BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

# De l’emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série*, tome 3, nº 1 (1879), p. 109-128

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_109_0>

# MÉLANGES.

## DE L'EMPLOI DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DANS LA THÉORIE DU QUADRILATÈRE PLAN;

PAR M. G. DARBOUX.

La théorie des systèmes articulés, qui doit son origine à la belle découverte du colonel Peaucellier, et à laquelle les travaux récents des géomètres anglais ont donné une réelle importance, repose tout entière sur la considération de polygones dont les angles changent, mais dont les côtés conservent des dimensions invariables. On a donc été conduit à considérer les figures géométriques sous un point de vue nouveau et à étudier les relations auxquelles peut donner naissance la déformation d'une figure polygonale dont les différents côtés conservent toujours leur grandeur et peuvent être assimilés à des tiges solides articulées les unes aux autres. Je me propose de traiter, dans ce travail, le plus simple des polygones articulés, le quadrilatère, et de mettre en évidence les ressources que peut offrir la théorie des fonctions elliptiques dans la recherche des propriétés géométriques et des relations entre les angles, les côtés et les diagonales du quadrilatère.

Considérons un quadrilatère, dont nous désignerons les côtés par $a$, $b$, $c$, $d$, et supposons qu'un mobile ait parcouru les différents côtés du quadrilatère en marchant toujours dans le même sens. Appelons $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $\omega_4$ les angles que font les différents côtés, pris dans le sens où ils ont été parcourus par le mobile, avec une droite quelconque du plan. On aura les deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} ae^{i\omega_1}+be^{i\omega_2}+ce^{i\omega_3}+de^{i\omega_4}=0,\\ ae^{-i\omega_1}+be^{-i\omega_2}+ce^{-i\omega_3}+de^{-i\omega_4}=0,\end{cases}$$

qui contiennent la théorie complète du quadrilatère et qui donnent naissance à toutes les relations existant entre les angles des différents côtés. Or, si l'on pose

$$e^{i\omega_1}=t_1,\quad e^{i\omega_2}=t_2,\quad e^{i\omega_3}=t_3,\quad e^{i\omega_4}=t_4,$$

les formules précédentes deviennent

$$(2)\qquad \begin{cases} at_1 + bt_2 + ct_3 + dt_4 = 0, \\ \dfrac{a}{t_1} + \dfrac{b}{t_2} + \dfrac{c}{t_3} + \dfrac{d}{t_4} = 0. \end{cases}$$

Regardons $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace; les équations précédentes représentent alors l'intersection d'un plan et d'une surface cubique, c'est-à-dire une courbe plane du troisième ordre. On voit donc que la théorie du quadrilatère articulé se ramène à celle d'une cubique plane. Comme on sait que les coordonnées d'un point de toute cubique plane peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre $\lambda$ et d'un radical du quatrième ou du troisième degré en $\lambda$, on voit que l'on pourra aussi exprimer de la même manière les lignes trigonométriques des angles que forment les différents côtés du quadrilatère. On pourra aussi, évidemment, exprimer ces lignes trigonométriques au moyen des fonctions elliptiques $\operatorname{sn}\lambda$, $\operatorname{cn}\lambda$, $\operatorname{dn}\lambda$ d'un certain argument $\lambda$. Le présent travail est consacré à la recherche de ces expressions et à l'exposition de quelques conséquences géométriques des formules trouvées.

Avant de commencer cette recherche, nous présenterons quelques remarques très-simples sur les quadrilatères articulés. Nous avons désigné par $a$, $b$, $c$, $d$ les côtés successifs du quadrilatère; mais il est évident qu'avec ces mêmes côtés pris dans un autre ordre, et conservant leur direction et leur sens, on peut former d'autres quadrilatères, et l'on voit bien d'ailleurs que les formules (1) et (2) sont indépendantes de l'ordre de succession des côtés. On aura ainsi six quadrilatères dans lesquels l'ordre de succession des côtés sera indiqué par le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccc} a\ b\ c\ d, & a\ c\ d\ b, & a\ d\ b\ c, \\ a\ d\ c\ b, & a\ b\ d\ c, & a\ c\ b\ d. \end{array}$$

Les quadrilatères définis par les arrangements appartenant à une même ligne verticale seront toujours superposables; on n'obtiendra donc que trois formes réellement distinctes.

Ces trois quadrilatères ont chacun deux diagonales; il est facile de voir que ces six diagonales sont égales deux à deux. En effet, posons

$$(3)\quad \begin{cases} at_1 + bt_2 = (a, b)e^{i\theta_3}, \\ at_1 + ct_3 = (a, c)e^{i\theta_2}, \\ at_2 + ct_3 = (b, c)e^{i\theta_1}, \end{cases}$$

$(a, b)$, $(a, c)$, $(b, c)$ étant les modules et $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ les arguments des premiers membres. On aura le tableau suivant:

| Quadrilatères. | Diagonales. |
|---|---|
| $a\ b\ c\ d$, | $(a, b)\ (b, c)$, |
| $a\ c\ d\ b$, | $(a, c)\ (a, b)$, |
| $a\ d\ b\ c$. | $(b, c)\ (a, c)$. |

Puisque l'ordre de succession des côtés ne joue aucun rôle dans la recherche que nous allons entreprendre, nous pourrons supposer

$$a \geqq b \geqq c \geqq d,$$

et nous poserons, pour abréger les calculs,

$$(4)\quad \begin{cases} q_1 = -a + b + c + d, & p_0 = a + b + c + d, \\ q_2 = \phantom{-}a - b + c + d, & p_{12} = -p_{34} = a + b - c - d, \\ q_3 = \phantom{-}a + b - c + d, & p_{13} = -p_{24} = a + c - b - d, \\ q_4 = \phantom{-}a + b + c - d, & p_{14} = -p_{23} = a + d - b - c. \end{cases}$$

Il est évident que les quantités $q_i$, $p_0$, $p_{12}$, $p_{13}$ sont positives, par suite de l'ordre de grandeur admis pour les côtés. Quant à la quantité $p_{14}$, elle peut être positive, nulle ou négative, et son signe joue un rôle essentiel dans la théorie du quadrilatère. On a deux classes distinctes de quadrilatères correspondantes aux deux signes différents que peut prendre $p_{14}$. Ces deux classes sont en quelque sorte séparées par celle qui correspond au cas exceptionnel où l'on a $p_{14} = 0$. Alors les différents quadrilatères que l'on peut former avec les côtés $a$, $b$, $c$, $d$ sont toujours, quel que soit l'ordre de succession de leurs côtés, circonscriptibles à un cercle. On pourra consulter sur ce sujet l'article que nous avons publié récemment (p. 64 de ce Volume).

