de x comprise entre les limites, le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement positif ou négatif de la variable tend vers zéro, la fonction est effectivement constante; au surplus, la démonstration, maintenant classique, due à M. Ossian Bonnet, de la formule

$$f(x+h)-f(x) = hf'(x+\theta h),$$

met la chose nettement en évidence, et de la façon la plus simple.

Citons encore la distinction de ce genre particulier de discontinuité relative à des valeurs particulières de la variable, et qui disparaît en changeant la valeur de la fonction pour ces valeurs particulières. M. Seidel en a donné (*Journal de Crelle*, t. 73, p. 304) un exemple simple dans la fonction

$$f(x) = \lim \frac{An}{x^n + x^{-n} + n}, \quad \text{pour} \quad n = \infty,$$

qui pour $x \gtrless 1$ est nulle, et pour $x = 1$ est égale à A, et présente ainsi, pour cette valeur particulière, la discontinuité signalée.

Pour ce qui est des fonctions de deux variables, M. Thomae insiste avec raison sur la nécessité de définir la continuité de la fonction $f(x, y)$ pour le point x, y par la condition que l'on puisse toujours trouver un nombre h assez petit pour que la différence

$$f(x+\xi h, y+\eta h) - f(x, y)$$

puisse être rendue plus petite, en valeur absolue, qu'un nombre donné aussi petit qu'on le voudra, ξ et η étant des nombres quelconques satisfaisant à l'inégalité $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$. Cette condition, pour les points x, y situés sur le contour qui limite le domaine dans l'intérieur duquel on astreint la fonction à être continue, doit être modifiée de manière à n'y faire entrer que les valeurs de ξ, η qui satisfont à l'inégalité précédente et qui répondent à des points situés dans le domaine considéré. Ainsi, il ne suffit pas que $f(x+\theta h, y)-f(x,y)$ et $f(x, y+\theta h)-f(x,y)$ tendent vers zéro avec h pour que la fonction soit continue. La fonction

$$f(x,y)=\sin 4 \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x},$$

à laquelle on attribue la valeur zéro quand x et y sont nuls, est évidemment discontinue pour le point $x=0, y=0$, bien que l'on ait

$$f(\theta h, 0)-f(0,0)=0, \quad f(0,\theta h)-f(0,0)=0.$$

Le même exemple montre aussi que l'existence des dérivées partielles pour un système particulier de valeurs des variables ($x=0$, $y=0$) n'entraîne pas l'existence de la différentielle totale. Un autre exemple intéressant est fourni par la fonction

$$f(x,y)=r^{\mu}\,\mathrm{F}(\varphi),$$

où

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi=\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x},$$

et où $\mathrm{F}(\varphi)$ est la fonction définie par la série procédant suivant les sinus des multiples de l'arc φ, qui entre $-\pi$ et $+\pi$ représente, sauf pour $\varphi=0$, la fonction impaire

$$(\varphi^2-\pi^2)\sqrt[3]{\frac{1}{\varphi}}.$$

Signalons encore ce genre de discontinuité qui disparaît par le changement des valeurs d'une fonction en des points particuliers ou le long d'une courbe; la fonction de M. Seidel

$$\lim \frac{nf(x,y)}{r^n+r^{-n}+n}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{pour} \quad n=\infty,$$

nulle pour tous les points du plan non situés sur le cercle

$$x^2+y^2=1,$$

en est un exemple simple.

Ces préliminaires établis permettent à l'auteur de donner la notion précise des fonctions d'une variable imaginaire $z = x + yi$ auxquelles il entend se borner, fonctions pour lesquelles ne doit exister aucune discontinuité du dernier genre et qui pour tous les points du domaine considéré, sauf en des points *isolés* ou le long de lignes *isolées*, satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$i\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

M. Thomae montre ensuite comment le changement d'une variable imaginaire en une autre conduit à la *représentation conforme* d'une portion de plan sur une autre portion de plan, définit ce qu'il faut entendre par une intégrale prise entre des limites imaginaires, établit d'après Riemann le théorème fondamental de Cauchy; démontre les propositions relatives au développement d'une fonction en série procédant suivant les puissances entières positives ou négatives de la variable, en somme de fractions rationnelles, en produits d'un nombre infini de facteurs; donne la notion d'une fonction doublement périodique, du parallélogramme élémentaire et de ses propriétés; montre comment les périodes, les zéros et les infinis définissent une fonction doublement périodique, et comment les fonctions doublement périodiques du second ordre suffisent à construire les fonctions doublement périodiques d'ordre supérieur. L'auteur est alors amené à dire quelques mots des fonctions doublement périodiques à infinis doubles et des fonctions $\sigma(x)$ de M. Weierstrass, dont le logarithme a pour dérivée seconde une fonction de ce caractère, qui peuvent être définies par l'égalité

