Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Ed. Dewulf

Essai d'une théorie géométrique des polaires inclinées

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 41-48

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_41_0>

ESSAI D'UNE THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES POLAIRES INCLINÉES;

PAR ED. DEWULF,
Commandant du Génie.

PREMIÈRE PARTIE.

I. Dans un travail inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, nous avons désigné sous le nom de *polaire inclinée* d'un point P, par rapport à une courbe C_n d'ordre n, une autre courbe d'ordre n passant par les points M de C_n, qui sont tels que la tangente en M à C_n fait un angle constant α avec le rayon PM, et nous avons démontré quelques propriétés de ces courbes par l'Analyse [1]. Nous nous proposons aujourd'hui de reprendre cette étude par la Géométrie pure et de la compléter.

Dans ce but, nous allons donner une nouvelle définition des polaires inclinées, qui aura sur l'ancienne l'avantage d'expliquer la propriété essentielle de chacun des points de ces courbes; nous dirons que *la polaire inclinée d'un point* P, *par rapport à une courbe algébrique* C, *est le lieu géométrique d'un point* M, *tel que la droite polaire ordinaire de* M, *par rapport à* C, *fait un angle constant* α *avec le rayon* PM.

La droite polaire ordinaire d'un point de C étant la tangente en ce point à cette courbe, on voit aisément que cette définition comprend celle que nous avons donnée précédemment.

Il faut observer que la polaire inclinée d'un point par rapport à une courbe, dans le cas où $\alpha = 0$, ne se confond pas, en général, avec la polaire ordinaire de ce point. Ainsi, la polaire inclinée d'un point P, par rapport à une circonférence dont le centre est O, dans le cas où $\alpha = 0$, est la circonférence décrite sur PO comme diamètre, tandis que la polaire ordinaire du même point P est la corde de contact des tangentes à la circonférence issues de ce point.

Il semble résulter de là que le nom de *polaire inclinée* donné aux courbes dont l'étude fait l'objet de cet essai est impropre, parce qu'il indique une certaine parenté entre ces courbes et les

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. XVIII, et 2e série, t. XI. Ce travail renferme quelques erreurs.

polaires ordinaires. Nous avons, en effet, adopté ce nom la première fois que nous nous sommes occupé de ces courbes, parce que la définition que nous en avions donnée alors n'était que la généralisation de celle des polaires ordinaires, due à Bobillier [1]; et nous avons cru pouvoir le conserver aujourd'hui, parce que la parenté, qui ne saute pas aux yeux d'abord, existe cependant, ainsi que cela ressortira de la suite de cette étude.

II. Soient l une droite quelconque et L un de ses points. Les droites qui font avec PL un angle α (compté toujours dans le même sens de rotation) déterminent, sur la droite i de l'infini, un point I. Les points de la première polaire ordinaire de I, par rapport à C_n, jouissent de cette propriété, que leurs droites polaires passent toutes en I, et font, par conséquent, avec LP l'angle constant α; cette courbe détermine $n-1$ points L' sur la droite l, et, quand le point L parcourt la droite l, le point I parcourt la droite i, ses premières polaires ordinaires forment un faisceau et déterminent sur l une involution de points L'. Puisque les premières polaires des points de i forment un faisceau, un point L' détermine une des courbes de ce faisceau, et, par suite, le pôle I de cette courbe et, par suite encore, l'unique droite passant par le point P qui fait un angle α avec la direction PI, et enfin un seul point L sur la droite l. Nous avons donc sur cette droite deux séries de points L et L', telles qu'à un point L correspondent $n-1$ points L', et qu'à un point L' il ne correspond qu'un seul point L; il y a n coïncidences des points L et L', c'est-à-dire n points L, tels que leur droite polaire, par rapport à C_n, fait un angle constant α avec PL. Donc :

La polaire inclinée d'un point P, *par rapport à une courbe* C_n, *est de l'ordre n.*

Il résulte de là que, *par tout point* P *du plan* C_n, *on peut mener* n^2 *droites qui coupent* C_n *sous un angle* α.

III. Si nous faisons passer la droite l par un point base O du faisceau des premières polaires des points de la droite de l'infini, et si nous répétons le raisonnement que nous venons de faire, nous voyons que, quels que soient l'angle α et le point P, ce point O se trouve sur la polaire inclinée. Donc :

[1] *Annales de Gergonne*, t. XVIII, p. 253.