C'est seulement dans le cas où $p_{14}$ est nul que la cubique plane liée au quadrilatère a un point double. En effet, les équations qui expriment que cette cubique a un point double, c'est-à-dire que le plan représenté par la première des équations (2) est tangent à la surface cubique représentée par la seconde de ces équations, sont

$$\frac{a}{at_1^2}=\frac{b}{bt_2^2}=\frac{c}{ct_3^2}=\frac{d}{dt_4^2},$$

et elles donnent

$$t_1=\pm t_2=\pm t_3=\pm t_4$$

et par conséquent

$$a\pm b\pm c\pm d=0. \tag{5}$$

Quand les côtés sont inégaux, des huit quantités que l'on obtient en prenant toutes les combinaisons de signes, $q_i$, $p_0$, $p_{12}$, $p_{13}$, $p_{14}$, une seule peut être nulle : c'est $p_{14}$. On a donc

$$a+d-b-c=0.$$

Cette relation caractérise le quadrilatère circonscriptible le plus général. On voit qu'on pourrait aussi l'appeler *unicursal,* puisque, la cubique qui lui est liée ayant un point double, on pourra exprimer les lignes trigonométriques de ses angles en fonction rationnelle d'un seul paramètre. Les coordonnées du point double sont alors

$$t_1=t_4=-t_3=-t_2.$$

Mais il existe des cas plus particuliers encore où la relation (5) peut être satisfaite avec deux combinaisons de signes différentes. Supposons, par exemple, que l'on ait à la fois

$$a+d-b-c=0,\quad a+c-b-d=0,$$

ce qui donne

$$a=b,\quad c=d.$$

On obtiendra un quadrilatère pour lequel la cubique associée aura deux points doubles, c'est-à-dire se décomposera en une droite et une conique. Les deux relations (2) deviendront

$$a(t_1+t_2)+c(t_3+t_4)=0,\quad a\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}+c\frac{t_3+t_4}{t_3t_4}=0,$$

et elles se décomposeront dans les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} t_1+t_2=0,\\ t_3+t_4=0,\end{cases}\qquad \begin{cases} a(t_1+t_2)+c(t_3+t_4)=0,\\ t_1t_2=t_3t_4.\end{cases}$$

Et en effet, si l'on considère, par exemple, le quadrilatère comme formé avec les côtés dans l'ordre de succession suivant *acbd*, les côtés opposés seront égaux, et il sera soit un parallélogramme, soit un contre-parallélogramme. Ces deux cas distincts correspondent aux deux systèmes différents de formules.

Enfin, si les quatre côtés $a$, $b$, $c$, $d$ du quadrilatère sont égaux, la cubique liée au quadrilatère se décompose en trois droites. Le quadrilatère est un losange.

Nous avons donc, en résumé :

1° Le losange $(a, a, a, a)$, pour lequel la cubique se réduit à trois droites;

2° Le parallélogramme, le contre-parallélogramme $(a, b, a, b)$, le quadrilatère qu'on peut appeler *bi-isoscèle* $(a, a, b, b)$, pour lesquels la cubique se décompose en une droite et une conique;

3° Le quadrilatère *unicursal* dont les côtés sont inégaux, pour lequel la cubique a un point double;

4° Enfin, le quadrilatère général ou *elliptique*, pour lequel la cubique associée n'a pas de point double.

Nous avons vu qu'il y a deux espèces de quadrilatères généraux correspondants aux deux signes différents que peut prendre la quantité $p_{14}$. Il est facile de caractériser ces deux classes par une propriété géométrique. Si l'on fixe deux sommets consécutifs A, B d'un quadrilatère articulé ABCD, on obtient un mécanisme qui transforme une rotation de BC autour de B en une rotation de AD autour de A. Si l'on veut que les deux rotations qui se transforment l'une dans l'autre soient continues toutes les deux, on trouve sans peine que AB doit être le plus petit côté du quadrilatère et que l'on doit avoir

$$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}<\mathrm{AC}+\mathrm{BD},\quad \mathrm{AB}+\mathrm{BC}<\mathrm{AD}+\mathrm{DC},\quad \mathrm{AB}+\mathrm{AC}<\mathrm{BD}+\mathrm{DC},$$

ou, d'après nos notations,

$$p_{14}<0.$$

La classe de quadrilatères pour laquelle $p_{14}<0$ est donc la seule qui permette la transformation d'un mouvement circulaire continu en un autre mouvement circulaire continu. En d'autres termes, les angles que font les différents côtés du quadrilatère avec le plus petit d'entre eux peuvent prendre toutes les valeurs possibles. Il n'en est pas de même pour les quadrilatères dans lesquels on a $p_{14} > 0$.

D'autres propriétés géométriques distinguent encore les deux classes. Par exemple, avec quatre côtés $a$, $b$, $c$, $d$ quelconques on peut toujours former un quadrilatère inscriptible convexe; mais on ne pourra former un quadrilatère inscriptible non convexe que si l'on a $p_{14} < 0$.

De même, supposons que l'on cherche à former avec les quatre côtés un quadrilatère dont les diagonales soient parallèles, le problème n'admettra de solution réelle que si l'on a $p_{14} < 0$.

## I.

Le premier moyen d'exprimer les angles du quadrilatère repose sur l'emploi de l'identité suivante, donnée par Jacobi dans le Tome XV du *Journal de Crelle,* page 200 :

$$(6)\ \left\{\begin{array}{l}\operatorname{sn}(w-x)\operatorname{sn}(y-z)+\operatorname{sn}(w-y)\operatorname{sn}(z-x)+\operatorname{sn}(w-z)\operatorname{sn}(x-y)\\ \quad +k^2\operatorname{sn}(w-x)\operatorname{sn}(w-y)\operatorname{sn}(w-z)\operatorname{sn}(y-z)\operatorname{sn}(z-x)\operatorname{sn}(x-y)=0.\end{array}\right.$$

Dans cette identité, changeons $w$ en $w+iK'$, elle deviendra

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\operatorname{sn}(y-z)}{\operatorname{sn}(w-x)}+\dfrac{\operatorname{sn}(z-x)}{\operatorname{sn}(w-y)}+\dfrac{\operatorname{sn}(x-y)}{\operatorname{sn}(w-z)}\\ \qquad +\dfrac{\operatorname{sn}(y-z)\operatorname{sn}(z-x)\operatorname{sn}(x-y)}{\operatorname{sn}(w-x)\operatorname{sn}(w-y)\operatorname{sn}(w-z)}=0.\end{array}\right.$$

Cela posé, considérons un quadrilatère quelconque, et désignons par $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ les angles que font les côtés $a$, $b$, $c$ de ce quadrilatère avec le côté $d$. Si celui-ci a été pris dans un sens convenable, ces angles devront satisfaire aux deux équations

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l}ae^{i\omega_1}+be^{i\omega_2}+ce^{i\omega_3}+d=0,\\ ae^{-i\omega_1}+be^{-i\omega_2}+ce^{-i\omega_3}+d=0.\end{array}\right.$$

Or, si l'on peut déterminer $y-z$, $z-x$, $k$ par les trois équations

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\operatorname{sn}(y-z)}{a}=\dfrac{\operatorname{sn}(z-x)}{b}=\dfrac{\operatorname{sn}(x-y)}{c}\\ \qquad =\dfrac{k\operatorname{sn}(x-y)\operatorname{sn}(y-z)\operatorname{sn}(z-x)}{d},\end{array}\right.$$

les identités (6) et (7) prendront la forme

$$a\,\frac{1}{k\,\mathrm{sn}(w-y)\,\mathrm{sn}(w-z)}+b\,\frac{1}{k\,\mathrm{sn}(w-x)\,\mathrm{sn}(w-z)}$$
$$+c\,\frac{1}{k\,\mathrm{sn}(w-x)\,\mathrm{sn}(w-y)}+d=0,$$

$$ak\,\mathrm{sn}(w-y)\,\mathrm{sn}(w-z)+bk\,\mathrm{sn}(w-x)\,\mathrm{sn}(w-z)$$
$$+ck\,\mathrm{sn}(w-x)\,\mathrm{sn}(w-y)+d=0,$$

et, en les comparant, ainsi écrites, aux équations (8), on voit que l'on pourra poser (¹)

$$(10)\qquad\left\{\begin{aligned} e^{i\omega_1}&=k\,\mathrm{sn}(w-y)\,\mathrm{sn}(w-z),\\ e^{i\omega_2}&=k\,\mathrm{sn}(w-x)\,\mathrm{sn}(w-z),\\ e^{i\omega_3}&=k\,\mathrm{sn}(w-x)\,\mathrm{sn}(w-y),\end{aligned}\right.$$

et ces formules, contenant l'arbitraire $w$, résoudront entièrement la question proposée. Nous allons d'abord discuter le système des équations (9), qui doit nous donner le module et les différences des quantités $x, y, z$.

