BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Première partie, comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 5-29
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_5_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CINQ THÈSES, PUBLIÉES ET SOUTENUES A L'UNIVERSITÉ IMPÉRIALE DE HELSINGFORS, par les Candidats pour la chaire vacante de Mathématiques.

I. FALK (M.). — *Bearbetning af några teorier angående differentialeqvationer.* 57 p. in-8°. Helsingfors, 1876.

L'objet principal de cet Ouvrage est de développer la méthode proposée par Boole dans les *Philos. Transactions,* 1862, pour intégrer un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Après avoir établi quelques théorèmes préliminaires sur les déterminants fonctionnels, et exposé la théorie de Lagrange relative au cas où il n'y a qu'une seule équation à intégrer, l'auteur se propose la question, plus étendue, de trouver la fonction la plus générale qui satisfasse en même temps à plusieurs équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, le nombre des équations étant toutefois plus petit que celui des variables. En désignant par $\delta(z) = 0$, $\delta_1(z) = 0$ deux quelconques de ces équations, et formant une nouvelle équation $(\delta\delta_1 - \delta_1\delta)(z) = 0$, on peut démontrer que celle-ci est non-seulement linéaire et du premier ordre, mais qu'elle est aussi vérifiée par toute fonction z qui satisfait aux équations données. Si l'équation ainsi formée n'est pas identique, on peut l'ajouter au système donné, et éliminer en même temps une des dérivées partielles de z. On obtient ainsi un nouveau système de même forme, ayant une équation de plus et une dérivée de moins dans chaque équation, auquel on peut appliquer le même procédé, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on tombe sur un système d'équations qui ne donnent, en y appliquant le procédé en question, que des identités. Arrivé à ce point, on cherche à intégrer, par la méthode de Lagrange, l'une des équations du dernier système. Si l'on y parvient et qu'on prenne les fonctions dont se compose l'intégrale générale pour nouvelles variables indépendantes, on peut transformer ce même système en un autre dans lequel le nombre des équations et celui des variables sont diminués l'un et l'autre d'une unité. Par une seconde intégration, suivie d'un nouveau changement de variables, on diminue encore d'une unité tant le nombre des équations que celui des variables, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le système soit réduit à une seule équation, qu'on doit enfin intégrer par la méthode de Lagrange. L'intégrale ainsi obtenue sera en même temps la solution générale du système primitif.

A cause de la correspondance qui existe entre les équations aux dérivées partielles et les équations différentielles ordinaires, la méthode de Boole précédemment exposée peut servir aussi pour intégrer un système d'équations de cette dernière espèce. C'est ce que l'auteur fait voir dans la dernière partie de son Ouvrage, et qu'il éclaircit par quelques exemples.

II. MELLBERG (E.-J.). — *Teorin för determinant-kalkylen.* 121 p. in-8°. Helsingfors, 1876.

L'auteur commence par une introduction historique fort étendue (50 pages), renfermant des extraits nombreux des travaux de Leibnitz, Cramer, Bézout, Vandermonde, Lagrange, Laplace, Gauss et Cauchy, pour mettre en évidence la part qui revient à chacun de ces grands géomètres dans la fondation du calcul dont il s'agit. Le reste du travail contient une exposition très-élémentaire de la théorie des déterminants et de ses applications principales. On y trouve les règles pour multiplier et différentier les déterminants; des notions sur les déterminants mineurs et sur quelques déterminants particuliers symétriques, etc. Les applications concernent la résolution des équations linéaires, l'évaluation de l'aire d'un triangle et du volume d'un tétraèdre, la cubature des solides réguliers, les propriétés des déterminants fonctionnels et hessiens, le changement des variables dans une intégrale multiple. Cette énumération rapide montre assez que le travail de M. Mellberg ne renferme guère rien de nouveau; parfois il laisse aussi à désirer pour la rigueur des démonstrations, ce qui diminue l'utilité qu'il pourrait avoir sans cela pour l'enseignement élémentaire.

III. Bonsdorff (E.). — *Härledning och geometrisk tydning af vigtigaste combinanterna i det ternära kubiska formsystemet.* 66 p. in-8°. Helsingfors, 1876.

La théorie des formes cubiques ternaires a, dans ces derniers temps, fait des progrès considérables par les recherches de plusieurs géomètres, surtout en Allemagne. Dans un travail remarquable, inséré dans les *Mathematische Annalen,* 1869, Aronhold avait démontré que tous les invariants [ce terme étant pris dans le sens le plus général de manière à comprendre aussi les covariants, les contravariants et les formes intermédiaires (*Zwischenformen*)] constituent un système fini de formes distinctes, au nombre de trente-quatre, dont tous les autres se composent algébriquement. Plus tard, MM. Clebsch et Gordan publièrent ensemble (dans les *Math. Ann.,* 1873) un travail systématique sur les formes cubiques ternaires, où ils étudiaient aussi les combinants de ces formes. Dernièrement, M. Gundelfinger s'est occupé de l'interprétation géométrique des combinants appartenant au système cubique ternaire (*Math. Ann.,* 1875). Profitant de ces travaux, M. Bonsdorff s'est proposé d'étudier plus spécialement les combinants et leurs significations géométriques.

Le travail de M. Bonsdorff est divisé en trois Parties. Dans la première, il examine quelques-unes (en tout quinze) des formes dérivées les plus simples du système cubique, parmi lesquelles deux surtout, introduites par Hesse et par Cayley, jouent un rôle principal. La seconde contient un résumé succinct de la théorie des combinants, c'est-à-dire des invariants simultanés d'un système de formes ayant la propriété de ne subir aucun changement essentiel lorsqu'aux formes données on substitue des combinaisons linéaires de ces formes. Il s'agit en particulier des combinants relatifs au cas où le système donné se réduit à deux formes cubiques ternaires, l'une primitive et l'autre sa hessienne, cette espèce de combinants ayant une importance particulière dans la théorie des courbes du troisième ordre. L'auteur indique deux méthodes pour la formation de ces combinants et examine quelques-uns d'entre eux dans leur rapport avec les invariants précédemment étudiés.

