BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

# Comptes rendus et analyses

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série*, tome 3, nº 1 (1879), p. 129-136
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_129_0>

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LEMONNIER (H.). — MÉMOIRE SUR L'ÉLIMINATION. In-4°, 92 p. — Paris, 1879.

Le travail de M. Lemonnier est divisé en trois Parties, consacrées, la première à l'étude des procédés d'élimination dus à Euler, Sylvester, Bézout, Cauchy, Cayley, et de la liaison de ces procédés, la seconde à l'étude des polynômes qu'il convient de former de proche en proche pour obtenir les conditions nécessaires à l'existence de $p$ racines communes aux deux équations données et l'équation aux racines communes, la troisième enfin à la résolution de deux équations entières à deux inconnues; l'auteur se borne d'ailleurs aux racines communes ayant des modules finis et aux solutions communes pour lesquelles les inconnues ont des valeurs finies, déterminées.

Relativement à la méthode d'Euler-Sylvester, il en énonce le résultat sous la forme suivante :

Étant données deux équations entières en $x$, $F(x)=0$, $f(x)=0$, de degrés $m$ et $n$ $(m \geqq n)$, soient considérées les $m+n-2p+2$ équations

$$\begin{array}{ll} f(x)=0, & F(x)=0, \\ xf(x)=0, & xF(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^{m-p}f(x)=0, & x^{n-p}F(x)=0; \end{array}$$

si l'on égale à zéro les déterminants formés des coefficients de $x^p, \ldots, x^{m+n-p}$ dans ces équations, en y associant tour à tour ceux de $x^{p-1}$, $x^{p-2}$, ..., $x$ et $x^0$, les $p$ relations posées par là, entre les coefficients de $F(x)$ et de $f(x)$, sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations proposées aient $p$ racines communes, finies, déterminées, sans en avoir davantage, pourvu que le déterminant formé des coefficients de $x^p$, $x^{p+1}, \ldots, x^{m+n-p-1}$, dans les équations

$$\begin{array}{ll} f(x)=0, & F(x)=0, \\ xf(x)=0, & xF(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ x^{m-p-1}f(x)=0, & x^{n-p-1}F(x)=0, \end{array}$$

soit différent de zéro.

De plus, l'équation aux racines communes s'obtiendra par l'élimination de $x^{p+1}$, $x^{p+2}, \ldots, x^{m+n-p-1}$ entre ces $m+n-2p$ dernières équations. Pour faire l'élimination, on pourra prendre le déterminant des coefficients de $x^p$, $x^{p+1}, \ldots, x^{m+n-p-1}$ dans les $m+n-2p$ équations et le développer par rapport aux coefficients de $x^p$. Si l'on multiplie les équations respectivement par les multiplicateurs de ces coefficients, et que l'on ajoute les résultats, l'équation qui s'ensuivra sera l'équation aux racines communes. Les coefficients de $x^p, x^{p-1}, \ldots, x, x^0$ y seront le déterminant considéré et ceux qui en résultent quand on y remplace tour à tour la colonne des coefficients de $x^p$ par celles des coefficients de $x^{p-1}, x^{p-2}, \ldots, x$ et $x^0$.

M. Lemonnier applique cette règle à la formation des plus grands communs diviseurs $R_1$, $R_2$, $R_3$, ... de $F(x)$ et $f(x)$, qui répondent successivement aux hypothèses de $p=n-1$, $p=n-2$, $p=n-3, \ldots$, et remarque tout d'abord que les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir $p$ racines communes sont que les coefficients de $R_{n-p+1}$ soient nuls sans que le premier coefficient de $R_{n-p}$ le soit; dans ces conditions, le polynôme $R_{n-p}$ fournit les $p$ racines communes aux deux équations et divise tous les polynômes R d'indices inférieurs, tandis que les polynômes d'indices supérieurs sont identiquement nuls.

