Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

G. Darboux

Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 60-96

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_60_1>

MÉLANGES.

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ;

Par M. G. DARBOUX.

Toute équation différentielle du premier ordre établit une relation entre un point quelconque de l'une des courbes satisfaisant à cette équation et la tangente en ce point. Dans son Mémoire sur les connexes, Clebsch a, le premier, écrit cette relation en utilisant les coordonnées homogènes, employées déjà avec tant de succès en Géométrie analytique et en Algèbre supérieure. Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées homogènes ou trilinéaires d'un point, et par u, v, w celles d'une droite, toute équation de la forme

$$(1)\qquad \varphi(u, v, w \mid x, y, z) = 0,$$

qui sera homogène séparément par rapport aux deux systèmes de variables x, y, z et u, v, w, pourra être considérée comme une équation différentielle, si l'on ajoute à la relation précédente : 1° la condition que la droite (u, v, w) passe par le point (x, y, z), condition qui s'exprime par l'équation

$$(2)\qquad ux + vy + wz = 0;$$

2° la condition que la droite (u, v, w) soit la tangente à la courbe définie par l'équation au point (x, y, z). Cette deuxième condition s'exprime par la relation

$$(3)\qquad u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0.$$

On peut remarquer que, si l'on différentie l'équation (2) en tenant compte de l'équation (3), on aura

$$(4)\qquad x\,du + y\,dv + z\,dw = 0,$$

et cette nouvelle équation, conséquence des deux précédentes, ne contiendra, comme elles, que les différentielles du premier ordre.

Au moyen des formules (2), (3), (4), on peut donner deux formes différentes à l'équation différentielle (1). Des relations (2) et (3) on tire

$$(5)\qquad \frac{u}{y\,dz - z\,dy} = \frac{v}{z\,dx - x\,dz} = \frac{w}{x\,dy - y\,dx},$$

et, en remplaçant dans l'équation (1) u, v, w par les quantités qui leur sont proportionnelles, on obtiendra la première forme

$$(6)\qquad \varphi(y\,dz - z\,dy,\ z\,dx - x\,dz,\ x\,dy - y\,dx \mid x, y, z) = 0,$$

que l'on peut donner à l'équation proposée, et où figurent seulement les coordonnées ponctuelles x, y, z et leurs différentielles. Il suffira d'y faire $z = 1$, $dz = 0$, pour retrouver la forme habituelle

$$F(dx, dy \mid x, y) = 0,$$

où F est homogène par rapport à dx, dy, et est d'ailleurs une fonction quelconque de x, y.

Mais on déduit encore des équations (2) et (4) les suivantes :

$$(7)\qquad \frac{x}{v\,dw - w\,dv} = \frac{y}{w\,du - u\,dw} = \frac{z}{u\,dv - v\,du},$$

qui permettent de faire disparaître x, y, z de l'équation (1) et d'écrire cette équation sous la forme

$$(8)\qquad \varphi(u, v, w \mid v\,dw - w\,dv,\ w\,du - u\,dw,\ u\,dv - v\,du) = 0,$$

qui contient seulement les coordonnées de la tangente et leurs différentielles.

Si, au lieu de traiter u, v, w comme des coordonnées tangentielles, on voulait les considérer comme définissant un point, cette seconde équation, au lieu de définir les mêmes courbes que l'équation (6), conviendrait aux polaires réciproques de ces courbes par rapport à la conique dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

La double forme de l'équation différentielle est donc la traduction analytique de ce fait important, signalé par M. Chasles dans l'*Aperçu historique* pour le cas plus général des équations aux dérivées partielles, que, si des courbes satisfont à une équation différentielle du premier ordre, il en est de même de leurs polaires réciproques.

Nous ne nous occuperons dans ce Mémoire que des équations différentielles qui sont du premier degré par rapport à u, v, w, et qu'on peut mettre par conséquent sous la forme

$$Lu + Mv + Nw = 0,$$

ou

$$(a)\qquad L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) + N(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

L, M, N désignant des fonctions homogènes de x, y, z, nécessairement du même ordre. Nous ne traiterons que des équations algébriques, et nous pourrons, par conséquent, admettre que L, M, N sont des polynômes homogènes d'un même degré, que nous désignerons par m.

La première remarque à faire relativement à cette équation, c'est que, sans changer la relation entre les six quantités x, y, z, dx, dy, dz, on peut donner à L, M, N une infinité de valeurs. En effet, si l'on remplace L, M, N par $L + Ax$, $M + Ay$, $N + Az$, A désignant un polynôme quelconque d'ordre $m-1$, on verra sans peine que, dans l'équation (a), tous les termes qui contiennent A ont une somme nulle, et que, par conséquent, l'équation n'est pas changée.

Parmi toutes les formes différentes que, en vertu de la remarque précédente, on peut donner à l'équation proposée, on peut en distinguer une, que l'on pourrait appeler la *forme normale*, et qui est caractérisée par la propriété suivante :

Pour cette forme on a identiquement

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0.$$

Voyons d'abord comment on pourra l'obtenir. Si l'on pose

$$\begin{aligned} L_1 &= L + Ax, \\ M_1 &= M + Ay, \\ N_1 &= N + Az, \end{aligned}$$

A désignant toujours un polynôme d'ordre $m-1$, l'équation (a) pourra s'écrire

$$(9)\qquad L_1(y\,dz - z\,dy) + M_1(z\,dx - x\,dz) + N_1(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

et l'on trouvera

$$\frac{\partial L_1}{\partial x}+\frac{\partial M_1}{\partial y}+\frac{\partial N_1}{\partial z}=\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}+(m+2)A;$$

on pourra donc toujours déterminer A de telle manière que le premier membre de l'équation précédente soit nul. Il suffira de choisir pour A le polynôme défini par l'équation

$$(10)\qquad (m+2)A = -\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}.$$

On voit que la forme précédente existe toujours et est unique.

Nous emploierons peu cette forme normale de l'équation différentielle; au contraire, nous aurons souvent à considérer la fonction qui figure dans le second membre de l'équation précédente; aussi la désignerons-nous par une seule lettre, *toujours la même*, H, et nous poserons

$$(11)\qquad H = \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}.$$

Nous verrons que H est un invariant; la forme normale pour laquelle on a $H = 0$ se conservera donc à travers toutes les transformations.

Au nombre des formes différentes qu'on peut donner à l'équation différentielle, on peut encore signaler les suivantes : supposons que dans L, par exemple, on isole tous les termes qui contiennent x, en sorte que L s'écrive

$$L = l + l'x,$$

l étant une fonction homogène de y et de z seulement. En prenant pour A la valeur $-l'$, la nouvelle valeur L_1 de L, définie par les formules (8), ne contiendra plus que y, z. On pourra de même choisir A de telle manière que M ne contienne que x, z, ou que N ne contienne que x, y.

Le nombre des paramètres arbitraires qui figurent dans l'équation différentielle, et qui était en apparence de

$$3\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1,$$

sera ainsi réduit à

$$m^2 + 4m + 2.$$

En particulier, si l'un des polynômes L, M, N est divisible par la variable qui lui correspond, par exemple, si L est divisible par x, alors, en prenant pour A dans les équations (8) le quotient entier $\frac{-L}{x}$, la valeur nouvelle L_1 de L sera nulle, et l'équation deviendra

$$M_1(z\,dx - x\,dz) + N_1(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

et sous cette forme on aperçoit immédiatement la solution particulière

$$x = 0.$$

Cette remarque peut être rattachée à une autre de même nature, faite par M. Zeuthen, sur les équations différentielles algébriques écrites sous la forme ordinaire.