Posons, pour abréger,

$$(11)\qquad y-z=h_1,\quad z-x=h_2\quad x-y=h_3;$$

on aura

$$(12)\qquad h_1+h_2+h_3=0,$$

$$(13)\quad \mathrm{sn}\,h_1=\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{ad}{bc}},\quad \mathrm{sn}\,h_2=\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{bd}{ac}},\quad \mathrm{sn}\,h_3=\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{cd}{ab}}.$$

La relation entre les sinus amplitudes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de trois arguments dont la somme est nulle est, comme on sait,

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2+4\alpha^2\beta^2\gamma^2(1+k^2)$$
$$+k^4\alpha^4\beta^4\gamma^4-2k^2\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0.$$

Si l'on y remplace $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par les valeurs de $\mathrm{sn}\,h_1$, $\mathrm{sn}\,h_2$, $\mathrm{sn}\,h_3$ tirées des formules (13), on aura

$$(14)\qquad \frac{4(1+k^2)}{k}\,abcd=\mathrm{L},$$

(¹) Le système que l'on obtiendrait en prenant pour $e^{i\omega_1}$, $e^{i\omega_2}$, $e^{i\omega_3}$ les valeurs inverses correspond à un quadrilatère symétrique du premier, et d'ailleurs on l'obtiendra en changeant $w$ en $w+i\mathrm{K}'$.

L désignant, pour abréger, l'expression symétrique

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{L} = {} & 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2c^2d^2 \\ & + 2b^2d^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 - d^4, \end{aligned}\right.$$

à laquelle on peut donner différentes formes, telles que la suivante,

$$(15\ bis)\qquad \mathrm{L} = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

d'où l'on déduit

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{L} + 8abcd &= \quad q_1q_2q_3q_4 = \mathrm{A}, \\ \mathrm{L} - 8abcd &= -p_0p_{12}p_{13}p_{14} = \mathrm{B}. \end{aligned}\right.$$

On voit que B ne sera positif que si l'on a $p_{14} < 0$.

Après avoir défini les quantités A, B, nous déduisons de la formule (14)

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} & 4abcd\frac{(1-k)^2}{k} = \mathrm{B}, \\ & 4abcd\frac{(1+k)^2}{k} = \mathrm{A}, \\ & k = \frac{\sqrt{\mathrm{A}} - \sqrt{\mathrm{B}}}{\sqrt{\mathrm{A}} + \sqrt{\mathrm{B}}} = \frac{16abcd}{(\sqrt{\mathrm{A}} + \sqrt{\mathrm{B}})^2}, \quad k'^2 = \frac{4\sqrt{\mathrm{AB}}}{(\sqrt{\mathrm{A}} + \sqrt{\mathrm{B}})^2}. \end{aligned}\right.$$

On voit que le module ne sera réel que si l'on a $p_{14} < 0$. C'est le cas auquel nous nous attacherons dans ce qui va suivre.

Si dans la formule (15 *bis*) on remplace L par sa valeur tirée de l'équation (14), on a

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 &= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 4\frac{(1+k^2)}{k}abcd \\ &= 4a^2b^2\,\mathrm{cn}^2 h_3\,\mathrm{dn}^2 h_3. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\pm 2ab\,\mathrm{cn}\,h_3\,\mathrm{dn}\,h_3 = a^2 + b^2 - c^2 - d^2,$$

et, en permutant $a$, $b$, $c$, on trouvera deux équations analogues. En déterminant les signes par les conditions

$$\mathrm{sn}(h_1 + h_3) = -\,\mathrm{sn}\,h_2, \quad \mathrm{sn}(h_1 + h_2) = -\,\mathrm{sn}\,h_3,$$

nous sommes conduit au système suivant :

$$(18)\quad\begin{cases}\operatorname{cn}h_1\operatorname{dn}h_1=\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2bc},\\[2mm] \operatorname{cn}h_2\operatorname{dn}h_2=\dfrac{b^2+d^2-a^2-c^2}{2ac},\\[2mm] \operatorname{cn}h_3\operatorname{dn}h_3=\dfrac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2ab},\end{cases}$$

d'où l'on déduit aisément le groupe de relations

$$(19)\quad\begin{cases}2bc(\operatorname{cn}h_1+\operatorname{dn}h_1)=\sqrt{p_{12}p_{13}q_2q_3}, & 2\sqrt{\dfrac{abcd}{k}}(\operatorname{dn}h_1+k\operatorname{cn}h_1)=\sqrt{p_{12}p_{13}q_1q_4},\\[2mm] 2bc(\operatorname{dn}h_1-\operatorname{cn}h_1)=\sqrt{-p_0p_{14}q_1q_4}, & 2\sqrt{\dfrac{abcd}{k}}(\operatorname{dn}h_1-k\operatorname{cn}h_1)=\sqrt{-p_0p_{14}q_2q_3},\\[2mm] 2ac(\operatorname{cn}h_2+\operatorname{dn}h_2)=\sqrt{-p_{12}p_{14}q_1q_3}, & 2\sqrt{\dfrac{abcd}{k}}(\operatorname{dn}h_2+k\operatorname{cn}h_2)=\sqrt{-p_{12}p_{14}q_2q_4},\\[2mm] 2ac(\operatorname{dn}h_2-\operatorname{cn}h_2)=\sqrt{p_0p_{13}q_2q_4}, & 2\sqrt{\dfrac{abcd}{k}}(\operatorname{dn}h_2-k\operatorname{cn}h_2)=\sqrt{p_0p_{13}q_1q_3},\\[2mm] 2ab(\operatorname{cn}h_3+\operatorname{dn}h_3)=\sqrt{-p_{13}p_{14}q_1q_2}, & 2\sqrt{\dfrac{abcd}{k}}(\operatorname{dn}h_3+k\operatorname{cn}h_3)=\sqrt{-p_{13}p_{14}q_3q_4},\\[2mm] 2ab(\operatorname{dn}h_3-\operatorname{cn}h_3)=\sqrt{p_0p_{12}q_3q_4}, & 2\sqrt{\dfrac{abcd}{k}}(\operatorname{dn}h_3-k\operatorname{cn}h_3)=\sqrt{p_0p_{12}q_1q_2}.\end{cases}$$

En prenant positivement tous les radicaux qui entrent dans ces formules, on voit que $\operatorname{dn}h_1$, $\operatorname{dn}h_2$, $\operatorname{dn}h_3$ sont positifs, et, par conséquent, $h_1$, $h_2$, $h_3$ sont des quantités réelles. Voyons entre quelles limites elles sont situées.