La troisième Partie a pour objet l'interprétation géométrique des formes dont il a été question dans les deux premières et, en particulier, des combinants. La forme cubique ternaire, égalée à zéro, représentant, dans le système de coordonnées homogènes, l'équation générale d'une courbe du troisième ordre ou de la troisième classe, suivant qu'il s'agit de coordonnées ponctuelles ou tangentielles; tout invariant, covariant, etc., dérivé d'une telle forme, renferme l'expression de quelque propriété inhérente à une pareille courbe. Dans ces applications géométriques, l'auteur a constamment pris pour point de départ l'équation complète du troisième ordre, au lieu de la forme simplifiée, dite *canonique*, à laquelle cette équation peut se réduire par un changement de coordonnées convenable et dont on fait usage ordinairement. On sait qu'une courbe du troisième ordre a, en général, neuf points d'inflexion. En combinant, au moyen de coefficients indéterminés, la forme primitive avec sa hessienne, on obtient l'équation commune de toutes les courbes du troisième ordre ayant les mêmes neuf points pour points d'inflexion et qui constituent ensemble ce qu'on appelle un *faisceau syzygétique*. C'est à ce faisceau que se rapportent les combinants étudiés par M. Bonsdorff. Quant aux interprétations qu'il en a essayées, elles semblent confirmer la remarque faite par M. Gundelfinger à l'occasion de son travail du même genre déjà cité, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas, en général, difficiles à trouver; mais que les propositions géométriques auxquelles elles conduisent sont, pour la plupart, trop compliquées pour avoir un intérêt réel.

IV. Mittag-Leffler (G.). — *En metod att komma i analytisk besittning af de elliptiska funktionerna.* 96 p. in-8°. Helsingfors, 1876.

Dans une introduction historique de quinze pages, l'auteur rend compte des recherches qui préparaient la découverte des fonctions elliptiques et du développement des idées qui y conduisaient. L'exposition du sujet même est divisée en quatre articles. Dans le premier, l'auteur cherche à simplifier, par une transformation algébrique, l'expression différentielle $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, dans laquelle $R(x)$ est un polynôme du quatrième degré en x. Après avoir montré ce qu'on peut obtenir par une substitution linéaire, l'auteur suppose une relation du second degré entre x et une nouvelle variable s; par une méthode indiquée par M. Weierstrass, il en détermine les coefficients de manière que l'expression différentielle se réduise à la forme $-\frac{ds}{\sqrt{S}}$, où $S = 4s^3 - g_2 s - g_3$, et qu'en outre s devienne $= \infty$ pour une valeur initiale arbitraire $x = x_0$.

Dès lors, le problème que l'auteur a en vue, et qui consiste à trouver la solution générale de l'équation différentielle $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = du$, se trouve grandement simplifié; il se réduit, en effet, à trouver une fonction (continue, monodrome et monogène), $s = p(u)$, qui satisfasse à l'équation différentielle $-\frac{ds}{\sqrt{S}} = du$, et qui devienne infinie pour une valeur donnée de u, soit $u = 0$.

Par une discussion ingénieuse, dont il est rendu compte dans l'article 2, M. Weierstrass a démontré qu'il n'existe qu'une seule fonction remplissant les conditions dont il s'agit, et que le problème est ainsi complétement déterminé. Cela étant, il s'agit d'établir en réalité cette fonction $p(u)$. Supposons d'abord que les trois racines de l'équation $S = 0$ soient réelles et inégales, et désignons-les, suivant l'ordre décroissant de grandeur, par e_1, e_2, e_3. Une première branche de la fonction cherchée s'obtient au moyen de l'intégrale définie

$$x = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

en faisant parcourir à s la série des valeurs réelles depuis ∞ jusqu'à e_1 et en calculant les valeurs correspondantes de l'argument u, qui croît alors d'une manière continue de zéro à une certaine valeur positive ω. Ayant remplacé s par $-s$ dans l'intégrale précédente, on arrive de la même manière à former la fonction pour les valeurs purement imaginaires de l'argument u comprises entre zéro et une certaine limite ω_1, correspondant à la valeur $s = -e_3$. Il est démontré d'ailleurs que la fonction reste la même lorsque l'argument change de signe. La fonction *elliptique* $p(u)$ étant ainsi établie pour les valeurs réelles de u comprises entre $-\omega$ et $+\omega$ et pour les valeurs purement imaginaires comprises entre $-\omega_1$ et $+\omega_1$, on peut étendre successivement le champ de la fonction, au moyen du théorème d'addition eulérien, de manière à embrasser d'abord toutes les valeurs réelles, puis toutes les valeurs purement imaginaires et enfin toutes les valeurs complexes de l'argument. A l'aide du même théorème, on peut démontrer encore que ladite fonction possède deux périodes, 2ω et $2\omega_1$, et qu'elle ne peut prendre de valeurs égales qu'en des points séparés les uns des autres par des périodes entières.

L'existence de la fonction étant ainsi établie, ainsi que la possibilité de la calculer pour toutes les valeurs de l'argument, il reste à former une expression analytique qui puisse la représenter généralement. A cet effet, l'auteur emploie, dans l'article 3, un procédé dû à Abel et simplifié par lui. Par des applications réitérées du théorème d'addition, il parvient à une relation algébrique entre $p(u)$ et $p\left(\frac{u}{n}\right)$, qui donne, en faisant $n = \infty$ et passant à la limite, $p(u)$ exprimée sous la forme d'une série indéfinie dont la convergence est rigoureusement démontrée.

La méthode employée dans les trois premiers articles, pour établir la fonction $p(u)$ et trouver son développement en série, est sans doute très-intéressante au point de vue théorique, parce qu'elle éclaircit nettement la pensée suivie par Abel dans ses recherches classiques. Mais, à cause des suppositions qu'on avait faites, dès le commencement, sur la nature des racines de l'équation $S = 0$, le résultat n'a qu'une validité restreinte; il n'est donc pas permis de dire qu'on ait ainsi acquis une « possession » vraie et légitime de la fonction elliptique. Pour combler cette lacune, l'auteur reprend la question, dans le quatrième article, à un autre point de vue. En se fondant sur le théorème, établi par Cauchy et Weierstrass, sur la possibilité d'intégrer un système d'équations différentielles par des séries qui restent convergentes, dans certaines limites des variables, il obtient, sans faire aucune supposition sur les coefficients du trinôme S, la fonction $\frac{1}{p(u)}$ développée en série dont la convergence est assurée au moins dans le voisinage de la valeur initiale de u. Au lieu de poursuivre la discussion de la fonction $p(u)$, l'auteur en déduit, par deux intégrations successives, une autre fonction σ, étudiée, comme la précédente, par M. Weierstrass, et qui se présente ainsi immédiatement sous la forme d'une série de puissances. Quant à celle-ci, on sait d'abord seulement qu'elle est convergente entre certaines limites de la variable; mais par un procédé très-élégant, dû à M. Weierstrass et fondé sur l'emploi du théorème d'addition, on en déduit la convergence absolue de la série pour toute valeur finie de l'argument. Du reste, les fonctions $p(u)$ et $\sigma(u)$ de Weierstrass peuvent s'exprimer directement par les fonctions θ de Jacobi.