Quel que soit l'angle α, *les polaires inclinées de tous les points du plan de* C_n *passent par les* $(n-1)^2$ *points polaires ordinaires de la droite de l'infini, par rapport à* C_n (1).

On voit de la même manière, en faisant passer la droite l par le pôle P, que :

La polaire inclinée d'un point passe par ce point, quel que soit l'angle α (2).

Les points à l'infini d'une polaire inclinée se déterminent comme ceux qui sont sur une droite quelconque. Soit I un point quelconque de la droite i de l'infini; la direction qui fait avec PI un angle α détermine un second point I', et la première polaire de I' coupe la droite i en $n-1$ points I''. Mais un point I'' détermine une courbe du faisceau des premières polaires des points de i, et, par suite, un seul point I' et un seul point I. Donc à un point I correspondent $n-1$ points I'', et à un point I'' il ne correspond qu'un seul point I. Si l'on remarque, en outre, que la position du point I et, par suite, celles des points I'' sont indépendantes de celle de P, mais que la position de I' et, par conséquent, celle de I'' varient avec α, on pourra énoncer le théorème suivant :

Les polaires inclinées de tous les points du plan d'une courbe C_n, *par rapport à cette courbe, ont les mêmes points à l'infini quand* α *est constant; mais ce groupe de n points varie avec* α.

On peut dire aussi, *quand* α *est constant, les polaires inclinées de tous les points du plan d'une courbe* C_n, *par rapport à* C_n, *ont leurs asymptotes parallèles ou sont homothétiques.*

Supposons maintenant que le pôle P passe à l'infini, et nommons-le I. Soient toujours l une droite quelconque et L un quelconque de ses points; traçons par le point L une droite qui fasse un angle α avec LI; elle détermine sur la droite i de l'infini un nouveau point I', et ce point ne varie pas avec L; tous les points de la première polaire ordinaire du point I' appartiennent donc à la polaire inclinée du point I. Mais, si l'on joint le point I à un point quelconque I_1 de la droite de l'infini, la droite polaire de I, qui a

(1) A l'avenir, quand nous dirons *pôle* ou *polaire*, il s'agira toujours du pôle ordinaire ou de la polaire ordinaire.

(2) Ces deux corollaires résultent aussi de ce que les droites polaires des points O sont indéterminées, et de ce que la direction du rayon PM est indéterminée quand M se confond avec P.

une direction déterminée, pourra être considérée comme faisant avec I_1 un angle α, puisque cette dernière direction est indéterminée. Donc :

La polaire inclinée d'un point de l'infini se compose de la polaire ordinaire d'un autre point de l'infini, qui varie avec α, *et de la droite de l'infini.*

On voit facilement que, *quand* $\alpha = 0$, *la polaire inclinée d'un point de l'infini se compose de la polaire ordinaire de ce point et de la droite de l'infini.*

On peut réunir en un seul énoncé les divers théorèmes précédents :

Les polaires inclinées, par rapport à une courbe C_n, *de tous les points du plan de cette courbe situés à distance finie passent par* $n^2 - n + 1$ *points fixes, quand l'angle* α *est constant. Ces points sont les* $(n-1)^2$ *points polaires de la droite de l'infini et* n *points de la droite de l'infini. Quand* α *varie, les* $(n-1)^2$ *points polaires de la droite de l'infini seuls restent fixes. Les polaires inclinées des points de l'infini se composent de la droite de l'infini et des polaires ordinaires d'autres points de l'infini, quand* α *a une valeur quelconque; mais, quand* $\alpha = 0$, *elles se composent de la droite de l'infini et des polaires ordinaires des mêmes points.*

IV. Soient un point fixe P, une courbe C_n et la polaire inclinée C_n^α de P par rapport à C_n. Les polaires inclinées C_n^α forment un faisceau, quand l'angle α prend toutes les valeurs possibles. Pour le démontrer, il suffit de faire voir qu'il ne passe qu'une seule de ces courbes par un point quelconque donné M. Joignons les points P et M, traçons une droite PI, qui fasse avec PM l'angle α. Les diverses valeurs de α donneront successivement tous les points I de la droite de l'infini. Or les premières polaires de tous ces points formant un faisceau, une seule de ces courbes passe par M, et, par suite, il n'y a qu'une seule valeur de α qui donne une polaire inclinée passant par M. Donc :