Considérons l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{f_1(x,y)}, \tag{12}$$

où f, f_1 sont des polynômes du $m^{\text{ième}}$ ordre. Si l'on veut écrire cette équation avec les coordonnées homogènes, il faudra y remplacer x, y par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, ce qui donnera

$$\varphi(x, y, z)\,(z\,dx - x\,dz) + \varphi_1(x, y, z)\,(y\,dz - z\,dy) = 0,$$

φ, φ_1 étant des polynômes homogènes d'ordre m. On voit que l'équation admettra la solution particulière

$$z = 0,$$

c'est-à-dire la droite de l'infini. Toutefois, cette solution pourra disparaître ou plutôt être mise en facteur, si les polynômes φ, φ_1 sont tels que

$$y\varphi_1 - x\varphi$$

soit divisible par z; et si l'on supprime alors le facteur z, on obtiendra une nouvelle équation, qui n'admettra plus nécessairement la solution $z = 0$.

C'est ce qui arrive, notamment si l'équation a été écrite sous la forme adoptée par M. Fouret,

$$\text{(13)} \qquad L\frac{dy}{dx} - M + N\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0,$$

où L, M, N sont des polynômes d'un même degré. Si dans cette équation on remplace x, y par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, on retrouvera précisément l'équation (a) qui nous a servi de point de départ.

Toutes ces remarques préliminaires n'ont rien d'essentiellement nouveau; mais il nous a paru utile de les faire, afin de bien établir dans l'esprit du lecteur le lien qui existe entre les diverses formes de l'équation différentielle : la forme ordinaire, représentée par l'équation (12), celle de M. Fouret par l'équation (13), et celle de Clebsch par l'équation (a). Mais il est essentiel de remarquer que ces formes ne sont pas les seules que l'on rencontre dans les applications. Bien plus, elles ne se présentent pas d'une manière évidente quand on forme une équation différentielle par l'élimination d'une constante entre une équation et sa dérivée.

En effet, considérons l'équation d'un système de courbes

$$\text{(14)} \qquad f(x, y, z) = C,$$

où f est une fonction homogène de degré zéro, et C la constante arbitraire, l'élimination de cette constante se fait sans difficulté par la différentiation, et l'on obtient ainsi l'équation différentielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

Supposons qu'il y ait un facteur commun à supprimer, des dénominateurs à faire disparaître pour ramener l'équation à la forme entière; si $\frac{1}{\lambda}$ désigne le multiplicateur qu'il faut employer pour effectuer toutes ces opérations et ramener l'équation à la forme entière

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \tag{15}$$

on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda Q, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda R. \tag{16}$$

La forme (15) ne ressemble pas à celles que nous avons obtenues; mais les polynômes P, Q, R ne sont pas quelconques, et sont, comme nous allons le reconnaître, assujettis à vérifier une relation.

En effet, $f(x, y, z)$ étant, par hypothèse, une fonction homogène de degré zéro, on aura identiquement

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

ou, en se servant des équations (16),

$$Px + Qy + Rz = 0. \tag{17}$$

Ainsi l'on peut dire que l'élimination d'une constante arbitraire conduit à une équation différentielle de la forme (15), mais où P, Q, R sont des polynômes entiers liés par la relation (17).

La forme (a) que nous avons adoptée rentre bien dans le type précédent; car si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} P &= Mz - Ny, \\ Q &= Nx - Lz, \\ R &= Ly - Mx, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

elle prend la forme (15); et d'ailleurs les valeurs P, Q, R satisfont bien à l'identité (17).

Mais on peut établir la réciproque et prouver que *toute équation de la forme*

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

où P, Q, R *sont des polynômes liés par l'équation identique*

$$Px + Qy + Rz = 0,$$

peut être ramenée à la forme (a).

En effet, en vertu de l'identité précédente, P s'annule avec y, z, et, par conséquent, tous ses termes contiennent y ou z. On peut donc poser

$$P = C'y + Bz,$$

C' et B étant des polynômes de degré inférieur d'une unité à celui de P, et de même

$$Q = C''z + B'x,$$
$$R = Cx + B''y,$$

et l'identité à vérifier deviendra

$$(C' + B')xy + (C + B)xz + (C'' + B'')yz = 0,$$

ce qui exige que $C' + B'$ soient divisibles par z, $C + B$ par y, et $C'' + B''$ par x. On aura donc

$$C' + B' = A''z,$$
$$C + B = A'y,$$
$$C'' + B'' = Ax,$$

avec la condition

$$A + A' + A'' = 0.$$

Comme on peut tirer de cette équation A'' en fonction de A, A', on sera facilement conduit aux valeurs les plus générales de P, Q, R pouvant satisfaire à l'identité

$$Px + Qy + Rz = 0,$$

et l'on verra facilement que ces valeurs sont, aux notations près, celles qui sont fournies par les formules (18).

Notre travail sera divisé en deux Parties. Dans la première nous exposerons quelques théorèmes relatifs au multiplicateur, aux solutions particulières algébriques et à l'usage qu'on peut en faire, aux points singuliers et au changement de variables. Dans la seconde, nous ferons une application particulière des propositions générales au cas où L, M, N sont des polynômes du second degré.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Du multiplicateur de l'équation différentielle.

Pour intégrer l'équation différentielle

$$(a)\qquad L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) + N(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

on peut chercher un facteur μ qui rende l'expression

$$(19)\qquad \mu[L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) + N(x\,dy - y\,dx)]$$

la différentielle exacte d'une fonction homogène de degré zéro. Alors on aura l'intégrale générale en égalant cette fonction à une constante. Si m désigne, suivant nos conventions, le degré commun des polynômes L, M, N, le facteur μ devra être une fonction homogène de degré $-m-2$ et satisfaire par conséquent à l'équation

$$(20)\qquad x\frac{\partial\mu}{\partial x} + y\frac{\partial\mu}{\partial y} + z\frac{\partial\mu}{\partial z} + (m+2)\mu = 0.$$

En tenant compte de cette relation, les trois conditions d'intégrabilité de la différentielle (19) se réduisent à une seule, qui est

$$(21)\qquad L\frac{\partial\mu}{\partial x} + M\frac{\partial\mu}{\partial y} + N\frac{\partial\mu}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0.$$

Cette équation, très-symétrique, où le coefficient de μ est l'invariant que nous avons désigné par H, suffira à déterminer complétement le multiplicateur cherché.

On sait que l'intégration de cette équation aux dérivées partielles se ramène à celle du système d'équations différentielles ordinaires

$$(22)\qquad \frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N} = -\frac{d\mu}{\mu H}.$$

En remarquant que l'équation obtenue en égalant le dernier rapport à l'un des premiers servira à déterminer μ au moyen d'une quadrature, on peut se borner à considérer le système

$$(23)\qquad \frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N}.$$

Je vais montrer directement que *l'intégration de l'équation proposée et celle du système* (23) *sont deux problèmes équivalents.*

Supposons, en effet, que l'on substitue aux variables x, y les suivantes :

$$\alpha = \frac{x}{z},\quad \beta = \frac{y}{z}.$$

Posons

$$L = L_1 z^m,\quad M = M_1 z^m,\quad N = N_1 z^m;$$

L_1, M_1, N_1 ne dépendront plus que de α, β. L'équation différentielle proposée deviendra

$$(24)\qquad -L_1 d\beta + M_1 d\alpha + N_1(\alpha d\beta - \beta d\alpha) = 0,$$

et le système (23)

$$\frac{\alpha\, dz + z\, d\alpha}{L_1} = \frac{\beta\, dz + z\, d\beta}{M_1} = \frac{dz}{N_1},$$

ce qu'on peut écrire

$$(25)\qquad \frac{d\alpha}{L_1 - N_1\alpha} = \frac{d\beta}{M_1 - N_1\beta} = \frac{dz}{zN_1}.$$

L'équation qu'on obtient en égalant les deux premiers rapports est précisément l'équation (24). Si donc on sait intégrer cette équation, c'est-à-dire la proposée, on aura β en fonction de α et, pour achever l'intégration du système (25), il restera à effectuer la quadrature

$$\log z = \int \frac{N_1\, d\alpha}{L_1 - N_1\alpha},$$

qui fera connaître z.