D'après ce qui est dit dans la préface, la thèse que nous venons d'analyser ne forme qu'une partie détachée d'un travail plus étendu, dans lequel l'auteur a l'intention de présenter les différentes méthodes par lesquelles on peut entrer en possession des fonctions elliptiques; mais elle constitue en même temps, comme exposition d'une de ces méthodes, celle d'Abel perfectionnée par Weierstrass, une recherche en quelque sorte complète. Par la clarté de l'exposition jointe à la rigueur logique et la subtilité des raisonnements, aussi bien que par le grand intérêt du sujet qui y est traité, elle mérite certainement d'être signalée à l'attention des géomètres.

V. Levänen (S.). — *Integration af några differentialeqvationer af andra ordningen.* 47 p. in-4°. Helsingfors, 1876.

Les équations différentielles, dont il s'agit dans cet opuscule, sont toutes comprises dans la forme générale

$$P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + R\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = S.$$

L'auteur considère d'abord le cas de $S = 0$. En supposant, ce qui est toujours permis, $P = 1$, l'équation s'intègre facilement toutes les fois que chacun des coefficients Q et R ne renferme qu'une seule des variables x et y, excepté si Q est fonction de y et R de x. Dans cette dernière hypothèse, l'intégration ne peut s'effectuer que dans des cas particuliers.

Passant ensuite à l'équation générale à quatre termes, l'auteur y applique différentes méthodes pour découvrir des cas dans lesquels elle soit intégrable. Tantôt il introduit, dans l'expression de la dérivée du premier ordre, deux inconnues, dont l'une peut être déterminée arbitrairement; tantôt il cherche à rendre le premier membre différentielle exacte au moyen d'un facteur. Il obtient ainsi, pour déterminer les nouvelles inconnues, une ou plusieurs équations aux dérivées partielles. Mais, comme celles-ci sont, en général, plus compliquées que l'équation donnée, ce n'est que dans des cas très-exceptionnels qu'il parvient à les intégrer effectivement. En supposant $R = 0$, on tombe sur l'équation linéaire du second ordre qui est traitée d'une manière analogue.

Malgré la peine qu'il s'est donnée, l'auteur n'a guère réussi à tirer de ses formules quelque résultat utile. En effet, presque toutes les équations qu'il est parvenu à intégrer, sont tellement simples, que leurs intégrales s'obtiennent soit immédiatement, soit par quelque transformation facile à découvrir.

L. Lindelöf.

ALBEGGIANI (L.). — Geometria dello spazio in coordinate tetraedriche secondo i concetti delle *Vorlesungen uber Geometrie* di A. Clebsch. Parte I[a]. — Palerme, 1877; 1 vol. in-8°, 166 p.

M. Albeggiani se propose dans cet Ouvrage d'exposer et de coordonner les recherches récentes de Battaglini, Clebsch, Cremona, d'Ovidio, Klein, Plücker, Salmon, etc., sur la Géométrie dans l'espace. La première Partie du Traité qu'il entreprend de publier comprend deux Sections : la première contient cinq Chapitres, dont les quatre premiers traitent des quatre figures fondamentales de l'espace : le premier et le second traitent du point et du plan, le troisième et le quatrième de la droite considérée soit comme axe, soit comme rayon. Le Chapitre V se rapporte aux courbes planes et aux surfaces coniques.

Enfin le Chapitre VI qui, à lui seul, constitue la seconde Partie, est relatif à la théorie des complexes.

LORENZONI (G.) — GIOVANNI SANTINI, LA SUA VITA E LE SUE OPERE. — Padova, tipografia del Seminario, 1877; br. in-8°, 70 p.

Santini, né dans les environs de Capresse, le 30 janvier 1787, et mort à Padoue le 26 juin 1877, était depuis plusieurs années le doyen des astronomes. Entré comme élève à l'Observatoire de Milan, en 1805, il devint, en octobre 1806, astronome adjoint à l'Observatoire de Padoue; puis, en 1813, directeur de ce même établissement, dans lequel il n'a pas cessé de travailler activement jusqu'en 1872. C'est cette longue et fructueuse carrière que son élève dévoué, M. G. Lorenzoni, a cherché à retracer en quelques pages inspirées par le sentiment sincère de la grandeur de l'œuvre de son illustre maître. Santini, parmi de nombreux Mémoires dont M. Lorenzoni a dressé la bibliographie complète, nous laisse une serie de quatre catalogues des plus exacts, que l'on consultera toujours avec fruit, et qui donnent les positions du plus grand nombre des étoiles de 6^e, 7^e et parfois de 9^e grandeur comprises entre 10 degrés de déclinaison nord et 15 degrés de déclinaison sud. G. R.

DU BOIS-REYMOND (P.). — ZWEI SÄTZE ÜBER GRENZWERTHE VON FUNCTIONEN ZWEIER VERÄNDERLICHEN (¹).

Une fonction de deux variables peut tendre vers des valeurs différentes, selon que ces deux variables tendent, simultanément ou successivement, d'après une loi ou une autre loi, vers certaines valeurs numériques. M. Du Bois-Reymond s'est déjà occupé de cette singularité, dont il a développé géométriquement la théorie (*Journal de Crelle*, t. 70, *Bemerkungen über die verschiedenen Werthe*, etc.). Il y revient maintenant et établit rigoureusement et analytiquement les deux théorèmes suivants :

1. Supposons que l'on ait

$$\lim_{x=0}[\lim_{y=0} f(x, y)] = 0;$$

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XI, p. 145-148.

il existera toujours une fonction $\varphi(x)$ telle que l'on ait aussi

$$\lim_{x=0}\{f[x, \varphi(x)]\} = 0,$$

et en outre

$$\lim_{x=0}\{f[x, \varphi_0(x)]\} = 0,$$

pourvu que, à partir d'une certaine valeur de x, l'inégalité

$$\varphi_0(x) < \varphi(x)$$

ait toujours lieu.