Si nous nous reportons aux formules (18), nous voyons que le signe de $\operatorname{cn}h_1$ est le même que celui de $a^2+d^2-b^2-c^2$. Or cette quantité peut être positive, nulle ou négative. Cela établit entre les quadrilatères que nous considérons des différences analogues à celles qui existent entre les triangles acutangles et les triangles obtusangles. Nous voyons donc que pour $h_1$ nous pourrons prendre une valeur qui dans tous les cas sera comprise entre zéro et 2K. Au contraire, il résulte des formules (18) que $\operatorname{cn}h_2$, $\operatorname{cn}h_3$ seront toujours négatifs. Les valeurs correspondantes de $h_2$, $h_3$ pourront donc être prises entre K et 2K.

Si l'on remarque d'ailleurs que les formules (18), (19) permettent de vérifier les relations

$$\operatorname{dn}(h_1+h_2)=\operatorname{dn}h_3,\quad \operatorname{cn}(h_1+h_2)=\operatorname{cn}h_3,$$

nous pourrons conclure que la somme des valeurs de $h_1$, $h_2$, $h_3$ telles que nous venons de les déterminer est égale à $4K$, au lieu d'être égale à zéro; mais cela n'a aucun inconvénient.

Quand le quadrilatère se réduit à un triangle, on a $d=0$ et par conséquent $k=0$. Alors, si A, B, C désignent les angles du triangle opposés aux côtés $a$, $b$, $c$, les valeurs de $h_1$, $h_2$, $h_3$ telles que nous les avons déterminées sont $\pi-A$, $\pi-B$, $\pi-C$, et les formules précédentes se réduisent aux relations bien connues qui contiennent les côtés et les angles d'un triangle. On peut ajouter les suivantes, qui sont la généralisation des formules faisant connaître les lignes trigonométriques des arcs $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ :

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}
\sqrt{\frac{q_1q_4}{bc}}&=\frac{2(1+k)\operatorname{sn}\frac{h_1}{2}}{1+k\operatorname{sn}^2\frac{h_1}{2}}, & \sqrt{\frac{p_{12}p_{13}}{bc}}&=\frac{2\operatorname{cn}\frac{h_1}{2}\operatorname{dn}\frac{h_1}{2}}{1+k\operatorname{sn}^2\frac{h_1}{2}},\\
\sqrt{\frac{q_2q_3}{bc}}&=\frac{2\operatorname{cn}\frac{h_1}{2}\operatorname{dn}\frac{h_1}{2}}{1-k\operatorname{sn}^2\frac{h_1}{2}}, & \sqrt{\frac{-p_0p_{14}}{bc}}&=\frac{2(1-k)\operatorname{sn}\frac{h_1}{2}}{1-k\operatorname{sn}^2\frac{h_1}{2}},\\
\sqrt{\frac{q_2q_4}{ac}}&=\frac{2(1+k)\operatorname{sn}\frac{h_2}{2}}{1+k\operatorname{sn}^2\frac{h_2}{2}}, & \sqrt{\frac{-p_{12}p_{14}}{ac}}&=\frac{2\operatorname{cn}\frac{h_2}{2}\operatorname{dn}\frac{h_2}{2}}{1+k\operatorname{sn}^2\frac{h_2}{2}},\\
\sqrt{\frac{q_1q_3}{ac}}&=\frac{2\operatorname{cn}\frac{h_2}{2}\operatorname{dn}\frac{h_2}{2}}{1-k\operatorname{sn}^2\frac{h_2}{2}}, & \sqrt{\frac{p_0p_{13}}{ac}}&=\frac{2(1-k)\operatorname{sn}\frac{h_2}{2}}{1-k\operatorname{sn}^2\frac{h_2}{2}},\\
\sqrt{\frac{q_3q_4}{ab}}&=\frac{2(1+k)\operatorname{sn}\frac{h_3}{2}}{1+k\operatorname{sn}^2\frac{h_3}{2}}, & \sqrt{\frac{-p_{13}p_{14}}{ab}}&=\frac{2\operatorname{cn}\frac{h_3}{2}\operatorname{dn}\frac{h_3}{2}}{1+k\operatorname{sn}^2\frac{h_3}{2}},\\
\sqrt{\frac{q_1q_2}{ab}}&=\frac{2\operatorname{cn}\frac{h_3}{2}\operatorname{dn}\frac{h_3}{2}}{1-k\operatorname{sn}^2\frac{h_3}{2}}, & \sqrt{\frac{p_0p_{12}}{ab}}&=\frac{2(1-k)\operatorname{sn}\frac{h_3}{2}}{1-k\operatorname{sn}^2\frac{h_3}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on considère le cas limite où le module devient égal à 1 et où l'on a $p_{14} = 0$, $h_2$, $h_3$, étant plus grands que K, deviendront infinis; mais, en remplaçant $h_2$, $h_3$ par

$$\alpha_2 = 2K - h_2, \quad \alpha_3 = 2K - h_3,$$

on reconnaîtra que $\alpha_2$, $\alpha_3$ demeurent finis, et en faisant $k = 1$ toutes les formules obtenues subsisteront ou seront satisfaites d'elles-mêmes.

Après avoir étudié les expressions des côtés et de leurs fonctions au moyen des arguments $h_1$, $h_2$, $h_3$, nous avons à discuter les formules (10), qui font connaître les angles $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$. Remplaçons-y $w$ par $t - \frac{K + iK'}{2}$; il résulte des propriétés du sinus amplitude qu'elles subsisteront quand on y changera $i$ en $-i$; on devra donc y supposer la variable $t$ réelle. On aura ainsi

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{i\omega_1} &= k \operatorname{sn}\left(t - y - \frac{K + iK'}{2}\right) \operatorname{sn}\left(t - z - \frac{K + iK'}{2}\right), \\ e^{i\omega_2} &= k \operatorname{sn}\left(t - x - \frac{K + iK'}{2}\right) \operatorname{sn}\left(t - z - \frac{K + iK'}{2}\right), \\ e^{i\omega_3} &= k \operatorname{sn}\left(t - x - \frac{K + iK'}{2}\right) \operatorname{sn}\left(t - y - \frac{K + iK'}{2}\right), \end{aligned} \right.$$

et, par suite,

$$e^{i(\omega_2 - \omega_3)} = -k \operatorname{sn}\left(t - y - \frac{K + iK'}{2}\right) \operatorname{sn}\left(t - z - \frac{K - iK'}{2}\right)$$

$$e^{i(\omega_3 + \omega_2 - \omega_1)} = k \operatorname{sn}^2\left(t - x - \frac{K + iK'}{2}\right).$$