Supposons, au contraire, que l'on sache intégrer le système (23) ou son équivalent (25). Celle des deux intégrales qui contient seulement α, β, c'est-à-dire qui est *homogène et de degré zéro en* x, y, z, sera précisément l'intégrale de l'équation proposée. Du reste, si l'on a les deux intégrales de ce système, il sera très-facile d'en déduire l'intégrale homogène de degré zéro. Ces deux intégrales f, φ étant nécessairement homogènes, si n et n' sont leurs degrés, $f^{n'}\varphi^{-n}$ sera l'intégrale de degré zéro.

La remarque précédente a déjà été faite depuis longtemps pour le cas de l'équation de Jacobi où L, M, N sont des polynômes du premier degré. Dans ce cas, en introduisant la variable auxiliaire t, les équations du système (23) peuvent s'écrire

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{L}, \quad \frac{dy}{dt} = \mathrm{M}, \quad \frac{dz}{dt} = \mathrm{N},$$

et deviennent linéaires. Les intégrales de ces équations sont de la forme

$$\mathrm{X} = \mathrm{C}e^{\alpha t}, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{C}_1 e^{\beta t} \quad \mathrm{Z} = \mathrm{C}_2 e^{\gamma t},$$

X, Y, Z désignant trois fonctions linéaires homogènes de x, y, z et $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3$ trois constantes arbitraires. On en déduit que

$$\mathrm{X}^{\beta-\gamma} \quad \mathrm{Y}^{\gamma-\alpha} \quad \mathrm{Z}^{\alpha-\beta} = \text{const.}$$

est une intégrale du système (23) et, comme cette intégrale est homogène et de degré zéro, elle convient également à l'équation proposée.

Dans le cas où L, M, N sont de degré supérieur au premier, les équations

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{L}, \quad \frac{dy}{dt} = \mathrm{M}, \quad \frac{dz}{dt} = \mathrm{N} \tag{26}$$

cessent d'être linéaires. Leur intégration constitue un problème qui n'a pas encore été abordé dans toute sa généralité, bien que l'on rencontre des systèmes de cette forme dans l'étude de différents problèmes. D'après notre analyse, la solution de ce problème est équivalente à l'intégration de l'équation proposée (a). Tous les résultats acquis dans l'étude de l'une de ces deux questions profiteront, par conséquent, à la solution de l'autre.

II.

Des solutions particulières algébriques.

Revenons à l'équation proposée (a) et cherchons la condition pour qu'elle admette une intégrale particulière définie par l'équation

$$f(x, y, z) = 0, \tag{27}$$

que nous pouvons supposer être indécomposable.

En différentiant l'équation précédente, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

et l'on a aussi, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{28}$$

On déduit des deux dernières équations les suivantes :

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{y\,dz - z\,dy} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{z\,dx - x\,dz} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{x\,dy - y\,dx}, \tag{29}$$

et, par suite, si l'on remplace dans l'équation différentielle les binômes $y\,dz - z\,dy, \ldots$ par les quantités proportionnelles $\frac{\partial f}{\partial x}, \ldots,$ on aura

$$L \frac{\partial f}{\partial x} + M \frac{\partial f}{\partial y} + N \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Mais il importe de remarquer que cette équation n'est pas nécessairement une identité. En effet, si l'on considère l'équation (27) comme représentant une courbe, l'équation (28) n'aura lieu qu'en tous les points de cette courbe. Il suffira donc que l'équation précédente ait lieu seulement pour tous les points de la courbe, c'est-à-dire que le premier membre soit divisible par f et que l'on ait identiquement

$$L \frac{\partial f}{\partial x} + M \frac{\partial f}{\partial y} + N \frac{\partial f}{\partial z} = Kf.$$

K désignant un polynôme qui sera nécessairement de l'ordre $m-1$, inférieur d'une unité à celui de L, M, N.

Pour abréger, je désignerai par la lettre Δ l'opération

$$\Delta = L\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y} + N\frac{\partial}{\partial z},$$

que nous aurons souvent à considérer. L'équation précédente pourra donc s'écrire

$$(30)\qquad \Delta f = Kf.$$

En exprimant que les deux membres sont égaux, terme pour terme, on aura les équations de condition qui expriment que f est une solution particulière.

Considérons, par exemple, l'équation de Jacobi pour laquelle L, M, N sont des polynômes du premier degré

$$\begin{aligned} L &= Ax + B''y + C'z, \\ M &= C''x + A'y + Bz, \\ N &= B'x + Cy + A''z. \end{aligned}$$

Si l'on veut trouver les droites satisfaisant à cette équation, on aura, en écrivant l'équation d'une droite sous la forme

$$ux + vy + wz = 0,$$

à exprimer que l'on a

$$Lu + Mv + Nw = S(ux + vy + wz),$$

S étant une constante. On obtiendra ainsi les trois équations

$$\begin{aligned} Au + C''v + B'w &= Su, \\ B''u + A'v + Cw &= Sv, \\ C'u + Bv + A''w &= Sw, \end{aligned}$$

qui, par l'élimination de u, v, w, conduiront à une équation du troisième degré pour S. Il y aura donc trois droites qui donneront des solutions particulières de l'équation de Jacobi.

Pour abréger, nous dirons souvent dans la suite qu'une courbe est une solution ou intégrale particulière de l'équation proposée, lorsque l'équation de cette courbe donne une solution particulière de l'équation.

Si, l'équation différentielle étant donnée, on veut exprimer que

$$f = 0,$$

est une solution particulière, on ne peut supposer nul le polynôme K, sans restreindre la généralité ; au contraire, si l'on veut trouver les équations différentielles qui admettent une solution donnée, il importe de remarquer que, p étant le degré de f, l'équation (30) pourra s'écrire

$$\left(\mathrm{L}-\mathrm{K}\frac{x}{p}\right)\frac{\partial f}{\partial z}+\left(\mathrm{M}-\mathrm{K}\frac{y}{p}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\mathrm{N}-\mathrm{K}\frac{z}{p}\right)\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Or, si l'on pose

$$\mathrm{L}_1=\mathrm{L}-\mathrm{K}\frac{x}{p},$$

$$\mathrm{M}_1=\mathrm{M}-\mathrm{K}\frac{y}{p},$$

$$\mathrm{N}_1=\mathrm{N}-\mathrm{K}\frac{z}{p},$$

et si l'on remarque que K est de l'ordre $m-1$, on voit que $\mathrm{L}_1, \mathrm{M}_1, \mathrm{N}_1$ sont des polynômes que l'on peut substituer à L, M, N sans changer l'équation différentielle. Si donc il s'agit d'exprimer qu'une équation différentielle, dont les coefficients sont inconnus, admet une première solution f, on pourra chercher à déterminer L, M, N, de telle manière que l'équation

$$\mathrm{L}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{M}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathrm{N}\frac{\partial f}{\partial z}=0 \tag{31}$$

ait lieu identiquement. Mais, si l'on a ensuite à exprimer que la même équation admet une seconde solution, on ne pourra plus supposer nul le polynôme K relatif à cette nouvelle solution. Avant de continuer ces recherches, nous allons donner un théorème général sur la manière de satisfaire à des équations semblables à l'équation (31).

III.

Sur l'identité $\mathrm{AA}'+\mathrm{BB}'+\mathrm{CC}'=0$.

Considérons six polynômes homogènes en x, y, z, satisfaisant à l'identité

$$\mathrm{AA}'+\mathrm{BB}'+\mathrm{CC}'=0. \tag{32}$$

Je dis que, si les trois équations

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

n'ont aucune solution commune, c'est-à-dire si les trois courbes représentées par ces équations n'ont aucun point commun, on aura

$$(33) \qquad \begin{cases} A' = NB - MC, \\ B' = LC - NA, \\ C' = MA - NB, \end{cases}$$

L, M, N étant des polynômes convenablement choisis.