$$\sigma(x) = x \prod \left(1 - \frac{x}{2mK + 2nK'}\right) e^{\frac{x}{2mK + 2nK'} + \frac{\frac{1}{2}x^2}{(2mK + 2nK')^2}},$$

et qui d'ailleurs ne diffèrent que par un facteur exponentiel des fonctions Θ. Après avoir établi la relation algébrique entre une fonction doublement périodique du second ordre et sa dérivée, l'auteur est amené à étudier les surfaces de Riemann, en tant qu'elles servent dans la théorie des fonctions elliptiques; il donne ensuite la forme canonique des intégrales elliptiques et leurs propriétés les plus simples.

Le point de départ de M. Thomae, dans l'étude des fonctions Θ, est pris dans les équations fonctionnelles

$$\vartheta_{h,g}(x+\lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}\vartheta_{h,g}(x),$$
$$\vartheta_{h,g}(x+\mu a) = (-1)^{g\mu}e^{-a\mu^2-2\mu x}\vartheta_{h,g}(x),$$

où h, g, λ, μ désignent des nombres entiers quelconques, et ϑ une fonction uniforme, finie et continue dans tout le plan. En faisant $x = \log t$, on aperçoit aisément que les fonctions cherchées doivent être développables en séries procédant suivant les puissances entières positives et négatives de $t = e^x$; les équations fonctionnelles posées, jointes à l'équation aux dérivées partielles

$$4\frac{\partial\vartheta_{h,g}(x)}{\partial a} = \frac{\partial^2\vartheta_{h,g}(x)}{\partial x^2}$$

déterminent les coefficients de ces séries ; les valeurs 0, 1 attribuées aux indices h, g conduisent aux quatre fonctions ϑ. Le procédé même qui a servi pour intégrer les équations fonctionnelles conduit à prouver l'existence d'une relation linéaire à coefficients constants entre $p+1$ fonctions qui satisfont aux équations

$$\varphi(x+\lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}\varphi(x),$$
$$\varphi(x+\mu a) = (-1)^{g\mu}e^{-a\mu^2 p-2a\mu x p}\varphi(x).$$

De là résultent aisément les relations entre les carrés des fonctions ϑ et les expressions développées du produit de deux fonctions ϑ dont les arguments sont $x+\xi$, $x-\xi$; ces dernières formules conduisent immédiatement au théorème sur l'addition des arguments dans les fonctions elliptiques. De ce théorème on peut déduire les équations différentielles auxquelles satisfont ces fonctions; on peut dès lors établir la notion des intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèce, leur expression au moyen des fonctions ϑ, et les propositions relatives à l'addition. L'auteur passe ensuite aux divers développements en produits infinis et en séries trigonométriques, et expose quelques-unes des conséquences arithmétiques qui s'en déduisent naturellement. Enfin, après avoir consacré quelques pages aux fonctions qu'on obtient en généralisant la série du binôme par le procédé appliqué par M. Heine à la série hypergéométrique, il s'occupe de la transformation linéaire des fonctions ϑ et des fonctions elliptiques.

J. T.

ROHN (K.). — BETRACHTUNGEN ÜBER DIE KUMMER'SCHE FLÄCHE UND IHREN ZUSAMMENHANG MIT DEN HYPERELLIPTISCHEN FUNCTIONEN $p = 2$. — München, 1878. In-8°, 60 pages.

On connaît l'étroite connexion qui existe entre les fonctions elliptiques et les courbes planes du troisième ordre; si l'on considère les fonctions hyperelliptiques pour lesquelles les fonctions Θ correspondantes dépendent de *deux* arguments, c'est à une *surface* que l'on peut espérer de les relier par un mode analogue à celui que nous venons de rappeler, et la surface qui se trouve ainsi étroitement unie à ces fonctions est la surface de Kummer.

C'est cette connexion qu'étudie M. Rohn dans son importante *dissertation inaugurale*.