Employons la formule

$$\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta = \frac{\operatorname{cn}(\alpha - \beta) - \operatorname{cn}(\alpha + \beta)}{\operatorname{dn}(\alpha - \beta) + \operatorname{dn}(\alpha + \beta)},$$

et posons, pour abréger,

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} 2t - y - z &= u, \\ 2t - x - z &= v, \\ 2t - x - y &= w; \end{aligned} \right.$$

on aura

$$(23) \qquad v - w = h_1, \quad w - u = h_2, \quad u - v = h_3,$$

et les formules (21) nous conduiront au système suivant :

$$
(24)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\cos\omega_1 = \frac{k\,\mathrm{cn}\,h_1 - \mathrm{dn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,h_1 - k\,\mathrm{cn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u}, && \cos(\omega_3 - \omega_2) = \frac{\mathrm{cn}\,h_1 - k\,\mathrm{dn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,h_1 - k\,\mathrm{cn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u},\\
&\sin\omega_1 = \frac{k'\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,h_1 - k\,\mathrm{cn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u}, && \sin(\omega_3 - \omega_2) = \frac{-k'\,\mathrm{sn}\,h_1\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,h_1 - k\,\mathrm{cn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u},\\
&\cos\omega_2 = \frac{k\,\mathrm{cn}\,h_2 - \mathrm{dn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{dn}\,h_2 - k\,\mathrm{cn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v}, && \cos(\omega_1 - \omega_3) = \frac{\mathrm{cn}\,h_2 - k\,\mathrm{dn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{dn}\,h_2 - k\,\mathrm{cn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v},\\
&\sin\omega_2 = \frac{k'\,\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{dn}\,h_2 - k\,\mathrm{cn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v}, && \sin(\omega_1 - \omega_3) = \frac{-k'\,\mathrm{sn}\,h_2\,\mathrm{dn}\,v}{\mathrm{dn}\,h_2 - k\,\mathrm{cn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v},\\
&\cos\omega_3 = \frac{k\,\mathrm{cn}\,h_3 - \mathrm{dn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w}{\mathrm{dn}\,h_3 - k\,\mathrm{cn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w}, && \cos(\omega_2 - \omega_1) = \frac{\mathrm{cn}\,h_3 - k\,\mathrm{dn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w}{\mathrm{dn}\,h_3 - k\,\mathrm{cn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w},\\
&\sin\omega_3 = \frac{k'\,\mathrm{cn}\,w}{\mathrm{dn}\,h_3 - k\,\mathrm{cn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w}, && \sin(\omega_2 - \omega_1) = \frac{-k'\,\mathrm{sn}\,h_3\,\mathrm{dn}\,w}{\mathrm{dn}\,h_3 - k\,\mathrm{cn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w},\\
&\cos(\omega_2 + \omega_3 - \omega_1) = \frac{k - \mathrm{sn}(w - h_3)}{1 - k\,\mathrm{sn}(w - h_3)}, && \sin(\omega_2 + \omega_3 - \omega_1) = \frac{k'\,\mathrm{cn}(w - h_3)}{1 - k\,\mathrm{sn}(w - h_3)},\\
&\cos(\omega_3 + \omega_1 - \omega_2) = \frac{k - \mathrm{sn}(u - h_2)}{1 - k\,\mathrm{sn}(u - h_2)}, && \sin(\omega_3 + \omega_1 - \omega_2) = \frac{k'\,\mathrm{cn}(u - h_2)}{1 - k\,\mathrm{sn}(u - h_2)},\\
&\cos(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) = \frac{k - \mathrm{sn}(v - h_1)}{1 - k\,\mathrm{sn}(v - h_1)}, && \sin(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) = \frac{k'\,\mathrm{cn}(v - h_1)}{1 - k\,\mathrm{sn}(v - h_1)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ajoutons à ces formules celles qui donnent la valeur des diagonales,

$$
(25)\quad\left\{
\begin{aligned}
&(b, c)^2 = a^2(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 h_2\,\mathrm{sn}^2 h_3)\,\frac{\mathrm{dn}(h_2 - h_3) - k\,\mathrm{cn}(h_2 - h_3)\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,h_1 - k\,\mathrm{cn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u},\\
&(c, a)^2 = b^2(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 h_1\,\mathrm{sn}^2 h_3)\,\frac{\mathrm{dn}(h_3 - h_1) - k\,\mathrm{cn}(h_3 - h_1)\,\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{dn}\,h_2 - k\,\mathrm{cn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v},\\
&(a, b)^2 = c^2(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 h_1\,\mathrm{sn}^2 h_2)\,\frac{\mathrm{dn}(h_1 - h_2) - k\,\mathrm{cn}(h_1 - h_2)\,\mathrm{sn}\,w}{\mathrm{dn}\,h_3 - k\,\mathrm{cn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w},
\end{aligned}
\right.
$$

et nous aurons une première solution complète de la question proposée.

## II.

Les formules que nous venons de donner relativement aux diagonales conduisent à une conséquence géométrique intéressante que nous allons développer. Considérons un quelconque des trois quadrilatères que l'on peut former avec les côtés, par exemple le quadrilatère $(dcab)$, dont les deux diagonales sont $(a, b)$, $(a, c)$; supposons que, prenant l'un des deux triangles qui forment le quadrilatère, par exemple le triangle formé des côtés $a$, $b$, on le fasse tourner de 180° autour de la diagonale $(a, b)$: on aura une nouvelle position du quadrilatère dans laquelle la diagonale $(a, b)$ aura conservé sa grandeur, mais l'autre diagonale $(a, c)$ aura changé. Opérons maintenant de même autour de $(a, c)$, c'est-à-dire faisons tourner de 180° autour de $(a, c)$ l'un des deux triangles dans lesquels cette diagonale partage le quadrilatère. En répétant indéfiniment ces opérations, on formera une suite illimitée de quadrilatères telle que deux quadrilatères consécutifs aient toujours une diagonale commune. Cela posé, je dis que, si pour une certaine valeur des angles du quadrilatère primitif cette suite illimitée est périodique, c'est-à-dire comprend seulement un nombre limité de formes distinctes, il en sera de même quand on répétera les mêmes opérations sur le quadrilatère initial déformé d'une manière quelconque.

En effet, désignons par $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ les quadrilatères obtenus successivement; appelons $v_n$, $w_n$ les valeurs de $v$, $w$ correspondantes au quadrilatère $Q_n$. On aura

$$(26) \qquad v_n - w_n = h_1.$$

Pour les quadrilatères $Q_1$, $Q_2$, et en général pour les quadrilatères $Q_{2p+1}$, $Q_{2p+2}$, la diagonale $(a, b)$ a la même valeur. On a donc

$$\operatorname{sn} w_{2p+1} = \operatorname{sn} w_{2p+2},$$

et par conséquent, à un multiple près de $4K$, on a

$$(27) \qquad w_{2p+2} = 2K - w_{2p+1}.$$

Au contraire, pour les quadrilatères $Q_2$, $Q_3$, et en général $Q_{2p}$, $Q_{2p+1}$, la diagonale $(a, c)$ a la même valeur. On a donc

$$(28) \qquad \operatorname{sn} v_{2p} = \operatorname{sn} v_{2p+1},$$

ce qui donne

$$v_{2p} + v_{2p+1} = 2K.$$

Les égalités (26), (27), (28) déterminent les valeurs successives de $v$, $w$ données par le Tableau suivant :

| | Quadrilatères | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Q_1$. | $Q_2$. | $Q_3$. | .... | $Q_{2n+1}$. | .... |
| $v$....... | $v_1$ | $2K - w_1 + h_1$ | $v_1 - 2h_1$ | ... | $v_1 - 2nh$ | ... |
| $w$....... | $w_1$ | $2K - w_1$ | $w_1 - 2h_1$ | ... | $w_1 - 2nh$ | ... |

On voit donc que, si $h_1$ est incommensurable avec K, deux quelconques des quadrilatères de rang impair $Q_1$, $Q_3$, .. ne seront jamais égaux, et l'on aura un nombre illimité de formes distinctes.