Pour démontrer cette proposition dans toute sa généralité, je m'appuierai sur un théorème de M. Noether, dont M. Halphen a donné une démonstration nouvelle (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. V, p. 160) et qu'on peut énoncer comme il suit :

Étant donnés trois polynômes f, φ, ψ, fonctions de x, y, pour que l'on ait

$$f = A\varphi + B\psi,$$

A *et* B *étant des polynômes convenablement choisis, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :*

Soit $x = \alpha$, $y = \beta$ un quelconque des systèmes de solutions des équations

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0;$$

il faudra que, a et b désignant des séries ordonnées suivant les puissances de $x - \alpha$, $y - \beta$, on puisse déterminer les coefficients de ces séries de telle manière que l'on ait

$$f = a\varphi + b\psi.$$

Ces conditions seront d'ailleurs suffisantes pourvu qu'elles soient remplies pour tous les systèmes de solutions communes des équations

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0.$$

Ce théorème étant admis, il est facile d'en faire l'application. L'identité (32) nous donne

$$C' = -\frac{A'}{C} A - \frac{B'}{C} B.$$

Or faisons pour un instant $z = 1$. Pour chaque système de solutions $x = \alpha$, $y = \beta$, des équations $A = 0$, $B = 0$, C n'est pas nul, par hypothèse. Les quotients $-\frac{A'}{C} - \frac{B'}{C}$ sont donc développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances de $x - \alpha$, $y - \beta$. Les conditions exigées par le théorème précédent sont donc évidemment remplies et par conséquent C' est de la forme

$$C' = M'A + NB,$$

où M', N sont des polynômes. On verra de même que A', B' sont des formes suivantes :

$$A' = M''B + N'C,$$
$$B' = MC + N''A.$$

Écrivons maintenant que l'identité (32) est satisfaite et nous aurons l'équation

$$(M + N)BC + (M' + N')AC + (M'' + N'')AB = 0,$$

à laquelle devront satisfaire les six polynômes M, N, ...

D'ailleurs, A, B, C sont premiers entre eux deux à deux, puisque les équations

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

n'ont, par hypothèse, aucune solution commune; par conséquent, A, devant, d'après l'identité précédente, diviser $(M + N)BC$, divisera $M + N$, et l'on aura

$$M + N = KA,$$

et de même

$$M' + N' = K'B,$$
$$M'' + N'' = K''C,$$

K, K', K'' étant des polynômes qui devront satisfaire à l'identité

$$K + K' + K'' = 0.$$

Or trois polynômes satisfaisant à cette identité peuvent toujours être représentés par les formules symétriques

$$K = S' - S'',$$
$$K' = S'' - S,$$
$$K'' = S - S'.$$

Il suffirait, par exemple, de faire $S'' = 0$, $S = -K'$, $S' = K$, pour retrouver l'identité précédente. On aura donc

$$\begin{aligned} M + N &= A(S' - S''), \\ M' + N' &= B(S'' - S), \\ M'' + N'' &= C(S - S'), \end{aligned}$$

et, si l'on pose

$$\begin{aligned} M - AS' &= -N - AS'' = U, \\ M' - BS'' &= -N' - BS = V, \\ M'' - CS &= -N'' - CS' = W, \end{aligned}$$

les formules qui donnent A', B', C' prendront la forme

$$\begin{aligned} A' &= BW - CV, \\ B' &= CU - AW, \\ C' &= AV - BU, \end{aligned}$$

qui est, aux notations près, celle qu'il s'agissait d'établir.

La proposition précédente peut être utile dans différentes recherches. Dans tous les cas, elle a une application évidente dans la question qui nous occupe. Supposons que l'on cherche la condition pour que l'équation différentielle que nous étudions (a) admette comme solution particulière une courbe représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

et n'ayant pas de point multiple; on devra avoir, avec des valeurs convenablement choisies de L, M, N,

$$L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Les trois équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

n'ayant pas de solutions communes, on aura, en vertu du lemme démontré précédemment,

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} L &= W\frac{\partial f}{\partial y} - V\frac{\partial f}{\partial z}, \\ M &= U\frac{\partial f}{\partial z} - W\frac{\partial f}{\partial x}, \\ N &= V\frac{\partial f}{\partial x} - U\frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned} \right.$$

ou, si l'on demande les valeurs les plus générales de L, M, N convenant à l'équation,

$$(35)\quad \begin{cases} L = Ax + W\dfrac{\partial f}{\partial y} - V\dfrac{\partial f}{\partial z}, \\ M = Ay + U\dfrac{\partial f}{\partial z} - W\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ N = Az + V\dfrac{\partial f}{\partial x} - U\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

Quant à l'équation, si on veut l'écrire sous une des formes que nous avons proposées,

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

on trouvera

$$(36)\quad \begin{cases} P = \alpha U f - \dfrac{\partial f}{\partial x}(Ux + Vy + Wz), \\ Q = \alpha V f - \dfrac{\partial f}{\partial y}(Ux + Vy + Wz), \\ R = \alpha W f - \dfrac{\partial f}{\partial z}(Ux + Vy + Wz), \end{cases}$$

α étant le degré de f, et par conséquent l'équation pourra s'écrire

$$(37)\quad \alpha f(U\,dx + V\,dy + W\,dz) - (Ux + Vy + Wz)\,df = 0,$$

la solution $f = 0$ étant ainsi mise en évidence.

J'ajouterai enfin que l'invariant H aura pour valeur, si l'on adopte les formules (35),

$$(38)\quad H = 4A + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right).$$

IV.

De l'emploi des solutions particulières algébriques pour la détermination de l'intégrale générale.

Après avoir indiqué comment on recherchera des solutions particulières *algébriques* de l'équation proposée, nous allons montrer comment on pourra déterminer l'intégrale générale toutes les fois qu'on aura un nombre suffisant de ces solutions.

Il est clair que si l'on a une fonction homogène de degré zéro, satisfaisant à l'équation

$$\Delta\varphi = 0,$$

on aura l'intégrale de l'équation proposée en égalant cette fonction à une constante. Cette proposition, conséquence des théorèmes de l'article I, peut aussi se démontrer directement. En effet, on a, par hypothèse,

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

$$L\frac{\partial\varphi}{\partial x} + M\frac{\partial\varphi}{\partial y} + N\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{Ny - Mz} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{Lz - Mx} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{Mx - Ny}.$$

Si donc on remplace, dans l'équation proposée

$$(Ny - Mz)\,dx + (Lz - Mx)\,dy + (Mx - Ny)\,dz = 0,$$

les dénominateurs des rapports précédents par les numérateurs qui leur sont proportionnels, l'équation deviendra

$$d\varphi = 0,$$

d'où l'on conclura

$$\varphi = C.$$

Ce point étant admis, supposons que l'on connaisse p solutions particulières algébriques de l'équation différentielle proposée $u_1, u_2, \ldots, u_p$; ces solutions donnent naissance à des équations identiques

$$(39) \qquad \Delta u_1 = K_1 u_1, \quad \Delta u_2 = K_2 u_2, \quad \ldots, \quad \Delta u_p = K_p u_p,$$

où $K_1, K_2, \ldots, K_p$ seront des polynômes du degré $m - 1$.

