BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 97-100
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_97_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PÉRIGAUD, astronome-adjoint à l'Observatoire de Paris. — EXPOSÉ DE LA MÉTHODE DE HANSEN POUR LE CALCUL DES PERTURBATIONS SPÉCIALES DES PETITES PLANÈTES. — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris; 1877.

La détermination analytique des perturbations d'une planète ou d'une comète étant toujours très-laborieuse, les astronomes ont dû chercher des méthodes abrégées pour calculer numériquement et de proche en proche les valeurs de ces perturbations. Hansen, dans un Mémoire très-important inséré parmi ceux de la Société Royale des Sciences de Saxe, et dont l'objet principal est la détermination analytique des perturbations, a consacré quelques pages au problème moins étendu que nous venons de signaler, et a donné une méthode nouvelle pour le résoudre. Dans une Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, M. Périgaud a fait de cette méthode une exposition d'ensemble, et l'a éclaircie en l'appliquant aux perturbations produites par Jupiter et par Saturne dans le mouvement de la planète Eugénie.

La méthode de la variation des constantes arbitraires permet de représenter les coordonnées d'une planète par rapport à des axes fixes, et leurs dérivées par rapport au temps, par les mêmes fonctions du temps et des éléments dans le mouvement troublé que dans le mouvement elliptique. Hansen a remarqué que l'on peut choisir des axes mobiles jouissant des mêmes propriétés. Il a nommé les coordonnées relatives à ces axes mobiles *coordonnées idéales;* et comme il y a une infinité de systèmes de coordonnées idéales, il assujettit le plan mobile des XY à passer constamment par le rayon vecteur mené du Soleil à la planète troublée. Il peut encore disposer de l'axe OX dans le plan XOY, au moins à l'origine du temps, et il en profite pour rendre égales deux des constantes initiales.

La position des axes mobiles par rapport aux axes fixes dépend de l'angle θ que fait avec Ox la trace de XY sur xy, de l'angle σ que cette trace fait avec OX, et de l'angle i des plans XOY, et xOy. En partant des équations différentielles bien connues du mouvement de la planète troublée, et tenant compte de ce que les coordonnées mobiles sont idéales, on obtient facilement les équations différentielles suivantes :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2r}{dt^2}-r\frac{dv^2}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{1}{r^2}=k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial r},\\
&r^2\frac{d^2v}{dt^2}+2r\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dt}=k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial v},\\
&\frac{di}{dt}=\lambda r\cos(v-\sigma)\frac{\partial\Omega}{\partial Z},\\
&\frac{d\sigma}{dt}=\lambda\cot i r\sin(v-\sigma)\frac{\partial\Omega}{\partial Z},\\
&\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{\cos i}\frac{d\sigma}{dt},
\end{aligned}\right.$$

où r désigne le rayon vecteur de la planète troublée, v l'angle qu'il fait avec OX, Ω la fonction perturbatrice, et λ une fonction simple du paramètre de l'orbite. L'exposition de ces formules et de la théorie générale des coordonnées idéales fait l'objet du § I^{er} de la thèse de M. Périgaud; on trouve à la fin du paragraphe une démonstration des mêmes formules indiquée à l'auteur par M. Briot et fondée sur les principes de la Mécanique.

Bien que la conception des coordonnées idéales soit essentielle dans la méthode de Hansen, elle n'offrirait que bien peu d'avantages si elle n'était combinée avec la suivante : au lieu d'introduire dans les formules les valeurs variables des éléments, Hansen s'efforce d'y introduire leurs valeurs initiales, ou des valeurs moyennes. En supposant qu'on ait tiré des équations (1) pour un instant quelconque les valeurs de r, v, i, σ, θ, on trouverait la longitude l et la latitude b de la planète par rapport aux axes fixes au moyen des équations

$$\begin{aligned}
\cos b\cos(l-\theta)&=\cos(v-\sigma),\\
\cos b\sin(l-\theta)&=\cos i\sin(v-\sigma),\\
\sin b&=\sin i\sin(v-\sigma).
\end{aligned}$$

Hansen réussit à écrire ces équations comme il suit :

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\cos b\cos(l-\theta_0-\Gamma)=\cos(v-\theta_0)+\frac{sp}{\varkappa},\\
&\cos b\sin(l-\theta_0-\Gamma)=\cos i_0\sin(v-\theta_0)-s\left(\tang i_0+\frac{q}{\varkappa\cos i_0}\right),\\
&\sin b=\sin i_0\sin(v-\theta_0)+s,
\end{aligned}\right.$$

où i_0 et θ_0 désignent les valeurs initiales ou moyennes de i et θ; Γ, p, q et $\varkappa$ des fonctions des éléments variables de la planète, s une fonction très-petite de v, i et θ; les quantités s, p et q étant de l'ordre des forces perturbatrices, et Γ de l'ordre de leurs carrés.

Hansen avait démontré ces formules au moyen des exponentielles imaginaires; M. Périgaud en a donné une démonstration géométrique (¹).

Partant de là, on abandonne les équations (1) et l'on en forme d'autres comme il va être expliqué.

Pour obtenir pour un instant quelconque les valeurs de r et v, il suffit d'employer les formules du mouvement elliptique, mais en y regardant les éléments comme fonctions du temps. Hansen se propose de mettre en évidence, dans ces formules comme dans les formules (2), des éléments constants, et il y parvient en les disposant ainsi :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \eta - e_0 \sin\eta &= \frac{k(\zeta - T)\sqrt{1+m}}{a_0^{\frac{3}{2}}}, \\ \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} &= \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}}\operatorname{tang}\frac{\eta}{2}, \\ v &= \varphi + \varpi_0, \\ \rho &= \frac{p_0}{1 + e_0\cos\varphi}, \\ r &= \rho(1+\nu), \end{aligned} \right.$$

r et v étant toujours les coordonnées polaires idéales, et ζ, η, φ et ρ désignant non plus le temps, l'anomalie excentrique, l'anomalie vraie et le rayon vecteur, mais des quantités voisines ; ν est très-petit.

On forme assez facilement les équations différentielles qui font connaître ν, ζ et $u = rs$; ces équations, qu'il serait inutile de reproduire ici, donnent $\frac{d^2\nu}{dt^2}$, $\frac{d\delta\zeta}{dt}$ et $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\delta\zeta$ étant égal à $\zeta - t$.

Il suffit de calculer les valeurs des seconds membres de ces équations pour une série d'époques équidistantes et en employant les

(¹) Ces mêmes formules ont été démontrées géométriquement par M. L. Dupuy en 1874 (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. X, p. 11 et suiv.). (*Note de la rédaction.*)

valeurs initiales ou moyennes des éléments pour en conclure par la méthode des quadratures mécaniques les valeurs de ν, $\delta\zeta$, u, pour ces diverses époques. De $\delta\zeta$ on conclut ζ, et, par suite, η, φ, ν. Ayant obtenu ν, on aura b et l au moyen des formules (2), dans lesquelles Γ, ps et qs sont ordinairement négligeables. On aura aussi

$$r = \rho(1 + \nu),$$

et, enfin, on calculera les coordonnées rectangulaires x, y, z ainsi :

$$x = r \cos b \cos l,$$
$$y = r \cos b \sin l,$$
$$z = r \sin b.$$

L'application faite par M. Périgaud montre nettement la marche à suivre; il n'y a de dérivée un peu longue à calculer que celle de ν; celles de u et de $\delta\zeta$ s'obtiennent rapidement. De plus, les quantités ν, u, $\delta\zeta$ sont beaucoup moindres que les variations des coordonnées rectangulaires que l'on détermine par les méthodes anciennes.

B. B.