L'auteur compare ensuite les polynômes R à ceux que l'on obtient, comme restes successifs, en procédant par la méthode des divisions à la recherche du plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et $f(x)$, et établit entre trois polynômes R consécutifs la relation générale

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha^2 R_{p+2},$$

où $\alpha_p$ désigne le premier coefficient de $R_p$; quant aux premiers polynômes R, ils sont liés aux polynômes $F(x)$ et $f(x)$ par les relations

$$a^{m-n+1} F(x) = f(x) Q + R_1 (-1)^{\frac{m-n+1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}},$$

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 Q_1 = a^{m-n+1} R_2 (-1)^{\frac{m-n+1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}},$$

$a$ désignant le premier coefficient de $f(x)$ et l'exposant de $-1$ dans les deux équations étant entier.

On peut remarquer en outre que si l'on applique aux polynômes

$R_p$, $R_{p+1}$ le même calcul qu'aux polynômes $F(x)$ et $f(x)$, on obtient des polynômes $R^1_{p+2}$, $R^1_{p+3}$, ..., qui ne diffèrent des polynômes $R_{p+2}$, $R_{p+3}$, ... que par les facteurs $a_p^2$, $a_p^4$, ....

Le procédé de Bézout-Cauchy conduit à un autre mode de calcul, souvent plus pratique, des polynômes R, ou plutôt de polynômes qui n'en diffèrent, tout au plus, que par le signe.

Les relations établies entre les polynômes $F(x)$, $f(x)$, $R_1$, $R_2$, ... dans le cas où $m - n = 1$ montrent que ces polynômes forment une suite de Sturm; en prenant $f(x) = F'(x)$, on pourra les utiliser pour la détermination des racines comprises entre deux limites, en sorte que, si

$$V = Ax^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$
$$V_1 = ax^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1},$$

$V_1$ étant la dérivée de V à un facteur positif près, si en outre

$$bx^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_m = 0,$$
$$cx^{m-1} + c_1 x^{m-2} + \ldots + c_m = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sont les équations déduites de V et de $V_1$ par le procédé de Bézout, les fonctions $V_2$, $V_3$, ... de la suite ordinaire de Sturm reviendront aux polynômes

$$R_1 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} x^{m-1} + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ b & b_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \ldots + \begin{vmatrix} a & a_{m-1} \\ b & b_{m-1} \end{vmatrix},$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_3 \\ b & b_1 & b_3 \\ c & c_1 & c_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_{m-1} \\ b & b_1 & b_{m-1} \\ c & c_1 & c_{m-1} \end{vmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou, sous une autre forme, aux polynômes

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 \\ a_1 & a & a_2 \\ A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} 0 & a & a_2 \\ a & a_1 & a_3 \\ A & A_1 & A_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a_1 & a_2 \\ 0 & a & a_1 & a_2 & a_3 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a_1 & a_3 \\ 0 & a & a_1 & a_2 & a_4 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_5 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_4 \end{vmatrix} x^{m-4} + \ldots.$$

M. Lemonnier constate ensuite que les premiers coefficients de ces polynômes $R_1$, $R_2$, ..., lorsque $f(x)$ est la dérivée de $F(x)$, sont précisément, au cas de $A = 1$, les nombres $p_\mu$ de M. Borchardt, savoir

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

où $s_i$ désigne la somme des puissances de degré $i$ des racines de $F(x)$.

Enfin, dans la dernière Partie du Mémoire, on montre quel parti on peut tirer, pour la résolution de deux équations à deux inconnues $x$, $y$ de la formation des polynômes R obtenus en éliminant $x$, polynômes dont les coefficients sont maintenant des fonctions en $y$; M. Lemonnier, en suivant une méthode dont le principe est dû à M. Bouquet, évalue le degré maximum de $y$ dans chacun des coefficients de ces polynômes.

La comparaison du procédé de résolution de deux équations donné dans ce travail avec celui qui est dû à M. Labatie, ainsi que plusieurs applications numériques par lesquelles l'auteur termine, en met nettement les avantages en évidence.