Parmi les propriétés du symbole Δ, on peut remarquer la suivante :

$$(40) \qquad \Delta\varphi(u, v, w, \ldots) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\Delta w + \ldots.$$

En faisant une application particulière de cette formule, on aura

$$\Delta(u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}) = (\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p)\, u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant des exposants constants. Si donc on peut disposer de ces exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de telle manière que l'on ait

$$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p = 0, \tag{41}$$

et aussi, $h_1, h_2, \ldots, h_p$ désignant les degrés de $u_1, u_2, \ldots, u_p$,

$$h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \ldots + h_p\alpha_p = 0, \tag{42}$$

$u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p}$ sera une fonction homogène de degré zéro, satisfaisant à l'équation

$$\Delta\varphi = 0.$$

L'intégrale générale sera donc

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p} = C.$$

Or les polynômes K sont du degré $m - 1$, et ils contiennent, en général, $\frac{m(m+1)}{2}$ termes. L'équation (41) équivaut donc à $\frac{m(m+1)}{2}$ équations du premier degré entre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Dans le cas le plus défavorable, il y aura donc, en tenant compte de l'équation (42), à satisfaire à $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ équations, et, comme elles sont homogènes, on devra avoir au moins $\frac{m(m+1)}{2} + 2$ inconnues α_i. Comme des équations homogènes ne sont jamais impossibles, on aura donc le théorème suivant, qui n'est sujet à aucune exception :

Si l'on connaît $\frac{m(m+1)}{2} + 2 = q$ *solutions particulières algébriques de l'équation différentielle proposée* $u_1, u_2, \ldots, u_q$, *l'intégrale générale de cette équation pourra toujours s'obtenir, et sera de la forme*

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_q^{\alpha_q} = C.$$

Nous verrons, dans les applications, que la méthode réussit le plus souvent sans qu'on ait à connaître un aussi grand nombre de solutions particulières, et la théorie des points singuliers de l'équation nous expliquera pourquoi il en est ainsi.

Le théoreme précédent, appliqué à l'équation de Jacobi, conduit de la manière la plus simple à l'intégrale de cette équation.

Nous avons vu que cette équation admettait trois droites comme solutions particulières; soient

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

les équations de ces droites : on aura des identités

$$\Delta X = SX, \quad \Delta Y = S'Y, \quad \Delta Z = S''Z,$$

où S, S′, S″ seront des constantes. On en déduira

$$\Delta\left(X^{S''-S'} Y^{S'-S''} Z^{S'-S}\right) = 0,$$

et par conséquent l'intégrale sera

$$X^{S''-S'} Y^{S-S''} Z^{S'-S} = C,$$

ce qui est le résultat connu.

Mais on peut indiquer un autre usage des solutions particulières. Reprenons l'identité

$$\Delta\left(u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}\right) = (\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p) u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}.$$

Si l'on peut déterminer les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de manière à satisfaire aux deux équations

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p = -\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} = -H, \\ &h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + \ldots + h_p \alpha_p = -m - 2, \end{aligned} \right.$$

on aura

$$\Delta\left(u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}\right) + H u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p} = 0,$$

et, par conséquent, la fonction $u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p}$, étant du degré $-m-2$ que doit avoir le multiplicateur, et satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles qui le définit, sera une valeur particulière de ce multiplicateur. L'intégration se trouvera ainsi ramenée aux quadratures.

Les équations (43) équivalent à $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ équations du premier degré. On a donc le théorème suivant :

Toutes les fois que l'on connaîtra $\frac{m(m+1)}{2} + 1 = q - 1$ solutions particulières algébriques de l'équation différentielle proposée

$u_1, u_2, \ldots, u_q - 1$, *on pourra en déduire une valeur particulière du multiplicateur, qui sera de la forme*

$$\mu = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_{q-1}^{\alpha_{q-1}}.$$

A la vérité, ce théorème paraît sujet à une exception; car, si le déterminant des équations à résoudre était nul, on pourrait craindre que ces équations fussent impossibles. Mais alors celles qu'on obtient en supprimant dans les équations (43) les seconds membres H et $-(m+2)$ deviennent des équations homogènes en nombre égal à celui des inconnues, et dont le déterminant est nul. Il est donc possible de satisfaire aux équations

$$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_{q-1} K_{q-1} = 0,$$
$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \ldots + \alpha_{q-1} h_{q-1} = 0;$$

c'est-à-dire que l'on peut appliquer notre premier théorème, et obtenir l'intégrale générale sous la forme

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_{q-1}^{\alpha_{q-1}} = C.$$

Ainsi, dans le cas d'exception du second théorème, on est conduit d'une manière plus rapide à l'intégrale cherchée.

Nous venons de reconnaître comment, au moyen d'un certain nombre de solutions particulières algébriques, on peut former le multiplicateur de l'équation différentielle proposée. Réciproquement, supposons que ce multiplicateur μ soit de la forme

$$\mu = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_p^{\alpha_p},$$

$f_1, f_2, \ldots, f_p$ étant des polynômes algébriques, et les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des nombres quelconques positifs ou négatifs réels ou imaginaires. En écrivant que l'équation aux dérivées partielles du multiplicateur est satisfaite par la valeur précédente, on aura une équation que l'on peut écrire

$$\alpha_1 \frac{\Delta f_1}{f_1} + \alpha_2 \frac{\Delta f_2}{f_2} + \ldots + \alpha_p \frac{\Delta f_p}{f_p} + H = 0.$$

On peut d'ailleurs supposer que $f_1, f_2, \ldots, f_p$ soient indécomposables; s'il en était autrement, il suffirait de les remplacer dans l'expression de μ par les facteurs dont ils sont composés. L'équation précédente ne pourra donc avoir lieu que si f_i divise Δf_i. Il faudra donc que l'on ait

$$\Delta f_1 = K_1 f_1, \ \ldots, \ \Delta f_p = K_p f_p,$$

$K_1, \ldots, K_p$ étant des polynômes, qui d'ailleurs devront satisfaire à l'équation

$$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p + H = 0.$$

On obtient donc le théorème suivant :

Si le multiplicateur de l'équation différentielle proposée est un produit de plusieurs facteurs rationnels élevés chacun à une puissance quelconque, chacun de ces facteurs, égalé à zéro, donnera une solution particulière de l'équation proposée.

Les théorèmes précédents nous conduisent donc naturellement à une nouvelle méthode d'intégration des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. Étant donnée une équation à intégrer, on en cherchera différentes solutions particulières algébriques, et, au moyen de ces solutions, on formera le facteur ou l'intégrale générale toutes les fois que cela sera possible, en employant les théorèmes que nous venons de faire connaître. C'est cette méthode que nous appliquerons, dans la seconde Partie de ce travail, à l'équation la plus simple après celle de Jacobi, celle pour laquelle les polynômes L, M, N sont du second degré. Mais, avant d'aborder cette application et pour la faciliter, nous allons étudier un groupe de points remarquables que nous appellerons les *points singuliers*, et qui sont ceux pour lesquels la direction de la tangente donnée par l'équation différentielle est indéterminée.

V.

Des points singuliers de l'équation différentielle.

Reprenons l'équation différentielle

$$(44) \qquad L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) + N(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

ou

$$(45) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Il y a toujours des points du plan pour lesquels on a

$$(46)\qquad \begin{cases} P = Mz - Ny = 0, \\ Q = Nx - Lz = 0, \\ R = Ly - Mx = 0; \end{cases}$$

car les équations précédentes peuvent s'écrire

$$(47)\qquad \frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z},$$

et équivalent à deux seulement. Pour de tels points, l'équation (45) sera identiquement satisfaite, et la direction de la tangente ne sera plus déterminée par l'équation différentielle. Ainsi :

En tous les points du plan pour lesquels on a

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

l'équation différentielle ne fait pas connaître la direction de la tangente.