Au contraire, si l'on a

$$2ph_1 = 4p'K,$$

$p$ et $p'$ étant des entiers, la suite précédente comprendra seulement $2p$ quadrilatères distincts.

Supposons, par exemple, que l'on ait $h_1 = K$, ce qui entraîne l'égalité

$$\operatorname{cn} h_1 = 0,$$

et par conséquent, d'après les formules (18),

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 0;$$

on aura le quadrilatère à diagonales rectangulaires, et il est aisé de reconnaître que de ce quadrilatère, pris dans une de ses positions ABCD, on ne peut déduire par le procédé indiqué que trois nouveaux quadrilatères $ABC_1D$, $ADC_1B_1$, $AB_1CD$.

Toutefois, ce cas particulier pourrait contribuer à donner une fausse notion sur le cas général. Ici, au bout de quatre opérations, on retrouve le quadrilatère primitif, non-seulement en forme, mais en position. Il n'en est pas ainsi généralement. En effet, lorsqu'on passe d'un quadrilatère $Q_1$ au quadrilatère suivant $Q_2$, on peut faire tourner soit le triangle $ab$, soit le triangle $cd$ autour de la diagonale $(a, b)$. Faire tourner le triangle $cd$ revient à faire tourner d'abord le triangle $ab$, ce qui donne le quadrilatère $Q_2$, puis à prendre le symétrique $Q'_2$ de ce quadrilatère par rapport à $(a, b)$. On voit donc que, si en effectuant les opérations d'une manière quelconque on a obtenu une suite de quadrilatères $Q_1$, $Q_2$, $Q_2$, ..., $Q_{2p}$, on pourrait, en les dirigeant autrement, obtenir une suite formée des quadrilatères symétriques des premiers par rapport à la position initiale de $(a, b)$. Ce raisonnement pouvant se répéter pour chacune des diagonales successives des quadrilatères $Q_1, \ldots, Q_{2p}$, on voit que, lorsqu'on aura un certain nombre de positions des quadrilatères, on pourra toujours y joindre celles que l'on obtiendra en prenant les symétriques de tous ces quadrilatères par rapport à une diagonale quelconque de l'un d'eux. Or, étant donnée une figure, si l'on prend ses symétriques par rapport à un certain nombre de droites $\Delta$, on n'obtient un nombre limité de positions nouvelles que si ces droites font entre elles des angles commensurables avec $\pi$. On voit donc que dans le cas actuel, où l'on a un nombre limité de formes pour les quadrilatères, on n'aura un nombre limité de positions que si les diagonales de ces quadrilatères font des angles commensurables. Or, une grandeur continue ne peut être commensurable que si elle est constante, et le seul quadrilatère dont les diagonales fassent un angle constant est le quadrilatère à diagonales rectangulaires (1). On voit donc que ce quadrilatère offre un cas tout à fait exceptionnel dans l'application de la théorie précédente.

Les remarques qui précèdent ont peut-être quelque intérêt en ce qu'elles montrent comment la théorie du quadrilatère, si important, dont les diagonales sont rectangulaires, se rattache aux développements que nous avons présentés.

## III.

Dans l'article I nous avons obtenu, en partant de l'identité de Jacobi, un système de formules donnant les angles et les diagonales du quadrilatère. Nous allons maintenant développer, par une méthode toute différente, d'autres formules plus simples que les premières.

Reprenons l'équation

$$ae^{i\omega_1} + be^{i\omega_2} + ce^{i\omega_3} + d = 0, \tag{29}$$

et, à la place des variables $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, introduisons les suivantes,

---

(1) Le contre-parallélogramme a ses diagonales faisant un angle nul, et par conséquent constant; mais dans la forme associée, le parallélogramme, l'angle des diagonales cesse d'être constant.

$\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, définies par les équations

$$(30)\quad\left\{\begin{array}{ll}\omega_1 = \pi - \varphi_2 - \varphi_3, & \omega_2 - \omega_3 = \varphi_2 - \varphi_3,\\ \omega_2 = \pi - \varphi_1 - \varphi_3, & \omega_3 - \omega_1 = \varphi_3 - \varphi_1,\\ \omega_3 = \pi - \varphi_1 - \varphi_2, & \omega_1 - \omega_2 = \varphi_1 - \varphi_2.\end{array}\right.$$

L'équation (29) se décomposera dans les deux suivantes :

$$a\cos(\varphi_2+\varphi_3) + b\cos(\varphi_1+\varphi_3) + c\cos(\varphi_1+\varphi_2) - d = 0,$$
$$a\sin(\varphi_2+\varphi_3) + b\sin(\varphi_1+\varphi_3) + c\sin(\varphi_1+\varphi_2) \qquad = 0,$$

d'où l'on déduit, en éliminant successivement $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$,

$$(31)\quad\left\{\begin{array}{l}a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(ad+bc)\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + 2(bc-ad)\sin\varphi_2\sin\varphi_3,\\ b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 2(bd+ac)\cos\varphi_1\cos\varphi_3 + 2(ac-bd)\sin\varphi_1\sin\varphi_3,\\ c^2 + d^2 - a^2 - b^2 = 2(cd+ab)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + 2(ab-cd)\sin\varphi_1\sin\varphi_2.\end{array}\right.$$

Posons

$$(32)\quad\left\{\begin{array}{lll}\operatorname{cn}2\mu_1 = \dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}, & \operatorname{dn}2\mu_1 = \dfrac{bc-ad}{bc+ad}, & \operatorname{sn}2\mu_1 = \dfrac{2\sqrt{abcd}}{bc+ad},\\ \operatorname{cn}2\mu_2 = \dfrac{b^2+d^2-a^2-c^2}{2(ac+bd)}, & \operatorname{dn}2\mu_2 = \dfrac{ac-bd}{ac-bd}, & \operatorname{sn}2\mu_2 = \dfrac{2\sqrt{abcd}}{ac+bd},\\ \operatorname{cn}2\mu_3 = \dfrac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(cd+ab)}, & \operatorname{dn}2\mu_3 = \dfrac{ab-cd}{ab+cd}, & \operatorname{sn}2\mu_3 = \dfrac{2\sqrt{abcd}}{ab+cd}.\end{array}\right.$$

Le module sera défini par les équations

$$(33)\qquad \frac{16abcd}{k^2} = \mathrm{A},\quad \frac{16abcdk'^2}{k^2} = \mathrm{B}.$$