Dans la première Partie, l'auteur s'occupe de la surface de Kummer en elle-même, définit les deux paramètres qui déterminent chaque point, recherche les diverses formes que peut affecter la surface et les régions dans lesquelles on peut la décomposer; le terrain ainsi préparé, M. Rohn expose, dans la seconde Partie de son travail, comment on peut représenter les fonctions hyperelliptiques ($p = 2$) sur la surface qu'il a étudiée, et, dans la troisième, compare avec sa méthode celle qu'a donnée M. Borchardt.

Nous indiquerons quelles variables choisit l'auteur pour déterminer les différents points de la surface.

Au système de complexes du second degré homofocaux

$$\frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \ldots + \frac{x_6^2}{k_2 - \lambda} = 0,$$

où les six complexes linéaires fondamentaux, deux à deux en involution, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., sont tels que l'on ait identiquement

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 = 0,$$

correspond une même surface de Kummer, touchée par chaque droite singulière. L'équation du système de complexes est du quatrième degré en λ, en sorte que chaque droite appartient à quatre complexes du système; réciproquement, quatre complexes du système se coupent suivant trente-deux droites, dont les coordonnées sont données par les formules

$$\rho x_\alpha^2 = \frac{(k_\alpha - \lambda_1)(k_\alpha - \lambda_2)(k_\alpha - \lambda_3)(k_\alpha - \lambda_4)}{f'(k_\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, 6),$$

où $f'(k_\alpha)$ est la valeur de la dérivée, pour $\lambda = k_\alpha$, de

$$f(\lambda) = (k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)\ldots(k_6 - \lambda).$$

Les droites singulières s'obtiennent en égalant deux paramètres λ. D'ailleurs, en général, une seule droite du faisceau de tangentes en un point à la surface de Kummer appartient, en tant que droite singulière, à chaque complexe du système, les deux autres points où elle rencontre la surface étant les points singuliers correspondants; par suite, si la tangente considérée est une tangente d'inflexion, le faisceau entier des tangentes appartient au complexe dont cette droite est une droite singulière. Les tangentes en un point appartiennent donc à deux complexes du système homofocal, et ce sont les paramètres λ_1, λ_2 de ces complexes qui servent à M. Rohn pour définir ce point; quant aux autres paramètres λ_3, λ_4 des tangentes, ils sont égaux. Lorsque leur valeur commune λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, la tangente décrit le faisceau et, pour $\lambda = \lambda_1$ ou λ_2, devient une tangente d'inflexion. Pour chaque système de valeur de λ_1, λ_2, on peut donc obtenir les six coordonnées de chacune des tangentes d'inflexion relatives au point correspondant. Les différentes combinaisons de signe fournissent trente-deux couples de telles tangentes, en sorte qu'à chaque système de valeurs de λ_1, λ_2 correspondent trente-deux points de la surface de Kummer; ces trente-deux points peuvent être regardés comme les intersections de deux lignes asymptotiques dont les équations, dans le système de coordonnées précédemment défini, seraient $\lambda_1 =$ const., $\lambda_2 =$ const. L'emploi des fonctions hyperelliptiques permet de distinguer les trente-deux points et de leur attribuer des paramètres différents. Enfin, la comparaison du procédé de représentation de M. Borchardt et du sien conduit M. Rohn à reprendre l'étude des transformations quadratiques et leur signification relative à la surface de Kummer; il parvient ainsi, pour ces transformations, aux formules les plus simples.

Quant à l'étude des diverses formes de la surface de Kummer, des relations entre ses nœuds et ses points doubles, elle a naturellement pour point de départ la distinction des cas qui peuvent se présenter quant à la réalité des six complexes linéaires fondamentaux. Ces six complexes étant donnés, il existe une triple infinité de systèmes homofocaux correspondants, en sorte qu'on peut prendre arbitrairement un point de l'espace pour nœud de la surface de Kummer; les seize nœuds et la surface tout entière sont alors déterminés. Si l'on prend le nœud sur la surface réglée intersection de trois des complexes fondamentaux, les seize nœuds sont aux points d'intersection de quatre génératrices d'un système et de quatre génératrices de l'autre, et la surface de Kummer n'est autre que la surface du second degré comptée deux fois; cette dernière, avec les seize points d'intersection des huit génératrices considérées, peut être regardée comme l'image d'une surface de Kummer, avec ses seize nœuds, qui, par une déformation continue, viendrait se confondre avec elle. J. T.

BOUSSINESQ (J.). — ESSAI THÉORIQUE SUR L'ÉQUILIBRE DES MASSIFS PULVÉRULENTS, COMPARÉ A CELUI DE MASSIFS SOLIDES ET SUR LA POUSSÉE DES TERRES SANS COHÉSION. — Paris, Gauthier-Villars, 1876. In-4° de 180 p. Prix : 10 fr.