2. Si, réciproquement, pour une fonction $\varphi(x)$ et toutes les fonctions $\varphi_0(x) < \varphi(x)$, on a

$$\lim_{x=0}\{f[x, \varphi(x)]\} = 0,$$

on a aussi

$$\lim_{x=0}\{\lim_{y=0}[f(x, y)]\} = 0.$$

GILBERT (P.). — COURS DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE. *Partie élémentaire.* — Louvain-Paris, 1877. 1 vol. in-8°, 385 p.

« Mon intention », dit M. Gilbert dans sa Préface, « a été, non pas de présenter aux élèves une exposition neuve et originale des doctrines de la Mécanique, mais de condenser ce que j'ai trouvé de meilleur, de plus clair et de plus exact dans les nombreux ouvrages, didactiques ou autres, que j'ai consultés. » La nature du Livre est nettement indiquée par ces trop modestes paroles de son auteur : c'est un Traité élémentaire, très-peu au-dessous de ce qui convient pour la préparation aux examens de licence, à la portée des élèves ingénieurs, se recommandant par les qualités d'un bon livre d'enseignement : la clarté, la précision, le goût dans la mesure de ce qui doit être dit ou laissé de côté.

L'auteur, suivant en cela une opinion partagée par beaucoup de bons esprits, débute par la Cinématique et déduit de la composition des mouvements le théorème fondamental de la Statique sur la composition des forces ; la démonstration du principe des vitesses virtuelles s'appuie aussi sur la Cinématique ; les conditions qu'exige la légitime application de ce principe sont précisées avec plus de soin qu'on ne fait d'habitude ; toutefois la considération des forces moléculaires, introduite dans la démonstration de ce principe, n'ajoute peut-être ni à la clarté ni à la rigueur.

Dans le troisième Livre se trouvent exposés les principes de la Dynamique. M. Gilbert débute avec raison par l'étude du mouvement d'un point matériel libre ou assujetti à se mouvoir sur une courbe ou une surface fixe, et il s'élève progressivement aux théorèmes généraux concernant le mouvement d'un système constitué par un ensemble de points matériels, par un ou plusieurs corps solides, et rejette à la fin le principe de d'Alembert, rendu plus intelligible par ce qui précède, ainsi que les équations de Lagrange. Les trois derniers Chapitres de ce Livre sont consacrés aux percussions et aux mouvements relatifs. Enfin le quatrième Livre contient un exposé succinct des théories relatives à l'Hydraulique.

Un nombre considérable d'exercices, judicieusement choisis et classés, termine chaque Chapitre. La solution de ceux qui présentent quelques difficultés est rapidement exposée.

M. Gilbert a réservé pour un autre volume, destiné à former comme le complément de celui-ci, l'exposition de certaines théories plus élevées, sorte de transition entre la Mécanique et la Physique mathématique. Telles sont la théorie de l'attraction et celle du potentiel qui s'y rattache intimement, les théories dynamiques d'Hamilton et de Jacobi, la solution de diverses questions au moyen des fonctions elliptiques, les principes de la Mécanique moléculaire, de l'élasticité et des mouvements vibratoires, un certain nombre de problèmes se rapportant aux corps semi-fluides et à l'Hydrodynamique; peut-être enfin la Thermodynamique.

J. T.

LOEWY (M.). — DÉTERMINATION DES ASCENSIONS DROITES DES ÉTOILES DE CULMINATION LUNAIRE ET DE LONGITUDE, ÉPHÉMÉRIDES DE CES ÉTOILES POUR 1878 ([1]). — Gauthier-Villars, 1877; 2 broch. in-4°, 94-38 pages.

Dans les principaux observatoires, on observe constamment, soit pour avoir l'heure, soit pour calculer les corrections instrumentales, une série d'étoiles dont la position se trouve ainsi, au bout de

([1]) Extrait du tome Ier des *Annales du Bureau des Longitudes*.

quelques années, déterminée avec une rigueur presque mathématique, et qui prennent alors le nom d'*étoiles fondamentales*. C'est à ces étoiles que l'on rapporte ensuite les positions du Soleil, de la Lune et des planètes. Lorsqu'à la mer ou dans des stations astronomiques temporaires, dont parfois les instruments n'ont pas une grande stabilité, on observe des culminations lunaires afin d'en déduire plus tard les longitudes, on ne peut toujours s'astreindre à n'observer que des étoiles fondamentales, souvent trop éloignées, et l'on compare, en général, la Lune à des étoiles, dites *étoiles de la Lune,* situées à l'est et à l'ouest, sur des parallèles peu différents de notre satellite.

Pour que les longitudes résultant de ces observations présentent une exactitude suffisante, il faut que les étoiles de la Lune soient connues avec une grande précision; malheureusement il n'en est pas toujours ainsi, surtout lorsqu'on a été obligé d'emprunter leurs coordonnées à des catalogues anciens.

Un catalogue exact de cinq ou six cents étoiles, situées dans la zone céleste que paraît parcourir la Lune, était donc impérieusement réclamé par les astronomes et les marins.

C'est ce catalogue que vient de dresser, avec le plus grand soin, M. M. Lœwy, aujourd'hui délégué par le Bureau des Longitudes à la Direction de la *Connaissance des Temps*.

Le catalogue publié par M. Lœwy renferme 521 étoiles, qui comprennent les 210 étoiles fondamentales dont l'Observatoire de Paris donne chaque année la position corrigée dans l'Introduction de ses Mémoires, et 311 autres étoiles qui ont été déterminées, dans des conditions spéciales d'exactitude, au moyen d'observations recueillies à Paris (Montsouris), Marseille, Bregenz et Alger, pendant les opérations faites en 1873-1874, pour la détermination des différences de longitudes de ces villes. Les cercles méridiens en usage dans ces quatre observatoires temporaires offrent, en effet, une exactitude très-grande, et leur position dans une cabane de faible dimension, pourvue de grandes et nombreuses ouvertures et placée dans un terrain bien découvert, est une garantie précieuse contre l'existence de réfractions latérales pouvant conduire à des erreurs systématiques dans les ascensions droites. En outre, les observations ayant été faites avec une même exactitude dans des localités différentes, il est permis de penser que les erreurs de réfraction latérale, si elles se sont produites, n'ont pas, dans tous les cas, eu le même signe, et peuvent alors être traitées comme des erreurs accidentelles, cas auquel elles disparaissent dans la moyenne.