Les polaires inclinées d'un point P, *par rapport à une courbe fixe* C_n, *pour toutes les valeurs possibles de* α, *forment un faisceau.*

V. Soient une droite p et une courbe C_n. Quand le pôle P parcourt la droite p, ses polaires inclinées forment un faisceau; nous supposons, bien entendu, α constant. En effet, la direction qui forme un angle α avec p détermine un point I de i; la première polaire de I coupe p en $n-1$ points O, qui appartiennent évidemment tous à toutes les polaires inclinées en question. Ainsi, si nous prenons un point P de p, sa polaire inclinée par rapport à C_n passe par les $(n-1)^2$ points polaires de la droite de l'infini, par n points fixes à l'infini et par $n-1$ points fixes sur p, c'est-à-dire en tout par $n^2-2n+1+n+n-1=n^2$ points fixes. Donc :

Les polaires inclinées de tous les points d'une droite p, par rapport à une courbe C_n, *forment un faisceau dont les points bases sont les* $(n-1)^2$ *points polaires de la droite de l'infini, n points à l'infini et* $n-1$ *points sur la droite p.*

Si la droite p passe à l'infini, chacune des courbes du faisceau se décompose en une courbe d'ordre $n-1$, qui est une polaire ordinaire d'un point à l'infini et en la droite de l'infini, et *le faisceau des polaires inclinées se compose de la droite de l'infini et du faisceau des premières polaires ordinaires des points de la droite de l'infini.*

VI. Soient un point fixe O et une courbe C_n. Prenons un point quelconque P sur le plan de C_n, et tirons PO; la direction qui fait avec PO un angle α détermine un point I de la droite de l'infini; quand PO tourne autour de O, le point I parcourt la droite i, et parmi toutes les premières polaires des points I, il n'y en a qu'une seule qui passe par le point O. Le pôle I de cette courbe détermine une direction OI, dont chaque point est tel que sa polaire inclinée, par rapport à C_n, passe par le point O; or les polaires inclinées de tous les points d'une même droite forment un faisceau (V). Donc :

Les polaires inclinées des points d'un plan, par rapport à C_n, *qui passent par un point fixe* O, *forment un faisceau.*

La droite, qui porte les pôles des courbes de ce faisceau, s'obtient en traçant par le point O une droite qui fait un angle α avec la direction déterminée par le point de la droite de l'infini, dont la première polaire passe par le point O.

Si le point O est à l'infini, cette droite passe à l'infini, et le faisceau se compose des premières polaires ordinaires des points de l'infini.

VII. Puisque les polaires inclinées des points du plan qui passent par un point fixe forment un faisceau, deux points du plan déterminent entièrement une de ces courbes. Donc :

Les polaires inclinées de tous les points du plan d'une courbe C_n, *par rapport à cette courbe, forment un réseau.*

Et comme le pôle P suffit, à lui seul, pour déterminer une courbe du réseau, il s'ensuit que :

Le pôle équivaut à deux points pour la détermination d'une polaire inclinée.

VIII. Il est facile maintenant de résoudre le problème suivant : « Étant donnés deux points O_1 et O_2 du plan de C_n, déterminer le pôle de la polaire inclinée qui passe par ces deux points. »

Nous avons vu (VI) comment on peut tracer la droite, lieu des pôles des polaires inclinées qui passent par un point ; il suffit d'effectuer cette construction pour les deux points O_1 et O_2, et le point d'intersection des deux droites ainsi trouvées donne le point cherché.

On démontre aussi, sans difficulté, que les polaires inclinées de trois points non en ligne droite déterminent tout le réseau de ces courbes.

IX. Il est utile de compléter le théorème VI, en fixant nettement la position des points bases du faisceau des polaires inclinées qui passent par un point O_1. Nous avons vu que le lieu des pôles des courbes de ce faisceau est une certaine droite d passant par O_1 ; les polaires inclinées de tous les points de cette droite passent par $n-1$ points fixes O de d (le point O_1 est au nombre de ces points O), et un quelconque des points $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$ détermine le faisceau. Donc :

Les points bases du faisceau des polaires inclinées qui passent par un point O_1 *sont les* n^2-n+1 *points fixes du réseau, le point* O_1 *et* $n-2$ *points situés sur une droite déterminée passant par* O_1.