Il n'en est donc pas de même que dans le premier système de formules. On déduit des formules (32) les suivantes :

$$(34)\quad\left\{\begin{array}{lll}\operatorname{sn}\mu_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{q_1q_4}{bc}}, & \operatorname{sn}\mu_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{q_2q_4}{ac}}, & \operatorname{sn}\mu_3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{q_3q_4}{ab}},\\ \operatorname{cn}\mu_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{p_{12}p_{13}}{bc}}, & \operatorname{cn}\mu_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-p_{12}p_{14}}{ac}}, & \operatorname{cn}\mu_3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-p_{13}p_{14}}{ab}},\\ \operatorname{dn}\mu_1 = \sqrt{\dfrac{p_{12}p_{13}}{q_2q_3}}, & \operatorname{dn}\mu_2 = \sqrt{\dfrac{-p_{12}p_{14}}{q_1q_3}}, & \operatorname{dn}\mu_3 = \sqrt{\dfrac{-p_{13}p_{14}}{q_1q_2}},\end{array}\right.$$

qui entraînent les relations

$$\operatorname{sn}(\mu_1+\mu_2) = +\operatorname{sn}\mu_3,\quad \operatorname{cn}(\mu_1+\mu_2) = -\operatorname{cn}\mu_3,\quad \operatorname{dn}(\mu_1+\mu_2) = \operatorname{dn}\mu_3,$$

et, par conséquent, on a

$$2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 = 0,$$

à un multiple près des périodes. En prenant pour $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ les valeurs comprises entre zéro et K, on aura

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2K.$$

On peut joindre encore aux formules (34) les suivantes :

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{b-a}{c-d} = \frac{\operatorname{sn}(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{sn}\mu_3}, && \frac{c-a}{b-d} = \frac{\operatorname{sn}(\mu_1-\mu_3)}{\operatorname{sn}\mu_2}, && \frac{b-c}{a-d} = \frac{\operatorname{sn}(\mu_3-\mu_2)}{\operatorname{sn}\mu_1}, \\ &\frac{a+b}{c-d} = \frac{\operatorname{cn}(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{cn}\mu_3}, && \frac{a+c}{b-d} = \frac{\operatorname{cn}(\mu_1-\mu_3)}{\operatorname{cn}\mu_2}, && \frac{b+c}{a-d} = \frac{\operatorname{cn}(\mu_3-\mu_2)}{\operatorname{cn}\mu_1}, \\ &\frac{c+d}{c-d} = \frac{\operatorname{dn}(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{dn}\mu_3}, && \frac{b+d}{b-d} = \frac{\operatorname{dn}(\mu_1-\mu_3)}{\operatorname{dn}\mu_2}, && \frac{a+d}{a-d} = \frac{\operatorname{dn}(\mu_3-\mu_2)}{\operatorname{dn}\mu_1}. \end{aligned}\right.$$

Dans ce qui va suivre, nous supposerons que les signes des radicaux dans les formules (34) aient été choisis de telle manière que l'on ait exactement

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$

Les valeurs de $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ étant ainsi définies, les équations (31) prennent la forme

$$\begin{aligned} \operatorname{cn} 2\mu_1 &= \cos\varphi_3 \cos\varphi_2 + \operatorname{dn} 2\mu_1 \sin\varphi_3 \sin\varphi_2, \\ \operatorname{cn} 2\mu_2 &= \cos\varphi_1 \cos\varphi_3 + \operatorname{dn} 2\mu_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_3, \\ \operatorname{cn} 2\mu_3 &= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \operatorname{dn} 2\mu_3 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2, \end{aligned}$$

et leur solution générale s'obtient en posant

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi_1 = \operatorname{am} u_1, && \varphi_2 = \operatorname{am} u_2, && \varphi_3 = \operatorname{am} u_3, \\ &u_3 - u_2 = 2\mu_1, && u_1 - u_3 = 2\mu_2, && u_2 - u_1 = 2\mu_3. \end{aligned}\right.$$

On aura donc, pour les angles du quadrilatère, les valeurs

$$\begin{aligned} \pi - \omega_1 &= \operatorname{am} u_2 + \operatorname{am} u_3, \\ \pi - \omega_2 &= \operatorname{am} u_1 + \operatorname{am} u_3, \\ \pi - \omega_3 &= \operatorname{am} u_1 + \operatorname{am} u_2, \end{aligned}$$

et, si l'on pose

$$u_1 + u_2 = 2\theta_3, \quad u_3 + u_2 = 2\theta_1, \quad u_1 + u_3 = 2\theta_2,$$

ce qui donne

$$(37)\qquad \theta_2 - \theta_3 = \mu_1, \quad \theta_1 - \theta_2 = \mu_3, \quad \theta_3 - \theta_1 = \mu_2,$$

on aura, d'après les formules connues,

$$(38)\left\{\begin{aligned}
\cos\omega_1 &= \frac{\operatorname{sn}^2\theta_1 \operatorname{dn}^2\mu_1 - \operatorname{cn}^2\theta_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\theta_1 \operatorname{sn}^2\mu_1}, & \cos(\omega_2-\omega_3) &= \frac{\operatorname{cn}^2\mu_1 - \operatorname{dn}^2\theta_1 \operatorname{sn}^2\mu_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\theta_1 \operatorname{sn}^2\mu_1},\\
\sin\omega_1 &= \frac{2 \operatorname{sn}\theta_1 \operatorname{cn}\theta_1 \operatorname{dn}\mu_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\theta_1 \operatorname{sn}^2\mu_1}, & \sin(\omega_2-\omega_3) &= \frac{2 \operatorname{sn}\mu_1 \operatorname{cn}\mu_1 \operatorname{dn}\theta_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\theta_1 \operatorname{sn}^2\mu_1},\\
\cos\omega_2 &= \frac{\operatorname{sn}^2\theta_2 \operatorname{dn}^2\mu_2 - \operatorname{cn}^2\theta_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\theta_2 \operatorname{sn}^2\mu_2}, & \cos(\omega_3-\omega_1) &= \frac{\operatorname{cn}^2\mu_2 - \operatorname{dn}^2\theta_2 \operatorname{sn}^2\mu_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\theta_2 \operatorname{sn}^2\omega_2},\\
\sin\omega_2 &= \frac{2 \operatorname{sn}\theta_2 \operatorname{cn}\theta_2 \operatorname{dn}\mu_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\theta_2 \operatorname{sn}^2\mu_2}, & \sin(\omega_3-\omega_1) &= \frac{2 \operatorname{sn}\mu_2 \operatorname{cn}\mu_2 \operatorname{dn}\theta_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\theta_2 \operatorname{sn}^2\mu_2},\\
\cos\omega_3 &= \frac{\operatorname{sn}^2\theta_3 \operatorname{dn}^2\mu_3 - \operatorname{cn}^2\theta_3}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\theta_3 \operatorname{sn}^2\mu_3}, & \cos(\omega_1-\omega_2) &= \frac{\operatorname{cn}^2\mu_3 - \operatorname{dn}^2\theta_3 \operatorname{sn}^2\mu_3}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\theta_3 \operatorname{sn}^2\mu_3},\\
\sin\omega_3 &= \frac{2 \operatorname{sn}\theta_3 \operatorname{cn}\theta_3 \operatorname{dn}\mu_3}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\theta_3 \operatorname{sn}^2\mu_3}, & \sin(\omega_1-\omega_2) &= \frac{2 \operatorname{sn}\mu_3 \operatorname{cn}\mu_3 \operatorname{dn}\theta_3}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\theta_3 \operatorname{sn}^2\mu_3},
\end{aligned}\right.$$

ou, en prenant les tangentes des demi-angles,

$$(39)\left\{\begin{aligned}
\cot\frac{\omega_1}{2} &= \frac{\operatorname{sn}\theta_1 \operatorname{dn}\mu_1}{\operatorname{cn}\theta_1}, & \operatorname{tang}\frac{\omega_2-\omega_3}{2} &= \frac{\operatorname{sn}\mu_1 \operatorname{dn}\theta_1}{\operatorname{cn}\mu_1},\\
\cot\frac{\omega_2}{2} &= \frac{\operatorname{sn}\theta_2 \operatorname{dn}\mu_2}{\operatorname{cn}\theta_2}, & \operatorname{tang}\frac{\omega_3-\omega_1}{2} &= \frac{\operatorname{sn}\mu_2 \operatorname{dn}\theta_2}{\operatorname{cn}\mu_2},\\
\cot\frac{\omega_3}{2} &= \frac{\operatorname{sn}\theta_2 \operatorname{dn}\mu_3}{\operatorname{cn}\theta_3}, & \operatorname{tang}\frac{\omega_1-\omega_2}{2} &= \frac{\operatorname{sn}\mu_3 \operatorname{dn}\theta_3}{\operatorname{cn}\mu_3}.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules paraissent plus simples que celles de l'article I. On passe de l'un des systèmes à l'autre par une transformation de Landen.