Le nombre des résultats partiels obtenus par MM. Oppolzer, Perrier, Stephan et Lœwy dans ces opérations de longitude s'est élevé à 5000 environ, auxquels il faut ajouter les observations recueillies depuis à Montsouris par les officiers de Marine attachés à cet établissement. A l'aide de ces nombres, on a pu déterminer, avec une erreur probable qui n'atteint pas $\frac{1}{100}$ de seconde de temps, les ascensions droites de 160 étoiles comprises entre 16 et 4 heures, et, avec une exactitude encore très-grande, quoique un peu inférieure, celles de 151 autres étoiles. En joignant à ces astres les 210 étoiles fondamentales de l'Observatoire de Paris, on arrive au nombre total de 521 étoiles, dont les positions moyennes sont données dans le Mémoire que nous analysons ici.

Pour chacune de ces étoiles, M. Lœwy a, en outre, fait calculer, au moyen des formules données par M. Le Verrier dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*, les positions, de quatre années en quatre années, de 1879 à 1899; pour les 14 circumpolaires non comprises dans les 521 étoiles de longitude, les ascensions droites et les déclinaisons moyennes ont même été déterminées d'année en année, de 1875 à 1896.

Enfin, dans un Appendice de 37 pages, M. Lœwy donne, pour l'année 1878, les ascensions droites, de 10 jours en 10 jours, de celles des étoiles de son catalogue dont les éphémérides ne se trouvent pas déjà dans la *Connaissance des Temps*.

Le catalogue de M. Lœwy et les éphémérides qui le complètent seront bientôt sans doute dans les mains de tous les astronomes, qui seront heureux d'y trouver les positions précises et les éphémérides d'un grand nombre d'étoiles dont les coordonnées ne se rencontrent ni dans le *Nautical Almanac*, ni dans le *Jahrbuch*, ni dans la *Connaissance des Temps*. G. R.

LŒWY (M.). — Détermination de la latitude d'un lieu par l'observation d'une hauteur de l'étoile polaire. — Gauthier-Villars, 1877; broch. in-4° de 12 pages.

La formule

$$\sin h = \cos p \sin \varphi + \sin p \cos \varphi \cos S,$$

où h est la hauteur observée de l'étoile de distance polaire p et d'angle horaire S, donne, par des transformations faciles et connues, la latitude φ du point d'observation; mais la formule usuelle ne se réduit pas facilement en tables ayant pour argument le temps vrai T qui est, en général, donné par les chronomètres et la distance polaire apparente moyenne p' de α Petite Ourse.

Par des transformations algébriques que M. Lœwy expose rapidement dans son Mémoire, il arrive à mettre la latitude cherchée φ sous la forme

$$\varphi = h - p' \cos S - (p - p') \cos S + \frac{1}{2} \tang h \sin^2 S . p^2 \sin 1'',$$

et l'on a

$$S = T + A - \alpha,$$

A étant l'ascension droite vraie du Soleil, α l'ascension droite de la Polaire.

Deux tables auxiliaires, calculées par M. Lœwy, donnent pour chaque jour de l'année la valeur de $A - \alpha$ et la correction à ajouter à cette quantité pour l'heure de l'observation.

Trois autres tables ayant pour argument S donnent ensuite, par de simples parties proportionnelles, les trois corrections à faire à h pour obtenir φ.

Ajoutons que, pour les observations faites en mer, il suffit de tenir compte du premier terme $p' \cos S$, et que le calcul est alors d'une rapidité telle, que les marins auront tout avantage à employer cette nouvelle méthode. G. R.

LŒWY (M.). — TABLES GÉNÉRALES DE RÉDUCTION DES OBSERVATIONS MÉRIDIENNES. — Gauthier-Villars, 1877; 1 broch. in-4° de 36 p.

La réduction d'une suite nombreuse d'observations méridiennes par la formule classique de Bessel

$$A = t + C_p + m + (c - \varkappa) + n \operatorname{tang}\delta + (c - \varkappa)(\operatorname{séc}\delta - 1)$$

exige un temps considérable, que M. Lœwy s'est proposé de réduire au minimum par la publication de tables auxiliaires.

Une première table à double entrée donne, pour les valeurs de δ comprises entre zéro et 50 degrés, et pour des valeurs de n allant de 0,01 à 1,00, la valeur, au millième de seconde, du produit $n \operatorname{tang}\delta$.

Une seconde table renferme, pour des valeurs de $(c - \varkappa)$ variant entre 0,00 et 1,00 et des valeurs de δ comprises entre zéro et 44 degrés, la valeur du produit $(c - \varkappa)(\operatorname{séc}\delta - 1)$.

Des tables auxiliaires ont aussi été dressées par M. Lœwy pour aider au calcul de la déclinaison n de l'extrémité ouest de l'axe de rotation de la lunette; cette quantité est, en effet, donnée, avec une approximation supérieure à $\frac{1}{100}$ de seconde, par la formule

$$n = \frac{(C_p)'' - (C_p)'}{\operatorname{tang}\delta''} - (c - \varkappa) + \frac{c - \varkappa}{\operatorname{tang}\delta''} + n\frac{\operatorname{tang}\delta'}{\operatorname{tang}\delta''},$$

où $(C_p)''$ et $(C_p)'$ désignent les corrections de pendules obtenues directement et sans correction aucune par une polaire de déclinaison δ'' et une étoile équatoriale de déclinaison δ'.

Le premier et le troisième terme de cette dernière expression se réduisent immédiatement en tables ayant pour argument les différences $(C_p)'' - (C_p)'$ ou $(c - \varkappa)$ et $\operatorname{tang}\delta''$; ces tables sont données par M. Lœwy pour les circumpolaires dont on fait habituellement usage.

Enfin M. Lœwy a également préparé des tables pour le calcul du dernier terme correctif $n\frac{\operatorname{tang}\delta'}{\operatorname{tang}\delta''}$, toujours très-petit; des tables spéciales à chaque valeur de δ'' comprise entre 81 et 90 degrés, et ayant pour arguments $\operatorname{tang}\delta'$ et la valeur approximative de n, que l'on a toujours le droit d'employer, se trouvent, en effet, dans le Recueil que nous analysons.

Ce même Mémoire contient enfin des tables, pour les onze années comprises entre 1877 et 1887, des deux termes

$$(n + c - \varkappa)\operatorname{tang}\delta, \quad (c - \varkappa)(\operatorname{séc}\delta - \operatorname{tang}\delta),$$

dans lesquels se décompose la formule de réduction au méridien des observations de circumpolaires.