Cherchons, en premier lieu, quel sera le nombre de ces points singuliers. On peut rattacher cette recherche à un lemme relatif à six polynômes A, A′, B, B′, C, C′, de degrés l, l', m, m', n, n', satisfaisant à l'identité déjà considérée

$$(48)\qquad AA' + BB' + CC' = 0;$$

il est évident que les degrés des produits AA′, BB′, CC′ sont égaux. On a donc déjà

$$l + l' = m + m' = n + n' = \lambda.$$

Cela posé, je dis que *la somme du nombre des points communs aux trois courbes*

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

et du nombre des points communs aux trois courbes

$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 0,$$

est égale à

$$\frac{lmn + l'm'n'}{\lambda}.$$

En effet, soient h le nombre des points communs aux trois courbes A, B, C ; h' celui des points communs aux trois courbes A′, B′, C′. Tous les points communs à A et à B, au nombre de lm, appartiennent, d'après l'identité (48), à l'une des courbes C, C′. Il y en a h appartenant à C, par hypothèse. Il restera donc $ml - h$ points communs aux trois courbes A, B, C′. D'ailleurs les ln' points communs aux deux courbes A, C′ appartiennent, d'après l'identité, à l'une des courbes B, B′; comme il y en a $ml - h$ appartenant à B, il restera $ln' - lm + h$ points communs aux trois courbes A, B′, C′. Enfin les $m'n'$ points communs aux courbes B′ C′ appartiennent à l'une des courbes A, A′. Comme il y en a $ln' - lm + h$ appartenant à A, il en restera

$$m'n' - ln' + lm - h = h'$$

appartenant à A′, B′, C′. On a donc

$$h + h' = m'n' - ln' + lm,$$

et, en transformant le second membre, on trouvera facilement qu'il est égal à

$$h + h' = \frac{lmn + l'm'n'}{\lambda},$$

comme nous l'avions annoncé.

Appliquons cette proposition générale aux trois équations de degré $m + 1$

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

qui définissent les points singuliers. On a l'identité

$$Px + Qy + Rz = 0.$$

Si donc on considère, d'une part, les courbes P, Q, R, d'autre part, les droites x, y, z, ces droites n'auront aucun point commun, et le lemme précédent nous donnera, pour le nombre des points communs aux trois courbes P, Q, R, la formule

$$\frac{(m+1)^3 + 1}{m+2} = m^2 + m + 1.$$

Tel est le nombre des points singuliers de l'équation pour laquelle L, M, N sont du $m^{\text{ième}}$ degré.

On peut faire quelques remarques utiles au sujet de la disposition de ces points singuliers. D'abord, il ne peut pas y en avoir plus de $m+1$ en ligne droite. En effet, les équations (46), qui définissent les points singuliers, étant du degré $m+1$, s'il y avait plus de $m+1$ points en ligne droite, P, Q, R contiendraient en facteur le premier membre de l'équation de la droite qui passe par ces points singuliers, et, après la suppression de ce facteur, l'équation serait ramenée à une autre où les polynômes P, Q, R seraient de degré moindre. Or on peut toujours supposer que l'on a supprimé les facteurs communs à P, Q, R.

Je dis maintenant que, s'il y a $m+1$ points singuliers en ligne droite, cette droite sera une solution particulière de l'équation différentielle. En effet, supposons qu'on ait choisi les axes de telle manière que la droite qui contient $m+1$ points singuliers ait pour équation

$$x=0.$$

Les équations (46) nous montrent que les points singuliers situés sur cette droite doivent satisfaire aux équations

$$Ly=0, \quad Lz=0,$$

et, par conséquent, y et z n'étant pas nuls simultanément, à l'équation unique

$$L=0.$$

L étant du degré m, cela ne peut arriver que si L contient x en facteur, et nous avons vu qu'alors

$$x=0$$

est une solution de l'équation proposée.

Réciproquement, on reconnaîtra que, si une droite est solution particulière, elle contient $m+1$ points singuliers.

Par exemple, dans le cas où L, M, N sont du second degré, toutes les fois que trois des sept points singuliers sont en ligne droite, cette droite donne une solution particulière; et réciproquement, toutes les fois qu'une droite fournira une solution, elle contiendra trois, et seulement trois points singuliers.

Je dis maintenant que $(m+1)p$ des points singuliers ne peuvent jamais être sur une courbe indécomposable C_p de degré p, toutes les fois que p sera supérieur à 1. En effet, admettons que cette condition soit remplie, et qu'il y ait $p(m+1)$ points sur une courbe représentée par l'équation

$$C_p = 0.$$

Je considère les courbes représentées par l'équation

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0,$$

où α, β, γ sont des constantes, c'est-à-dire les courbes du réseau défini par les points singuliers. Si l'on fait passer ces courbes par un nouveau point de la courbe C_p, elles auront en commun avec elle $(m+1)p+1$ points, et, par conséquent, elles contiendront la courbe C_p tout entière. Il y aura donc deux courbes distinctes du réseau dont les équations seront

$$C_p U = 0, \quad C_p V = 0.$$

En adjoignant à ces deux courbes une troisième courbe quelconque du réseau P', on pourra poser

$$\begin{aligned} P &= aP' + bUC_p + cVC_p, \\ Q &= a'P' + b'UC_p + c'VC_p, \\ R &= a''P' + b''UC_p + c''VC_p, \end{aligned}$$

et, en écrivant que l'identité

$$Px + Qy + Rz = 0$$

est satisfaite, on aura l'équation

$$P'(ax + a'y + a''z) + C_p[U(bx + b'y + b''z) + V(cx + c'y + c''z)] = 0.$$

C_p devra donc diviser le premier terme, et comme p est, par hypothèse, supérieur à 1, C_p divisera P'. Alors P, Q, R seront divisibles par C_p et l'équation différentielle se ramènera à une autre de degré moindre par la suppression de ce facteur.

Supposons que l'on connaisse une solution particulière d'ordre p de l'équation différentielle proposée. Cette solution f donnera naissance à l'identité

$$L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z} = Kf,$$

que l'on peut aussi écrire

$$(49)\quad \left(L-\frac{Kx}{p}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(M-\frac{Ky}{p}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(N-\frac{Kz}{p}\right)\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

D'ailleurs les points singuliers sont définis par les équations (47), que l'on peut écrire

$$L=\lambda x,\quad M=\lambda y,\quad N=\lambda z,$$

en introduisant l'arbitraire λ. En substituant ces valeurs de L, M, N dans l'équation précédente, elle devient

$$\left(\lambda-\frac{K}{p}\right)\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)=0,$$

ou

$$(p\lambda-K)f=0.$$

Il y aura donc deux séries de points singuliers : 1° ceux qui sont sur la courbe f; 2° ceux qui n'y sont pas nécessairement et pour lesquels on a

$$\lambda=\frac{K}{p},$$

ou

$$L-K\frac{x}{p}=0,\quad M-K\frac{y}{p}=0,\quad N-K\frac{z}{p}=0.$$

Le nombre de ces derniers est facile à déterminer. Appelons-le h, et désignons par h' le nombre des points communs aux trois courbes

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Si nous appliquons le lemme démontré au commencement de cet article aux six polynômes qui figurent dans l'identité (49), nous aurons

$$h+h'=\frac{m^3+(p-1)^3}{m+p-1}.$$

On en déduit que le nombre des points singuliers qui se trouvent sur la solution particulière f est *au moins* égal à

$$m^2+m+1-h=p(m-p+2)+h'.$$

En particulier, si la courbe f n'a pas de point singulier, h' sera nul. Mais je n'insiste pas sur cette recherche, la détermination du nombre h' offrant des difficultés quand la courbe a des points multiples.

Le caractère propre des points qui ne sont pas des points singuliers de l'équation différentielle, c'est qu'il passe en ces points une seule branche de courbe satisfaisant à l'équation différentielle. On peut donc affirmer :

1° Que, si une courbe solution particulière a un point multiple d'une espèce quelconque, ce point multiple est un point singulier de l'équation différentielle ;

2° Que tous les points communs à deux courbes solutions particulières sont, quelle que soit la relation des deux courbes dans le voisinage de ces points communs, des points singuliers de l'équation différentielle.