Les diagonales seront données par les expressions

$$\begin{aligned}
(b,c)^2 &= (a-d)^2\,\frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\mu_2-\mu_3)\operatorname{sn}^2\theta_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\mu_1 \operatorname{sn}^2\theta_1},\\
(a,c)^2 &= (b-d)^2\,\frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\mu_1-\mu_3)\operatorname{sn}^2\theta_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\mu_2 \operatorname{sn}^2\theta_2},\\
(a,b)^2 &= (c-d)^2\,\frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\mu_1-\mu_2)\operatorname{sn}^2\theta_3}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\mu_3 \operatorname{sn}^2\theta_3}.
\end{aligned}$$

Avec les formules de ce second système on passera très-facilement du cas traité, où $p_{11} < 0$, à celui où l'on a $p_{11} > 0$ : il suffira d'employer la transformation qui change le module $k$ en $\frac{1}{k}$.

## IV.

Enfin, on peut traiter cette théorie à un autre point de vue et chercher les expressions des angles en fonction d'un paramètre $\lambda$ et d'un radical du troisième ou du quatrième degré en $\lambda$, c'est-à-dire résoudre la question suivante :

*Étant donnée la courbe du troisième degré définie par les équations*

$$(40)\qquad \begin{cases} at + bt' + ct'' + dt''' = 0, \\ \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t'} + \dfrac{c}{t''} + \dfrac{d}{t'''} = 0, \end{cases}$$

*exprimer en fonction d'un paramètre $\lambda$ les rapports mutuels de $t$, $t'$, $t''$, $t'''$.*

Nous suivrons pour cela la méthode de Clebsch, c'est-à-dire que nous couperons la cubique par une conique variable, assujettie à contenir quatre points fixes de la cubique.

Nous considérerons le faisceau de coniques satisfaisant à cette condition et représenté par l'équation

$$(41)\qquad t''t''' = \lambda tt'.$$

Elles coupent la cubique aux quatre points fixes

$$(t = 0,\ t'' = 0),\ (t' = 0,\ t''' = 0),$$
$$(t' = 0,\ t'' = 0),\ (t = 0,\ t''' = 0),$$

et en deux points variables qui seront déterminés par les équations

$$at + bt' + ct'' + dt''' = 0,$$
$$\lambda(bt + at') + ct''' + dt'' = 0,$$
$$t''t''' = \lambda tt'.$$

En résolvant ces équations, ce qui ne présente aucune difficulté, on est conduit à l'un des quatre systèmes suivants :

$$Q = 4abcd(\lambda + \lambda^3) - L\lambda^2,$$

$$(41)\qquad \begin{cases} \rho t = 2(bd - \lambda ac)(bc - \lambda ad), \\ \rho t' = -2(1 + \lambda^2)abcd + \lambda(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ \qquad\quad - \lambda(c^2 - d^2)^2 - (c^2 - d^2)\sqrt{Q}, \\ \rho t'' = \lambda(bc - \lambda ad)(c^2 + a^2 - b^2 - d^2) + (bc - \lambda ad)\sqrt{Q}, \\ \rho t''' = \lambda(bd - \lambda ac)(a^2 + d^2 - b^2 - c^2) - (bd - \lambda ac)\sqrt{Q}, \end{cases}$$

$$(42)\quad\left\{\begin{aligned}
\rho t &= -2(1+\lambda^2)abcd + \lambda(a^2+b^2)(c^2+d^2)\\
&\qquad -\lambda(c^2-d^2)^2 + (c^2-d^2)\sqrt{Q},\\
\rho t' &= 2(ad-\lambda bc)(ac-\lambda bd),\\
\rho t'' &= \lambda(ac-\lambda bd)(c^2+b^2-a^2-d^2) - (ac-\lambda bd)\sqrt{Q},\\
\rho t''' &= \lambda(ad-\lambda bc)(b^2+d^2-a^2-c^2) + (ad-\lambda bc)\sqrt{Q},
\end{aligned}\right.$$

$$(43)\quad\left\{\begin{aligned}
\rho t &= \lambda(bc-\lambda ad)(c^2+a^2-b^2-d^2) - (bc-\lambda ad)\sqrt{Q},\\
\rho t' &= \lambda(ac-\lambda bd)(c^2+b^2-a^2-d^2) + (ac-\lambda bd)\sqrt{Q},\\
\rho t'' &= -2\lambda(ac-\lambda bd)(cb-\lambda ad),\\
\rho t''' &= (2\lambda+2\lambda^3)abcd - (a^2+b^2)(c^2+d^2)\lambda^2\\
&\qquad + (a^2-b^2)^2\lambda^2 + \lambda(b^2-a^2)\sqrt{Q},
\end{aligned}\right.$$

$$(44)\quad\left\{\begin{aligned}
\rho t &= \lambda(bd-\lambda ac)(d^2+a^2-b^2-c^2) + (bd-\lambda ac)\sqrt{Q},\\
\rho t' &= \lambda(ad-\lambda bc)(b^2+d^2-a^2-c^2) - (ad-\lambda bc)\sqrt{Q},\\
\rho t'' &= (2\lambda+2\lambda^3)abcd - (a^2+b^2)(c^2+d^2)\lambda^2\\
&\qquad + \lambda^2(a^2-b^2)^2 - \lambda(b^2-a^2)\sqrt{Q},\\
\rho t''' &= -2\lambda(ad-\lambda bc)(bd-\lambda ac),
\end{aligned}\right.$$

formules où $\rho$ désigne le facteur de proportionnalité qui indique que les rapports seuls de $t$, $t'$, $t''$, $t'''$ sont déterminés.

Pour que les formules s'appliquent à des angles réels, il suffira de remarquer que, le module de $\lambda$ étant l'unité, on doit poser

$$\lambda = e^{2i\varphi}.$$

On aura alors

$$\sqrt{Q} = e^{2i\varphi}\sqrt{A\sin^2\varphi - B\cos^2\varphi},$$

A et B étant les quantités définies par les formules (16).

On voit que, si la théorie du quadrilatère se ramène à celle d'une courbe du troisième degré, le mouvement réel que peut prendre le quadrilatère articulé correspond au déplacement d'un point sur une branche imaginaire de la courbe.

J'ajouterai, en terminant, que, toute courbe du troisième degré pouvant être représentée et d'une infinité de manières par deux équations de la forme (40), tous nos systèmes de formules sont applicables par cela même à la courbe générale du troisième degré.