En résumé, le Recueil de tables publié aujourd'hui par M. Lœwy aura le double résultat d'abréger dans une très-large mesure le travail, toujours considérable, de la réduction d'une longue série d'observations méridiennes, et d'éviter des erreurs numériques faciles à commettre dans des calculs qui ne renferment en eux-mêmes aucune vérification. G. R.

KRAUSE (M.). — ALGEBRAISCHE UNTERSUCHUNGEN AUS DER THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN (¹).

A côté de tant d'autres équations, et notamment des équations modulaires, il y a lieu, dans la théorie des fonctions elliptiques, de prêter attention à celles qui relient le produit du module primitif et du module complémentaire au produit du module transformé et du module complémentaire à ce dernier. La théorie de ces équations, dans le cas d'un degré impair n de transformations, n'admettant pas de diviseur carré, a été établie par MM. Hermite, Joubert, Königsberger; toutefois on s'est borné à étudier les équations, sans s'occuper de leurs discriminants. C'est cette lacune que M. Krause s'est efforcé de combler. Il donne la forme des discriminants, expose une méthode pour la détermination des racines distinctes, et finalement, relativement au problème général du développement des racines, fixe le degré de multiplicité de chacune d'elles. Comme exemples, il étudie, à ce point de vue, les transformations jusqu'au trentième ordre.

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XII, p. 1-22.

KRAUSE (M.). — UEBER DIE MODULARGLEICHUNGEN DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE ZAHLENTHEORIE ([1]).

La théorie des équations modulaires des fonctions elliptiques, fondée par Jacobi, dans le cas où le degré de transformation est impair, a été l'objet d'une suite d'importants travaux : elle a, en quelque façon, trouvé sa conclusion dans un récent travail du P. Joubert (*Sur les équations qui se rencontrent*, etc. Paris; 1876). Toutefois quelques recherches restaient à faire dans le cas d'une transformation d'ordre pair : c'est l'objet du travail de M. Krause.

Il démontre d'abord l'existence d'une équation algébrique entre les quantités qu'on désigne, suivant des notations connues, par $u^2 = \varphi^2(t)$ et $v_1^2 = \psi^2\left(\frac{\delta t - 8\xi}{2^\alpha \delta_1}\right)$, $2^\alpha\delta\delta_1$ étant égal au degré m de la transformation, δ étant un diviseur impair quelconque de m, et ξ un quelconque des nombres $0, \pm 1, \pm 2, \ldots + \frac{m}{8}$, n'ayant point de diviseur commun avec δ et δ_1. M. Krause se borne au cas important ou α est égal ou supérieur à 3. En second lieu, il établit les propriétés essentielles de ces équations, montre qu'on peut en déduire, et comment on peut le faire, une suite d'autres équations modulaires. En troisième lieu, il en conclut la solution du problème général du développement des racines. Dans le quatrième paragraphe, ces équations sont données pour les nombres de transformation 8, 16, 24, 32, 40, ... Enfin, dans le cinquième paragraphe, l'auteur applique à la théorie des nombres les théorèmes qu'il a obtenus précédemment. Cette application consiste dans la démonstration d'une partie des formules sommatoires que M. Kronecker a données, dans le tome 57 du *Journal de Crelle*, pour les nombres de formes à déterminant négatif.

([1]) *Mathematische Annalen*, t. XII, p. 419-434.

VILLARCEAU (Y.) ET DE MAGNAC (A.). — NOUVELLE NAVIGATION ASTRONOMIQUE (1).

On a beaucoup critiqué le titre de cet Ouvrage, mais il ne s'agit après tout que d'une querelle de mots. Les auteurs appellent *ancienne* la navigation dans laquelle on ne peut pas compter sur les indications des chronomètres que l'on possède, et navigation *nouvelle* celle où l'on peut se fier aux chronomètres : c'est une définition. Dans la navigation ancienne, on détermine la latitude et l'heure du bord par des observations de hauteurs, et l'heure du premier méridien par des observations de distances lunaires, et l'on sait que ces dernières observations comportent une précision bien moindre que les premières. Dans la navigation nouvelle, l'heure du premier méridien étant réputée connue, on n'a plus à observer que des hauteurs. Quant à la valeur pratique des nouvelles méthodes, nous sommes incompétent pour l'apprécier; nous laissons ce soin aux marins, en nous bornant à remarquer que l'un des auteurs, officier de marine des plus distingués, possède justement la compétence qui nous manque; nous voulons seulement appeler l'attention des lecteurs de ce *Bulletin* sur le côté mathématique du problème.

La remarque très-simple, qui est le point de départ des nouvelles méthodes, paraît avoir été faite pour la première fois, il y a quarante ans environ, par le capitaine américain Summer. L'heure du premier méridien étant connue, soit A un astre quelconque dont les coordonnées astronomiques sont fournies par les éphémérides; on en déduit immédiatement les coordonnées géographiques du lieu a qui a son zénith en A. Si l'astre A était observé précisément au zénith, le navigateur connaîtrait immédiatement sa position; ce serait un cas très-particulier. En général, l'astre A n'est pas observé au zénith, mais alors soit Z sa distance zénithale : on voit aisément que le navire se trouve sur un cercle du globe terrestre décrit du point a comme pôle avec la distance polaire Z. Ce cercle est ce qu'on appelle un *cercle de hauteur*. Un second cercle de hauteur est donné par l'observation d'un autre astre A', et l'une

(1) Paris, Gauthier-Villars, 1877.

des intersections de ces deux cercles est la position du navire. On comprend qu'il est toujours facile de lever toute ambiguïté, soit par la considération des azimuts, soit par une troisième observation.

Tel est le principe de la nouvelle navigation. Pour l'appliquer, M. Villarceau, auteur de la partie théorique de l'Ouvrage, distingue deux cas principaux, selon que l'on est censé n'avoir aucune idée approximative sur la position du navire, ou que l'on possède, au contraire, une première approximation obtenue par l'*estime*.

Dans le premier cas, qui est intéressant au point de vue théorique, mais qui, dans la pratique, ne peut se présenter que fort rarement, il s'agit de déterminer les points d'intersection de deux cercles tracés sur une sphère, connaissant les coordonnées de leurs pôles et leurs distances polaires. Le calcul analytique est facile, mais le calcul numérique est beaucoup trop long pour la pratique courante; c'est pourquoi M. Villarceau propose de construire par points, sur les cartes marines, les transformées des cercles de hauteur. On obtient ainsi des courbes, qu'on appelle *courbes de hauteur,* dont l'équation générale est fort simple ([1]), quand on emploie les fonctions hyperboliques. Ces courbes présentent trois formes différentes, selon que le pôle géographique se trouve à l'intérieur du cercle de hauteur, à l'extérieur de ce cercle, ou sur sa circonférence. L'auteur discute complétement le problème; il montre comment on peut remplacer les courbes de hauteur par leurs cercles osculateurs, dans le voisinage du point d'intersection cherché, et il détermine une limite de l'erreur commise par cette substitution.