SCHERING (E.). — Analytische Theorie der Determinanten. Göttingen, 1877. In-4°, 41 pages (¹).

L'auteur reprend la théorie des déterminants à son début. Il représente un quelconque des $n^2$ éléments d'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre par la notation suivante :

$$E h_i k_j,$$

où les $i$ et les $j$ désignent les rangs respectifs de la ligne horizontale et de la colonne verticale auxquelles appartient l'élément considéré; si maintenant on considère deux éléments différents, les deux lignes

(¹) *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften*, t. XXII.

et les deux colonnes correspondantes, la disposition des deux lignes sera semblable à celle des colonnes, si la première colonne suit ou précède la deuxième colonne en même temps que la première ligne suit ou précède la deuxième ligne, et dissemblable dans le cas contraire. Un terme du déterminant est le produit de $n$ éléments quelconques, multiplié par autant de facteurs égaux à $-1$ qu'on trouve de dispositions dissemblables dans les lignes et les colonnes, en prenant deux éléments quelconques de ce terme, et multiplié par zéro si deux éléments appartiennent à la même ligne ou à la même colonne; le déterminant

$$E(h_1, h_2, \ldots, h_n \mid k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

est la somme de tous les termes ainsi obtenus.

Considérons maintenant un terme quelconque du déterminant et désignons respectivement par

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

et par

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$$

les premiers et les seconds indices correspondants des éléments qui entrent comme facteurs dans le terme considéré, indices relatifs, les premiers aux lignes horizontales, les seconds aux lignes verticales, et pris les uns parmi les nombres

$$h_1, h_2, \ldots, h_n,$$

et les autres parmi les nombres

$$k_1, k_2. \ldots, k_n,$$

ne différant même de ces nombres que par l'ordre, si le terme considéré est un terme *propre* (non affecté du coefficient zéro); puis introduisons une fonction $\mathfrak{Z}$ définie par les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z}(x) &= 1, \quad \text{pour } x > 0,\\
\mathfrak{Z}(x) &= -1, \quad \text{pour } x < 0.\\
\mathfrak{Z}(0) &= 0,\\
\mathfrak{Z}(xy) &= \mathfrak{Z}(x)\,\mathfrak{Z}(y).
\end{aligned}$$

On reconnaîtra sans difficulté que le terme considéré pourra s'écrire

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=n} E_{\eta_\nu, \varkappa_\nu} \times \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\eta_m - \eta_\mu)(\varkappa_m - \varkappa_\mu)$$

$$\times \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\beta=1}^{\beta=b-1} (h_b - h_\beta)(k_b - k_\beta).$$

En faisant la somme de tous les termes analogues, on obtient le déterminant. Cette sommation peut d'ailleurs s'effectuer de diverses manières : on peut, par exemple, regarder le déterminant comme une somme $n^{\text{uple}}$ dont les termes s'obtiendront en attribuant séparément, dans la formule précédente, aux indices $\eta$ toutes les valeurs $h_1, h_2, \ldots, h_n$, ou aux indices $\varkappa$ toutes valeurs $k_1, k_2, \ldots, k_n$; ou encore comme le résultat de deux sommations $n^{\text{uples}}$ dont les termes s'obtiendront en attribuant séparément, dans la même formule, les valeurs $h_1, h_2, \ldots, h_n$ et les valeurs $k_1, k_2, \ldots, k_n$ aux indices $\eta$ et $\varkappa$. Dans ce dernier cas, le résultat doit être divisé par $1.2.3\ldots n$, car chaque terme *propre* du déterminant se trouve évidemment répété ce nombre de fois. Il est à peine utile d'ajouter que les propriétés élémentaires des déterminants résultent immédiatement de ces formules; de même, l'introduction de la fonction $\mathfrak{Z}$ et des produits de différences d'indices permet à M. Schering de donner les formules au moyen desquelles on passe d'un déterminant

$$E(h_1, h_2, \ldots, h_n \mid k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

à un autre déterminant

$$E(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \mid \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n),$$

où les indices

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n; \quad \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$$

ne diffèrent respectivement que par la façon dont ils sont rangés des indices

$$h_1, h_2, \ldots, h_n; \quad k_1, k_2, \ldots, k_n;$$

la convention

$$\mathfrak{Z}(0) = 0$$

permettra même d'étendre ces formules au cas où les premiers indices, étant seulement assujettis à être pris parmi les seconds, ne sont pas tous nécessairement différents.