Dans ce Mémoire, l'auteur essaye de poser les bases de la Mécanique des corps semi-fluides qui sont, les uns pulvérulents, les autres plastiques. Rankine, dans une étude *Sur la stabilité de la terre sans cohésion* (*Philosophical Transactions*, 1856-1857), a traité de l'équilibre limite que présentent des masses pulvérulentes sur le point de s'ébouler; il a admis, comme base de son analyse, qu'en chaque point d'une telle masse la pression la plus inclinée sur la normale à l'élément plan qu'elle sollicite fait avec cette normale un angle égal à celui du frottement intérieur ou de terre coulante. D'autre part, M. Tresca, dans un Mémoire *Sur le poinçonnage des métaux et la déformation des corps solides* (*Savants étrangers de l'Académie de Paris*, t. XX, 1872), et M. de Saint-Venant, dans divers articles insérés aux *Comptes rendus* de 1870 et 1871, ont été conduits par l'expérience à admettre, comme principe fondamental de la Mécanique des corps plastiques, la constance de la plus grande composante tangentielle de pression aux divers points de ces corps, supposés pétris avec une certaine lenteur. Mais on n'avait pas encore cherché comment ces états ébouleux et plastiques d'une matière que l'on déforme indéfiniment se rattachent aux états élastiques ordinaires, correspondant à des déformations moins étendues, c'est-à-dire comprises entre les limites d'élasticité. En outre, pour les masses pulvérulentes, on n'avait aucune connaissance de l'expression de leurs forces élastiques en fonction des petites déformations éprouvées à partir de l'état naturel. C'est à cette double lacune que répond le Mémoire de M. Boussinesq.

Admettant que les expressions des forces élastiques sont développables en séries très-convergentes suivant les puissances entières des déformations, il cherche les formes auxquelles se réduisent nécessairement ces expressions, supposées de grandeur modérée, dans les deux cas d'un solide d'élasticité constante et d'une masse pulvérulente, c'est-à-dire suivant que le corps présente toujours une rigidité finie ou suivant qu'il résiste aux déformations, alors seulement qu'il supporte dans tous les sens une pression plus ou moins grande. Dans le premier cas, il est conduit aux formules très-connues de Lamé (à deux coefficients d'élasticité λ, μ). Dans le second cas, il arrive, pour les six composantes N, T suivant les x, y, z des pressions exercées sur les éléments plans qui leur sont normaux, aux relations

$$N_1 = p\left(-1 + 2m\frac{du}{dx}\right), \quad N_2 = p\left(-1 + 2m\frac{dv}{dy}\right),$$
$$N_3 = p\left(-1 + 2m\frac{dw}{dz}\right),$$

$$T_1 = pm\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right), \quad T_2 = pm\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right), \quad T_3 = pm\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dz}\right):$$

m désigne un coefficient constant pour chaque matière pulvérulente, p la pression moyenne exercée autour de la molécule considérée (x, y, z), et u, v, w les composantes du petit déplacement qu'elle a éprouvé. De plus, la même analyse montre que la dilatation cubique est négligeable en comparaison des trois dilatations linéaires dont elle égale sensiblement la somme algébrique. On peut donc joindre aux trois équations ordinaires d'équilibre où entrent les dérivées en x, y, z des forces N, T la quatrième équation indéfinie

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

nécessaire à la détermination des quatre fonctions inconnues u, v, w, p.

Il existe, en outre, des conditions d'équilibre spéciales aux surfaces libres du massif et d'autres conditions, très-variées suivant les circonstances, concernant les surfaces de séparation de ce massif d'avec le sol ou les murs rigides qui le soutiennent. Ces dernières relations sont remplacées par une condition de maximum de stabilité intérieure dans le cas le plus important, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit des modes d'équilibre qui se produisent à la longue, une fois que les petits ébranlements auxquels tout massif est sans cesse exposé ont réussi à grouper les grains pulvérulents de la manière la moins forcée, la plus voisine de l'état naturel.

