BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Problème de mécanique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 433-436

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_433_1>

MÉLANGES.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. G. DARBOUX.

Trouver la figure d'équilibre d'un fil flexible et inextensible non pesant, traversé par un courant et soumis à l'influence du pôle d'un aimant.

Rapportons le fil à trois axes rectangulaires, ayant leur origine O au pôle d'un aimant. Les composantes de l'action de ce pôle sur un élément ds du fil seront

$$\frac{\mu(y\,dz - z\,dy)}{r^3}, \quad \frac{\mu(z\,dx - x\,dz)}{r^3}, \quad \frac{\mu(x\,dy - y\,dx)}{r^3},$$

r désignant la distance de cet élément à l'origine et μ une constante; par conséquent, les équations d'équilibre du fil seront, en désignant par T la tension,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) + \mu\frac{y\,dz - z\,dy}{r^3} &= 0, \\ d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) + \mu\frac{z\,dx - x\,dz}{r^3} &= 0, \\ d\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right) + \mu\frac{x\,dy - y\,dx}{r^3} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ce sont ces équations qu'il s'agit d'intégrer.

En les multipliant par dx, dy, dz et les ajoutant, on obtient

$$dT = 0; \tag{2}$$

donc la tension est constante. Ce résultat était évident *a priori*, puisque la force appliquée à chaque élément est normale à cet élément.

Ajoutons maintenant les équations (1) après les avoir multipliées par x, y, z respectivement. Nous trouverons, en tenant compte de l'équation (2),

$$T\left(x d\frac{dx}{ds} + y d\frac{dy}{ds} + z d\frac{dz}{ds}\right) = 0. \tag{3}$$

Cette équation exprime que la normale principale en un point de la courbe d'équilibre est perpendiculaire au rayon vecteur de ce point, c'est-à-dire que *la figure d'équilibre est une ligne géodésique du cône ayant son sommet à l'origine et contenant cette courbe.*

Comme la précédente, cette proposition pouvait se prévoir *a priori*. L'action sur l'élément du fil est normale au cône passant par le fil et ayant son sommet à l'origine; or on sait que le plan osculateur de la figure d'équilibre doit contenir cette force : il est donc normal au cône précédent.

On peut du reste trouver trois intégrales premières des équations (1). Ajoutons, par exemple, la deuxième et la troisième de ces équations, après les avoir multipliées par $-z$, y respectivement. Nous aurons

$$d\left[T\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right)\right] + \mu\left(\frac{x\,dr}{r^2} - \frac{dx}{r}\right) = 0,$$

ou, en intégrant,

$$T\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\mu x}{r} + \alpha.$$

On aura, par des combinaisons analogues, deux autres intégrales premières qui, jointes à la précédente, constituent le système suivant :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{T}\left(y\frac{dz}{ds}-z\frac{dy}{ds}\right)=\mu\frac{x}{r}+\alpha,\\ &\mathrm{T}\left(z\frac{dx}{ds}-x\frac{dz}{ds}\right)=\mu\frac{y}{r}+\beta,\\ &\mathrm{T}\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)=\mu\frac{z}{r}+\gamma.\end{aligned}\right.$$

Multiplions ces équations par x, y, z respectivement et ajoutons-les. Nous aurons

$$(5)\qquad \mu r+\alpha x+\beta y+\gamma z=0.$$

C'est l'équation d'une surface contenant le fil en équilibre. Or cette surface est évidemment un cône de révolution, ayant son sommet à l'origine et d'ailleurs quelconque. On a donc le théorème suivant :

Si un fil flexible et inextensible non pesant traversé par un courant est soumis à l'action du pôle d'un aimant, sa figure d'équilibre sera une ligne géodésique d'un cône de révolution ayant son sommet au pôle de l'aimant.

Il ne nous reste, pour terminer, qu'à indiquer comment, étant données les positions des deux extrémités du fil et sa longueur totale, on déterminera le cône sur lequel il doit se trouver.

Soient A et B les deux extrémités du fil et l la longueur de ce fil; la question revient à construire un cône de révolution connaissant deux de ses génératrices OA, OB et la longueur l de la ligne géodésique qui réunit les deux points A et B.

Voici comment on peut résoudre ce problème. Je suppose le cône inconnu développé sur un quelconque de ses plans tangents. OA sera venu en Oa, OB en Ob et la figure d'équilibre se sera transformée dans la droite ab. On connaît donc les trois côtés du triangle Oab et, par conséquent, l'angle aOb. Ce point étant acquis, on est ramené au problème suivant :

Faire passer par deux droites OA, OB *un cône de révolution tel que, après le développement de ce cône sur un plan, l'angle des droites* AOB *se transforme en un angle de grandeur donnée.*

Soient α, β les points des droites OA, OB à une distance s de l'origine. La sphère ayant son centre au point O coupera le cône suivant un cercle. On connaît, à la fois, l'arc $\alpha\beta$ et la corde $\alpha\beta$ de ce cercle. En effet, l'arc $\alpha\beta$ se transforme dans le développement du cône en un arc de cercle et mesure l'angle que nous avons appelé aOb. La question est donc ramenée à construire un cercle connaissant la longueur d'un de ses arcs et de la corde de cet arc, problème qui conduit à une équation transcendante bien connue.