Je vais indiquer maintenant comment la considération des points singuliers intervient dans l'application des théorèmes de l'article précédent, et permet de réduire dans bien des cas le nombre des intégrales particulières exigées par ces théorèmes pour la détermination de l'intégrale générale.

Nous avons vu que, étant données p solutions particulières algébriques $u_1, u_2, \ldots, u_p$, qui donnent lieu aux identités

$$(50) \qquad \Delta u_1 = K_1 u_1, \quad \ldots, \quad \Delta u_p = K_p u_p,$$

si l'on peut déterminer des constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, telles que l'on ait

$$(51) \qquad \begin{cases} \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p = 0, \\ \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \ldots + \alpha_p h_p = 0, \end{cases}$$

$h_1, h_2, \ldots, h_p$ étant les degrés de $u_1, \ldots, u_p$, l'intégrale générale sera de la forme

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p} = C.$$

Les équations (51) équivalent, nous l'avons vu, à $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ équations du premier degré entre $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, et, comme ces équations sont homogènes, il faudra connaître en général $\frac{m(m+1)}{2} + 2$ solutions particulières.

Mais supposons que nos p solutions particulières représentent des courbes ne passant pas par q des points singuliers de l'équation. Considérons l'un de ces points singuliers de coordonnées x_i, y_i, z_i. Pour ce point on aura

$$L = \lambda_i x_i, \quad M = \lambda_i y_i, \quad N = \lambda_i z_i,$$

et, par conséquent, pour une fonction quelconque f,

$$\Delta f = \lambda_i \left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \right) = \lambda_i \alpha f,$$

α étant le degré de f. On aura donc en particulier

$$\Delta u_1 = \lambda_i h_1 u_1, \quad \ldots, \quad \Delta u_p = \lambda_i h_p u_p,$$

et, par conséquent, $u_1, u_2, \ldots, u_p$ n'étant pas nuls par hypothèse,

$$K_1 = \lambda_i h_1 u_1, \quad K_p = \lambda_i h_p u_p,$$

et la première des équations (51), si l'on y substitue x_i, y_i, z_i à la place de x, y, z, deviendra

$$\lambda_i (\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \ldots + \alpha_p h_p) = 0.$$

Si λ_i est nul, elle sera identiquement satisfaite; sinon elle sera identique à la seconde des équations (51).

Or les q équations, que l'on obtient en substituant à x, y, z les coordonnées des q points singuliers, peuvent tenir lieu de q des équations qu'on obtient, en écrivant directement que le polynôme

$$\alpha_1 K_1 + \ldots + \alpha_p K_p$$

a tous ses termes nuls. On voit donc que ces équations se réduiront à $\frac{m(m+1)}{2} - q$ distinctes, s'il y a q points singuliers par lesquels ne passent pas les courbes solutions particulières. Nous avons donc le théorème suivant, qui complète celui de l'article précédent :

Si l'on a $\frac{m(m+1)}{2} + 2 - q = p$ *solutions particulières représentant des courbes ne passant pas par* q *des points singuliers* u_1,

$u_2, \ldots, u_p$ *désignant ces solutions, l'intégrale générale sera de la forme*

$$u_0^{\alpha_1}, u_2^{\alpha_2}, \ldots, u_p^{\alpha_p} = C.$$

Il est bon toutefois de lever une objection que l'on peut faire à la démonstration précédente. Nous avons admis que, si, dans le polynôme

$$\varphi(x, y, z) = \alpha_1 K_1 + \ldots + \alpha_p K_p,$$

on substitue à la place de x, y, z les coordonnées x_i, y_i, z_i des points singuliers, les q équations

$$\varphi(x_i, y_i, z_i) = 0,$$

que l'on obtient ainsi, tiennent lieu de q des équations auxquelles on est conduit en annulant les coefficients de tous les termes de ce polynôme. Il faut donc examiner la question suivante :

Quand on veut exprimer qu'un polynôme de degré $m-1$, $F(x, y, z)$ est identiquement nul, les q équations que l'on obtient en écrivant que ce polynôme est nul pour q points peuvent-elles remplacer un nombre égal des équations que l'on obtient en écrivant que ce polynôme a tous ses coefficients nuls?

On verra facilement que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que les q points ne soient pas dans une relation telle que toute courbe d'ordre $m-1$, qui contient un certain nombre d'entre eux, passe par quelques-uns des autres. Le théorème précédent ne sera donc exact que si les q points singuliers considérés n'ont pas entre eux la relation particulière que nous venons de définir.

Considérons, par exemple, le cas où L, M, N sont du second degré. Si l'on a deux solutions particulières représentant des courbes ne passant pas par trois points singuliers, l'intégrale générale sera de la forme

$$u_1^{h_2} = C u_2^{h_1}.$$

Mais ce théorème pourra être en défaut si les trois points singuliers, n'appartenant pas aux courbes u_1, u_2, sont en ligne droite.

Si l'on a trois solutions particulières u_1, u_2, u_3, représentant des courbes ne passant pas par deux points singuliers, l'intégrale sera de la forme

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3} = C.$$

Et enfin, si l'on a quatre solutions particulières u_1, u_2, u_3, u_4, représentant des courbes ne passant pas par un point singulier, l'intégrale sera de la forme

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3} u_4^{\alpha_4} = C,$$

ces deux dernières propositions n'étant sujettes à aucune exception.

VI.

Du changement de variables dans l'équation différentielle.

Supposons qu'aux variables x, y, z on veuille en substituer trois autres α, β, γ, que nous supposerons être des fonctions homogènes de x, y, z, de degrés p, q, r. On peut arriver à ce résultat de différentes manières :

1° Nous avons vu que la fonction homogène de degré zéro qui, égalée à une constante, donne l'intégrale générale de l'équation différentielle, doit satisfaire à l'équation

$$L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Ajoutons l'équation suivante :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

qui exprime que la fonction est homogène et de degré zéro. Avec les nouvelles variables α, β, γ, on reconnaît presque sans calcul que ces équations deviennent

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\Delta\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\Delta\gamma = 0,$$

$$p\alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha} + q\beta\frac{\partial f}{\partial \beta} + r\gamma\frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0.$$

D'ailleurs, si l'on remarque que l'équation différentielle, exprimant que f est constante, est

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma = 0,$$

on aura trois équations entre lesquelles on pourra éliminer les dérivées inconnues de f, et l'on trouvera

$$\Delta\alpha(q\beta\, d\gamma - r\gamma\, d\beta) + \Delta\beta(r\gamma\, d\alpha - p\alpha\, d\gamma) + \Delta\gamma(p\alpha\, d\beta - q\beta\, d\alpha) = 0,$$

ce qui représente la nouvelle forme de l'équation différentielle.

2° Nous avons vu que l'intégrale de l'équation différentielle est celle des deux intégrales du système

$$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N},$$

qui est homogène et de degré zéro. Or le système précédent se transforme dans le suivant :

$$(52) \qquad \frac{d\alpha}{\Delta\alpha} = \frac{d\beta}{\Delta\beta} = \frac{d\gamma}{\Delta\gamma},$$

dont il suffira de chercher l'intégrale

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = C,$$

qui est homogène, et de degré zéro, en regardant α comme du degré p, β comme du degré q, γ comme du degré r.