Dans le cas qui est le plus ordinaire, on suppose que l'on connaît par l'*estime* une position approchée du navire. On peut alors substituer à chaque cercle de hauteur une droite qui lui est tangente, et qu'on appelle *droite de hauteur;* l'intersection de deux droites de hauteur détermine la position vraie. Mais habituellement on aura plus de deux observations, et par conséquent plus de deux droites

---

([1]) Voici cette équation, avec les notations de M. Houël,

$$\mathrm{Ch}\,\frac{y}{R}\cos z - \mathrm{Sh}\,\frac{y}{R}\sin D = \cos D \cos \frac{x - x_0}{R}.$$

L'axe des y est parallèle aux méridiens et l'axe des x à l'équateur; R est le rayon de la carte; D est la déclinaison de l'astre observé, et z sa distance zénithale.

de hauteur, qui n'iront pas, en général, passer par un même point, et il importe de savoir déterminer le résultat le plus probable. M. Villarceau donne pour cet objet une méthode ingénieuse, que l'on peut considérer comme une interprétation géométrique de la méthode des moindres carrés, et qui le conduit à divers théorèmes nouveaux et intéressants. La partie théorique de l'Ouvrage se termine d'ailleurs par des Notes étendues où toutes les questions d'approximation sont discutées avec le savoir profond et le soin minutieux que l'on est habitué de trouver dans les travaux de l'éminent astronome.

La partie pratique est due à M. le lieutenant de vaisseau Aved de Magnac. Elle contient d'abord un résumé de la Théorie, sous forme élémentaire. Ce travail était nécessaire pour populariser les nouvelles méthodes parmi les marins, à qui les exigences de leur profession permettent rarement de cultiver les Mathématiques élevées : M. de Magnac l'a exécuté avec autant de clarté que d'élégance. Mais, pour un mathématicien, le Chapitre le plus interressant est celui qui est consacré à l'étude des chronomètres. En suivant la voie ouverte par M. Lieussou, ingénieur hydrographe, et en s'inspirant des idées émises par M. Villarceau dans les *Annales de l'Observatoire* (t. VII), M. de Magnac établit que, dans l'état normal, les variations des chronomètres ne sont fonctions que de la température et du temps. C'est ce qui résulte de toutes les études exécutées, soit à bord des navires français par M. de Magnac lui-même et par d'autres officiers, soit à l'Observatoire de Kiel, de sorte que la marche d'un chronomètre, lorsqu'elle ne subit pas de brusques solutions de continuité, peut être représentée par la formule de Taylor, limitée aux termes du second ordre,

$$m = a + bt + c\theta + dt^2 + et\theta + f\theta^2, \tag{1}$$

où t et θ désignent le temps et la température comptés à partir d'origines prises arbitrairement dans les limites des observations, et où a, b, ..., f sont des constantes, que l'on détermine au moyen d'un grand nombre d'équations de la forme (1) entre les quantités observées m, t et θ. On peut d'ailleurs remplacer la résolution de ces équations par une construction graphique extrêmement simple, qui donne une précision très-suffisante pour les atterrissages.

Ch. S.

TOEPLITZ (E.). — Ueber ein Flächennetz zweiter Ordnung ([1]).

L'auteur s'est proposé de démontrer directement, par voie algébrique, un certain nombre de théorèmes énoncés par M. Frahm ([2]) (*Math. Ann.*, t. VII, p. 635-638) sur le réseau de surfaces (*Flächennetz*) du second ordre. Ces théorèmes rectifiaient une erreur commise par M. Salmon dans sa Géométrie de l'espace. M. Töplitz, en les établissant, montre leur connexion.

Dans l'introduction, il résout un problème touché par M. P. Serret dans sa *Géomérie de direction* : « Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que trois points donnés et trois plans correspondants soient pôles et plans polaires par rapport à une même surface du second ordre ? » Cette condition, ainsi que le faisceau de surfaces (*Flächenbüschel*) du second ordre qui y entrent, est donnée sous forme algébrique.

Le problème suivant est l'objet essentiel du Mémoire : « Sous quelle condition trois surfaces données du deuxième ordre peuvent-elles être regardées comme les surfaces polaires de trois points par rapport à une surface du troisième ordre ? Quelle est cette surface ? Où les pôles sont-ils situés ? » On trouve comme condition nécessaire pour l'existence de la surface du troisième ordre, condition à laquelle doivent satisfaire les trois surfaces du second ordre, un déterminant symétrique gauche d'ordre pair égalé à zéro. L'auteur détermine la racine carrée de ce déterminant, qui, comme on sait, est rationnelle. Cette condition étant supposée remplie, on obtient pour chacun des trois pôles une infinité simple de points situés sur une droite ; ces points sur les trois droites se correspondent homographiquement : l'auteur détermine la position de ces droites par rapport aux trois surfaces du second ordre ; il est amené ensuite à considérer la courbe gauche du troisième ordre qui est l'arête de rebroussement de la développable du quatrième ordre enveloppée par un plan passant par trois pôles correspondants, courbe qui, en vertu de la condition mentionnée, est en relation covariante avec le réseau des trois surfaces du second ordre.

([1]) *Mathematische Annalen*, t. XI, p. 434-463.

([2]) Ces propositions, que M. Frahm a publiées seulement en 1874, avaient déjà été données par M. Darboux en 1870. (Voir *Bulletin*, t. I, 1re série, p. 349-358.)

Pour démontrer que la condition trouvée est suffisante, on remarque qu'elle conduit à l'équation algébrique d'une surface du troisième ordre satisfaisant à la question; de cette surface on déduit une double infinité de surfaces ayant la même propriété. On obtient une autre solution du problème par la résolution d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, système qui s'intègre aisément par la méthode de MM. Mayer et Lie.