L'intégration du système d'équations indiqué fait connaître, dans chaque problème spécial, les valeurs de u, v, w, p, et par suite celles des déformations. Il reste ensuite à exprimer que les trois dilatations principales $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ satisfont partout à une certaine inégalité, c'est-à-dire ne sortent pas des limites d'élasticité imposées, comme on sait, à toute matière douée de la tendance à reprendre la forme dont on l'écarte. Dans le cas simple de déformations planes, on a $\partial_2 = 0$, et M. Boussinesq reconnait que l'inégalité dont il vient d'être question revient, pour les masses pulvérulentes et pour les solides suffisamment plastiques, à supposer la plus grande dilatation ∂_1 inférieure à une constance spécifique ; le fait de l'absence de cohésion des massifs pulvérulents lui permet même de poser, pour ces massifs, $\partial_1 < \frac{\sin\varphi}{2m}$, φ désignant un angle aigu positif qu'il démontre plus loin être précisément celui du frottement intérieur.

Les intégrations sont faciles quand le massif homogène et pesant a pour surface libre un talus plan faisant un angle donné ω avec l'horizon, et que les déformations éprouvées, parallèles à son plan vertical de symétrie, se trouvent les mêmes en tous les points également distants du talus supérieur. M. Boussinesq effectue ces intégrations pour un massif pulvérulent et pour un massif solide. Les résultats deviennent fort simples dans les cas où la profondeur est suffisamment grande. Alors les dilatations principales ∂_1, ∂_3 sont les mêmes en tous les points du massif pulvérulent, sensiblement proportionnelles à la distance au talus supérieur, dans le cas d'un massif solide. De plus, les bissectrices des angles formés par les éléments linéaires qui éprouvent ces dilatations principales ont des directions constantes en tous les points du massif pulvérulent, des directions qui tendent à devenir constantes quand on s'enfonce dans le massif solide. L'angle ε que fait avec la verticale une quelconque de ces directions est astreint, dans un massif pulvérulent de profondeur quelconque et dans un massif solide de profondeur très-grande, à vérifier l'inégalité

$$\cos^2(\omega - 2\varepsilon) > \frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 \varphi};$$

φ désigne pour un massif pulvérulent l'angle défini ci-dessus et pour un massif solide l'angle aigu, dont le sinus vaut $\mu : (\lambda + \mu)$. Cette inégalité n'est compatible avec aucune valeur réelle de ε quand on a $\omega > \varphi$, d'où se conclut l'impossibilité, pour un massif pulvérulent, de se soutenir sous un angle supérieur à celui de terre coulante, et pour un massif solide profond de se soutenir sous un angle supérieur à celui dont le sinus vaut le rapport $\mu : (\lambda + \mu)$, d'autant plus voisin de zéro qu'il s'agit d'un corps plus mou. Si au contraire $\omega < \varphi$, ε peut recevoir une infinité de valeurs; elles correspondent à tout autant de modes distincts d'équilibre d'élasticité, tous compris entre deux modes d'équilibre limite, l'un par détente, l'autre par compression, précisément identiques, dans les milieux pulvérulents, à ceux qu'avait découverts Rankine. M. Boussinesq démontre qu'un des modes d'équilibre d'élasticité ainsi obtenus, et un seul, convient au cas où le massif est soutenu d'un côté par un mur plan, soit lorsque ce mur présente un degré de résistance connu et que l'équilibre s'est réglé à la longue, soit lorsque le mur est une paroi sans pesanteur que maintient contre le massif une force donnée, comprise entre celle qui suffirait à peine pour le soutenir et celle qui le ferait refluer par écrasement au-dessus du talus supérieur, soit encore pour d'autres circonstances, les plus simples en théorie, mais peu réalisables pratiquement.

Les deux derniers paragraphes du Mémoire (§§ IX et X), qui sont aussi les plus longs, sont consacrés à la Dynamique des massifs incohérents et des solides malléables. L'auteur reconnaît d'abord que les très-petites vibrations élastiques d'une masse pulvérulente non comprimée ne sont pas réglées par des équations linéaires, ce qui explique pourquoi ces masses ne peuvent pas vibrer *pendulairement* sous l'influence de leur élasticité et pourquoi elles étouffent le son. Il se borne ensuite à l'étude des mouvements assez lents dans lesquels l'inertie n'a qu'un rôle négligeable, si ce n'est en des points exceptionnels. Les six pressions N, T n'y diffèrent pas sensiblement, en chaque endroit, des forces élastiques maxima que comporte la matière, en sorte que l'équation caractéristique de l'état ébouleux ou de l'état plastique s'obtient en exprimant que les limites d'élasticité se trouvent atteintes; cette équation est précisément, soit la formule fondamentale posée par M. Rankine, soit celle de MM. Tresca et de Saint-Venant pour la plasticodynamique. M. Boussinesq joint donc cette relation finie en N, T aux trois équations bien connues qui expriment l'équilibre d'un élément de volume parallélépipédique et où entrent les dérivées en x, y, z des six pressions N, T. Mais il observe que la masse en équilibre ébouleux ou plastique n'admet généralement plus un *état naturel* où les pressions peuvent s'annuler partout; il faudrait séparer toutes ses particules infiniment petites les unes des autres pour qu'elles puissent se détendre simultanément sans se gêner.