3° On peut enfin, sans beaucoup de peine, effectuer directement le changement de variables. Posons, pour abréger,

$$u = L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) + N(x\,dy - y\,dx),$$

et voyons ce que devient u, quand on remplace x, y, z en fonction de α, β, γ. En introduisant, pour la commodité du calcul, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix},$$

où a, b, c sont trois nombres quelconques, et désignant par D'_a, D'_b, D'_c ses dérivées par rapport à a, b, c, on a

$$u = LD'_a + MD'_b + ND'_c.$$

On a aussi

$$\Delta\alpha = L\frac{\partial\alpha}{\partial x} + M\frac{\partial\alpha}{\partial y} + N\frac{\partial\alpha}{\partial z},$$

$$\Delta\beta = L\frac{\partial\beta}{\partial x} + M\frac{\partial\beta}{\partial y} + N\frac{\partial\beta}{\partial z},$$

$$\Delta\gamma = L\frac{\partial\gamma}{\partial x} + M\frac{\partial\gamma}{\partial y} + N\frac{\partial\gamma}{\partial z};$$

éliminant L, M, N entre ces quatre équations, nous avons

$$\begin{vmatrix} u & D'_a & D'_b & D'_c \\ \Delta\alpha & \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\alpha}{\partial z} \\ \Delta\beta & \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} \\ \Delta\gamma & \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant suivant les éléments de la première colonne,

$$\frac{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial(x, y, z)} u = \Delta\alpha \begin{vmatrix} D'_a & D'_b & D'_c \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial z} \end{vmatrix} + \ldots,$$

les deux termes non écrits se déduisant du premier par des permutations circulaires effectuées sur α, β, γ.

Multiplions, d'après les règles connues, le coefficient de $\Delta\alpha$ par le déterminant D; en se rappelant que β, γ sont homogènes et de degrés q, r, on trouvera

$$\begin{vmatrix} D'_a & D'_b & D'_c \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial z} \end{vmatrix} D = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & q\beta & r\gamma \\ 0 & d\beta & d\gamma \end{vmatrix},$$

ce qui donne, pour le coefficient de $\Delta\alpha$, la valeur $q\beta\,d\gamma - r\gamma\,d\beta$.

On aura donc, en substituant cette valeur dans l'expression de u,

$$\frac{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial(x,y,z)}u = \Delta\alpha(q\beta\,d\gamma - r\gamma\,d\beta) + \Delta\beta(r\gamma\,d\alpha - p\alpha\,d\gamma) + \Delta\gamma(p\alpha\,d\beta - q\beta\,d\alpha),$$

ce qui est d'accord avec les résultats trouvés précédemment.

Si, au lieu du déterminant fonctionnel de α, β, γ, on introduit son inverse

$$\delta = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}, \tag{53}$$

on aura

$$\left\{ \begin{aligned} u = \delta\,\Delta\alpha(q\beta\,d\gamma - r\gamma\,d\beta) + \delta\,\Delta\beta(r\gamma\,d\alpha - p\alpha\,d\gamma) \\ + \delta\,\Delta\gamma(p\alpha\,d\beta - q\beta\,d\alpha), \end{aligned} \right. \tag{54}$$

ou, en posant

$$L' = \delta\,\Delta\alpha, \quad M' = \delta\,\Delta\beta, \quad N' = \delta\,\Delta\gamma, \tag{55}$$

$$u = L'(q\beta\,d\gamma - r\gamma\,d\beta) + M'(r\gamma\,d\alpha - p\alpha\,d\gamma) + N'(p\alpha\,d\beta - q\beta\,d\alpha); \tag{56}$$

L' sera, par rapport à x, y, z, du degré $m - q - r + 2$, et satisfera, par conséquent, à l'équation

$$p\alpha\frac{\partial L'}{\partial\alpha} + q\beta\frac{\partial M'}{\partial\beta} + r\gamma\frac{\partial N'}{\partial\gamma} = (m + 2 - q - r)\,L'.$$

On aura des équations semblables pour M', N'.

En tenant compte de ces formules, on peut aisément former, avec le nouveau système de variables, l'équation à laquelle satisfait le multiplicateur. En écrivant que μu est une différentielle exacte, les trois conditions d'intégrabilité se réduiront à une seule,

$$L'\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} + M'\frac{\partial\mu}{\partial\beta} + N'\frac{\partial\mu}{\partial\gamma} + \mu\left(\frac{\partial L'}{\partial\alpha} + \frac{\partial M'}{\partial\beta} + \frac{\partial N'}{\partial\gamma}\right) = 0, \tag{56}$$

toute pareille à celle que nous avons obtenue pour les variables x, y, z.

On peut encore transformer directement l'équation du multiplicateur

$$L\frac{\partial\mu}{\partial x} + M\frac{\partial\mu}{\partial y} + N\frac{\partial\mu}{\partial z} + H\mu = 0,$$

et, en remplaçant $\frac{\partial\mu}{\partial x}, \cdots$ par $\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x}, \ldots$, on trouvera

$$\Delta\alpha\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}+\Delta\beta\frac{\partial\mu}{\partial\beta}+\Delta\gamma\frac{\partial\mu}{\partial\gamma}+\mu\mathrm{H}=0.$$

Si nous comparons cette équation à celle que nous avons obtenue précédemment, nous verrons que les coefficients des dérivées de μ deviennent égaux dans les deux équations, si l'on multiplie la précédente par δ. Il faut donc qu'alors les coefficients de μ soient aussi égaux, ce qui donne

$$(57)\qquad \frac{\partial\mathrm{L}'}{\partial\alpha}+\frac{\partial\mathrm{M}'}{\partial\beta}+\frac{\partial\mathrm{N}'}{\partial\gamma}=\delta\left(\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{N}}{\partial z}\right).$$

Ce résultat pourrait d'ailleurs se vérifier par un calcul direct.

Ainsi cette fonction, que nous avons désignée par H, est un invariant, non-seulement quand on effectue une substitution linéaire, mais aussi quand on prend pour nouvelles variables des fonctions homogènes quelconques des anciennes.

En terminant, nous allons montrer que quelques-uns des résultats précédents sont indépendants de l'homogénéité de l'équation, et les rattacher à la théorie du dernier multiplicateur.

Soit un système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{\mathrm{L}}=\frac{dy}{\mathrm{M}}=\frac{dz}{\mathrm{N}},$$

où L, M, N désignent maintenant des fonctions quelconques, qui ne sont pas nécessairement homogènes; si l'on substitue aux variables x, y, z trois nouvelles variables α, β, γ, les équations primitives deviendront encore

$$\frac{d\alpha}{\Delta\alpha}=\frac{d\beta}{\Delta\beta}=\frac{d\gamma}{\Delta\gamma}.$$

Le multiplicateur du système satisfait à l'équation

$$\mathrm{L}\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mathrm{M}\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mathrm{N}\frac{\partial\mu}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{N}}{\partial z}\right)=0.$$

Cette équation deviendra

$$\Delta\alpha\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}+\Delta\beta\frac{\partial\mu}{\partial\beta}+\Delta\gamma\frac{\partial\mu}{\partial\gamma}+\mu\left(\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{N}}{\partial z}\right)=0.$$

Il reste à transformer le coefficient de μ. On peut éviter le calcul en employant l'artifice suivant :

Considérons l'intégrale triple

$$V = \int\int\int \Delta u \, dx \, dy \, dz = \int\int\int \left(L \frac{\partial u}{\partial x} + M \frac{\partial u}{\partial y} + N \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz.$$

La variation de cette intégrale, quand la fonction u, qui est quelconque, changera de forme, est

$$\delta V = -\int\int\int \delta u \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz.$$

D'autre part, si l'on effectue le changement de variables, l'intégrale V devient

$$\int\int\int \left(\Delta\alpha \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \Delta\beta \frac{\partial u}{\partial \beta} + \Delta\gamma \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) \delta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma,$$

δ désignant toujours

$$\delta = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

La variation de l'intégrale sous sa nouvelle forme est

$$\delta V = -\int\int\int \delta u \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\delta \Delta\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\delta \Delta\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\delta \Delta\gamma) \right] d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

En comparant les deux expressions de la variation δV, on aura donc l'équation

$$(58) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha} (\delta \Delta\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\delta \Delta\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\delta \Delta\gamma) = \delta \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right),$$

qui n'est pas autre chose que la formule (57) étendue au cas où L, M, N sont quelconques.

(*A suivre.*)