Quant aux combinants fondamentaux du réseau de surfaces du second ordre, l'auteur met nettement en évidence leur connexion avec le combinant qui constitue le premier membre de l'équation de condition. Celui-ci se présente comme une forme bilinéaire, facile à former, des coefficients des surfaces du second ordre et des coefficients du complexe de droites rencontrées par les surfaces du réseau en des points formant une involution. M. Rosanes a pris pour point de départ de deux Mémoires (*Math. Ann.*, t. VI, p. 268-312; *Journal de Crelle,* t. 76) un invariant de deux formes avec des variables contragrédientes qui est tout à fait analogue à celui dont s'occupe M. Töplitz.

Enfin cette condition est aussi la condition nécessaire et suffisante pour que les surfaces du réseau aient en commun un pentaèdre et par suite une infinité; en d'autres termes, pour que le premier membre de l'équation du réseau de surfaces du second ordre puisse être mis, d'une infinité de façons, sous la forme d'une somme de cinq carrés. Cette proposition se relie étroitement à un théorème intéressant de MM. Sylvester et Clebsch sur le pentaèdre d'une forme cubique quaternaire; mais M. Töplitz ne se sert point de ce théorème dont, au contraire, sa méthode fournit une démonstration nouvelle.

Tout ce travail est fait d'après les principes et les procédés de l'Algèbre moderne.

DU BOIS-REYMOND (P.). — UEBER DIE PARADOXEN DES INFINITÄRCALCULS.

M. Du Bois-Reymond s'est occupé du calcul des infinis relatifs dans un grand nombre de Mémoires insérés dans les *Annali di Matematica,* le *Journal de Crelle* et les *Mathematische An-*

nalen. Le travail dont il est ici question a un caractère en quelque sorte philosophique; voici le résultat essentiel de la première partie : Étant donné un nombre incommensurable A, on peut en approcher par une suite de nombres commensurables a_1, a_2, ..., a_p, ..., tels que la différence $A - a_p$ puisse être, en prenant p assez grand, rendue plus petite que toute quantité donnée, en sorte qu'il n'existe aucun nombre a qui approche plus de A qu'un terme suffisamment éloigné dans la série $a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots$. Les choses ne se passent pas de la même façon pour une fonction $\Phi(x)$ qui grandit indéfiniment; on ne peut pas en approcher par une suite de fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_p(x), \ldots$, qui jouent le même rôle vis-à-vis de $\Phi(x)$ que les nombres $a_1, a_2, \ldots$ vis-à-vis de A; il existera toujours une fonction $\varphi(x)$ telle que, si loin qu'on s'avance dans la série $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$, on n'y puisse trouver aucune fonction dont l'infini soit situé entre celui de $\Phi(x)$ et celui de $\varphi(x)$.

La seconde Partie du Mémoire est particulièrement consacrée à l'intégrale $\int_0^\alpha f(\alpha)\,d\alpha$, la fonction $f(\alpha)$ devenant infinie sans maxima ni minima pour $\alpha = 0$. L'auteur démontre qu'il est impossible de trouver aucune fonction qui marque la limite de cette intégrale.

FRISCHAUF (Dr J.), Professor an der Universität zu Graz. — ELEMENTE DER GEOMETRIE. 2. Auflage. — Leipzig, Teubner, 1877. 1 vol. in-8°, VIII-164 pages.

Le plan de cet Ouvrage diffère de celui qu'ont adopté jusqu'ici la plupart des auteurs. M. Frischauf a renoncé à la division habituelle des *Éléments de Géométrie* en Planimétrie, Stéréométrie et Trigonométrie. Dans le premier des cinq Livres qui composent son Traité, il prend pour point de départ la notion de la distance invariable de deux points, au moyen de laquelle, à l'exemple de Lobatchefsky, il définit d'abord la sphère, puis le cercle, intersection de deux sphères égales non concentriques. Il établit ensuite l'existence du plan, lieu des cercles intersections de deux sphères égales, de centres fixes et de rayon variable; puis la ligne droite, lieu des points du plan qui restent immobiles dans la rotation de la figure autour des deux points qui partagent un même cercle en deux parties égales : de là il déduit les propriétés fondamentales du plan et de la ligne droite.

Il expose ensuite l'usage des signes + et — pour distinguer les directions opposées suivant lesquelles un point peut parcourir une droite, ou un rayon tourner dans un plan autour d'un point fixe.

Une parallèle est définie comme la position limite d'une droite tournant autour d'un point fixe, et rencontrant une droite fixe à une distance infiniment grande. L'axiome de la théorie des parallèles est admis comme conduisant à des résultats en accord avec l'expérience.

Le reste du Livre I comprend les matières suivantes : Définition de l'angle dièdre; parallélisme et perpendicularité des droites et des plans; droites concourantes; projections.

Le Livre II est consacré à l'étude des figures les plus simples, au point de vue de l'égalité par superposition, de la symétrie et de l'équivalence, en commençant par le triangle, le quadrilatère, le cercle, les polyèdres (pyramides, prismes), puis terminant par le cône, le cylindre et la sphère. Toutes les propositions vraiment essentielles, relatives à ces figures, sont démontrées dans une cinquantaine de pages.

Le Livre III traite de la similitude des figures : les figures semblables sont définies au moyen du centre de similitude. Puissance d'un point par rapport à un cercle ou à une sphère, centre de similitude des cercles et des sphères. Pôles et polaires. Contacts. Projection stéréographique.

La Trigonométrie, qui fait le sujet du quatrième Livre, est divisée en Goniométrie, Trigonométrie plane et Trigonométrie sphérique. Les fonctions trigonométriques sont définies par les coordonnées rectangulaires d'un cercle de rayon égal à l'unité.

Le cinquième et dernier Livre contient la Géométrie métrique, et donne successivement les mesures des aires et des volumes des polygones, des polyèdres, du cercle, du cylindre et du cône.

L'Ouvrage est terminé par un Appendice, où l'auteur établit d'une manière élémentaire les développements des fonctions trigonométriques en séries.

On voit, par cet aperçu rapide, que, dans son mince volume, M. Frischauf a su condenser autant de matières qu'en contiennent souvent les Traités les plus volumineux, rédigés sous la forme antique que seuls les auteurs de livres sur la Géométrie élémentaire ont tenu à conserver depuis Euclide, quand toutes les autres sciences l'ont abandonnée, forme plus propre à soulager la mémoire qu'à éclairer l'intelligence, et dont nous félicitons M. Frischauf de s'être affranchi. Partout où il lui a été possible de le faire sans s'écarter de son cadre élémentaire, l'auteur a introduit les méthodes de la Géométrie nouvelle, à l'étude de laquelle son Livre offre une excellente préparation. J. H.