Remarquons que, parmi ces n^2 points bases, il y en a n^2-n+1 qui ne changent pas avec la droite, et $n-1$ qui varient avec elle. On peut désigner ces $n-1$ points sous le nom de *points polaires inclinés de la droite.* Ainsi les points polaires inclinés d'une droite sont les $n-1$ points fixes de cette droite, qui viennent s'ajouter aux n^2-n+1 points fixes du réseau, pour former les n^2 points bases du faisceau qui correspond à la droite.

Tout point de la droite de l'infini peut être considéré comme un point polaire incliné de cette droite.

X. Une courbe quelconque du faisceau des polaires inclinées des points d'une droite d coupe cette droite en n points; parmi ces n points, $n-1$ sont fixes : ce sont les points polaires inclinés de la droite, et un seul est variable avec la courbe. Ce $n^{\text{ième}}$ point est évidemment le pôle de la courbe, puisque ce pôle doit se trouver en même temps sur la droite et sur la courbe. Si ce point parcourt la droite, il vient se confondre successivement avec les $n-1$ points fixes $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$. Donc :

La courbe du faisceau déterminée par chacun des points $O_1, \ldots, O_{n-1}$ (ou plutôt par les points infiniment voisins de ces points) *est tangente à d en ce point.*

XI. La manière dont nous avons déterminé les points bases d'un faisceau montre que tous ceux de ces points qui ne sont pas à l'infini se trouvent sur une courbe d'ordre $n-1$. Cette courbe est la première polaire ordinaire d'un point à l'infini.

XII. Étant donnée une courbe C_n, par rapport à laquelle on prend la polaire inclinée d'un point P, supposons que P parcoure une autre courbe quelconque C_m, et soient P_1 et P_2 deux positions infiniment voisines de P. La droite P_1P_2 est tangente à C_m, et elle détermine un faisceau de polaires inclinées, par rapport à C_n. Les deux polaires inclinées infiniment voisines qui correspondent aux pôles P_1 et P_2 se coupent aux $n-1$ points fixes de la tangente P_1P_2, et ces points sont précisément les points polaires inclinés de cette tangente par rapport à C_n. Donc :

Quand le pôle parcourt une courbe quelconque C_m, *l'enveloppe de ses polaires inclinées, par rapport à* C_n, *se confond avec la courbe décrite par les* $n-1$ *points polaires inclinés des tangentes à* C_m *par rapport à la même courbe* C_n.

XIII. Nous allons déterminer le degré de cette courbe. Soit t une tangente quelconque à la courbe C_m, que nous supposons de la classe m. La direction qui fait un angle α avec t détermine un point I sur la droite de l'infini; la première polaire de I coupe la tangente t et une droite quelconque l, chacune suivant un groupe de $n-1$ points. Si un de ces $n-1$ points L de l se confondait avec un des $n-1$ points T de t, ce point serait un point d'intersection du lieu géométrique cherché avec la droite l. Cette coïncidence ne peut avoir lieu que si deux de ces points L et T se réunissent au point T′ d'intersection de t et de l. Puisque la courbe C_m est de la classe m, il y a m tangentes à cette courbe parallèles à t, et, par suite, m points T′. A un point L correspondent donc m points T′. D'un point T′ on peut mener m tangentes à C_m; chacune de ces tangentes détermine un point I, et, par suite, un groupe de $n-1$ points L. A un point T′ correspondent donc $m(n-1)$ points L, et le nombre des coïncidences des points L et T′ est $m(n-1)+m=mn$. C'est le degré cherché. Donc :

Le lieu géométrique des points polaires obliques de toutes les tangentes à une courbe de la classe m, par rapport à une courbe de l'ordre n, est de l'ordre mn.

Et aussi :

L'enveloppe des polaires inclinées des points d'une courbe de la classe m, par rapport à une courbe de l'ordre n, est une courbe C_{mn} de l'ordre mn.

Si la droite de l'infini est s fois tangente à la courbe de la classe m, la courbe C_{mn} se décompose en s fois la droite de l'infini et une courbe C_{mn-s} de l'ordre $mn-s$.

Si $m=1$, nous avons le théorème suivant, qu'il est facile d'établir directement :

Le lieu géométrique des pôles inclinés des rayons d'un faisceau de droites est la polaire inclinée du centre de ce faisceau [1].

---

[1] Il est intéressant de comparer ce théorème et quelques-uns de ceux qui précèdent à ceux qui ont été démontrés analytiquement par Bobillier, sur les polaires ordinaires, dans les *Annales de Gergonne*, t. XIX, p. 106 et suiv.