M. Boussinesq complète le système de neuf équations indéfinies nécessaires à la détermination des six pressions N, T et des trois composantes u, v, w de la vitesse de chaque particule en admettant que les diverses fibres qui se croisent en un même point éprouvent *des dilatations persistantes proportionnelles à leurs dilatations élastiques actuelles*. Ce principe simple lui fournit aisément les cinq équations indéfinies qui manquaient. Enfin il joint des conditions évidentes spéciales, soit aux surfaces libres, soit aux couches en contact avec des parois solides, soit aux surfaces de séparation des parties passées à l'état ébouleux d'avec celles qui sont restées à l'état élastique ordinaire.

Comme première application, M. Boussinesq démontre que *la vitesse d'écoulement du sable par un orifice tend vers une limite ou devient indépendante de la hauteur de charge dès que celle-ci atteint une certaine valeur,* fait connu des anciens et qui leur permettait de mesurer le temps au moyen des sabliers. Il étudie ensuite la répartition des pressions dans un massif sans cohésion soutenu par un mur, aux premiers moments d'un éboulement déterminé par l'ébranlement du mur. M. Maurice Lévy a heureusement appliqué au problème, en la découvrant de nouveau, une des deux solutions données par Rankine dont il a été parlé plus haut; seulement elle ne convient que pour un cas restreint, car elle n'est compatible avec le glissement de la matière du massif contre le mur qu'autant que celui-ci a sa face postérieure dirigée d'une certaine manière. M. Boussinesq en trouve d'autres beaucoup plus générales applicables pour des inclinaisons quelconques de ces faces et même pour le cas où les surfaces limites du massif sont courbes. Ces solutions comportent des représentations géométriques assez simples, et elles prouvent que, suivant les cas, une portion déterminée du massif, contiguë au mur de soutènement, reste à l'état élastique ou devient le siége d'un état ébouleux très-différent de celui qui affecte le reste. D'ailleurs, elles ne sont rigoureusement exactes que lorsque la matière pulvérulente présente une hétérogénéité trop peu sensible pour qu'il y ait lieu d'en tenir compte.

Un dernier paragraphe est consacré à l'étude, en coordonnées polaires, des déformations planes d'une masse plastique ou pulvérulente soumise en divers sens à des pressions beaucoup plus grandes que son poids, principalement quand ces pressions sont ou pareillement distribuées autour d'un axe, ou pareillement orientées en tous les points de chaque rayon vecteur émané de l'origine. M. Boussinesq en déduit, comme formules approximatives, les expressions simples et remarquables auxquelles M. Tresca a été conduit par l'expérience : 1° la force capable de faire pénétrer un poinçon cylindrique suivant l'axe d'un bloc de plomb de même forme, mais de plus grand diamètre, à contour tantôt libre, tantôt entouré d'un manchon rigide ; 2° la hauteur de la débouchure que détache ce poinçon, quand un orifice de même dimension transversale que lui est percé suivant son prolongement à travers le plan poli qui supporte le bloc poinçonné ; 3° enfin la force capable de faire écouler par un tel orifice un morceau cylindrique de plomb remplissant un vase en fer et poussé par un piston. M. Boussinesq trouve aussi les modes les plus simples de distribution des pressions qui se produisent dans une masse plastique ou pulvérulente remplissant l'angle dièdre formé par deux plans rigides, soit lorsque cet angle est constant et que la masse considérée y coule de manière que la matière contiguë aux plans converge des deux côtés vers l'arête ou s'en éloigne des deux côtés, soit, au contraire, que l'angle des deux plans diminue ou grandisse et que l'écoulement soit produit par l'écrasement de la masse ou par sa détente latérale.

Le Mémoire se termine par l'exposition d'une méthode d'intégration graphique due à Rankine, pour traiter le problème de l'équilibre limite d'un massif pulvérulent à surface supérieure courbe. Rankine l'avait appliquée en faisant une hypothèse simplificative qui change beaucoup la question. M. Boussinesq montre comment elle peut, avec presque autant de simplicité, s'adapter aux équations vraies du problème. P. M.