A la somme $n^{\text{uple}}$, qui constitue le déterminant, peut être substituée une somme de produits de sommes $\nu^{\text{uples}}$ par des sommes $n-\nu^{\text{uples}}$ : l'auteur est ainsi conduit à des formules générales qui donnent, sous diverses formes, la décomposition d'un déterminant d'ordre $n$ en produits de mineurs d'ordre $n-\nu$ par des mineurs d'ordre $\nu$; ces formules se généralisent et conduisent à la décomposition d'un déterminant en sommes de produits de trois déterminants mineurs, etc.

Le cas où les premiers indices $h_1, h_2, \ldots, h_n$ ont les mêmes valeurs que les seconds $k_1, k_2, \ldots, k_n$, en sorte que l'on ait

$$h_\lambda = k_\lambda, \quad \text{pour} \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n,$$

conduit à des conclusions intéressantes.

L'auteur nomme *cycle* de couples d'indices une suite de couples d'indices $h$ et $k$ tels que le premier indice de chaque couple soit égal au second indice du couple précédent, le dernier indice du dernier couple étant égal au premier indice du premier couple; le nombre de couples qui entrent dans un cycle simple est l'ordre de ce cycle. Il est aisé de voir qu'un système de couples de valeurs

$$(\eta_1, \varkappa_1)(\eta_2, \varkappa_2) \ldots (\eta_n, \varkappa_n),$$

où les $\eta$ sont différents entre eux, ainsi que les $\varkappa$, mais où les premiers nombres, à l'ordre près, ont les mêmes valeurs que les seconds, peut, en rangeant les couples convenablement, être décomposé en cycles simples dont les ordres ont une somme égale à $n$; chaque couple entre dans un seul de ces cycles; enfin la décomposition ne peut s'effectuer que d'une seule manière. Le signe d'un terme du déterminant est $+$ ou $-$, selon que le nombre de cycles simples qui composent la série de couples d'indices qui le caractérisent est, ou non, de même parité que l'ordre du déterminant, ou encore selon que le nombre de cycles d'ordre pair est pair ou impair.

Ces considérations sont, dans le Mémoire de M. Schering, appliquées avec succès aux déterminants symétriques gauches.

Si, en général, on considère un cycle du second ordre, chacun des couples qui le constitue est dit *inverse* de l'autre. Il est clair que, si dans un terme quelconque d'un déterminant on remplace chaque couple d'indices par son inverse, on obtiendra un terme différent ou non, selon que, parmi tous les cycles dans lesquels on peut décomposer la série de couples d'indices qui caractérise ce terme, il y aura, ou non, un cycle au moins d'ordre supérieur au second.

Si maintenant on suppose que le déterminant considéré soit symétrique gauche, d'ordre pair, on voit aisément, au moyen de ce qui précède, que les seuls termes qui ne se détruisent pas dans le développement du déterminant sont ceux où les cycles dans lesquels se décompose la série de couples d'indices sont tous d'ordre pair.

Une dernière considération, celle du partage d'un cycle d'ordre pair en deux *moitiés*, formées, l'une au moyen des couples qui, dans le cycle, occupent un rang impair, l'autre au moyen des couples de rang pair, moitiés qui sont ainsi composées chacune d'éléments tous différents entre eux, identiques, à l'ordre près, aux éléments de l'autre moitié, conduit l'auteur à une formule dans laquelle n'entrent explicitement que les termes où la série de couples d'indices se décompose en cycles d'ordre pair, et lui permet enfin de mettre le déterminant symétrique gauche sous la forme d'un carré parfait. J. T.