BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

ED. DEWULF

Essai d'une théorie géométrique des polaires inclinées, première partie (suite)

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 372-392
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_372_1>

MÉLANGES.

ESSAI D'UNE THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES POLAIRES INCLINÉES,

PREMIÈRE PARTIE (SUITE) ([1]);

PAR ED. DEWULF,

Commandant du Génie.

XIV. La polaire inclinée d'un point P passe par ce point; la droite polaire de P fait donc un angle α avec le rayon vecteur issu de ce point, c'est-à-dire avec la droite qui joint P au point infiniment voisin de la polaire inclinée. Donc :

([1]) *Voir* t. II, 2e série, p. 41-48.

La tangente à la polaire inclinée, au pôle P *de cette courbe, fait un angle égal à* $-\alpha$ *avec la droite polaire de* P *par rapport à* C_n.

Par suite, la polaire inclinée $C_n^{(\alpha)}$ d'un point de C_n, par rapport à cette courbe, la coupe, sur un angle $-\alpha$, au pôle P. Et quand $\alpha = 0$, la polaire inclinée d'un point d'une courbe, par rapport à cette courbe, lui est tangente en ce point. Enfin les polaires inclinées $C_n^{(\alpha')}$ et $C_n^{(\alpha)}$ d'un même point P, par rapport à C_n, se coupent en P sous un angle égal à $\alpha' - \alpha$.

Le théorème ci-dessus explique pourquoi le pôle équivaut à deux points pour la détermination d'une polaire inclinée (VII).

XV. On donne un faisceau F_n de courbes d'ordre n et une droite d; chaque point D de d détermine une courbe de F_n : quelle est l'enveloppe de la tangente en D à cette courbe, quand le point D parcourt la droite d ? La connaissance de cette courbe nous sera utile dans la suite.

Soit P un point quelconque du plan; ses premières polaires ordinaires, par rapport aux courbes de F_n, forment un faisceau F_{n-1} projectif avec le faisceau F_n. Les courbes correspondantes de ces deux faisceaux engendrent par leurs intersections une courbe de l'ordre $2n-1$, qui coupe la droite d en $2n-1$ points; la droite qui joint le point D à chacun de ces points est une tangente au lieu cherché, qui est donc *une courbe* Γ *de la classe* $2n-1$. Comme $2n-2$ courbes de F_n sont tangentes à la droite d, cette droite est une tangente multiple de l'ordre $2n-2$ de la courbe Γ; cette courbe est donc *unicursale, son genre p est égal à* 0.

La droite d coupe Γ en $4(n-1)$ points aux $2(n-1)$ points de contact et ne peut couper la courbe en aucun autre point, car, si elle la coupait en un autre point M, ce point serait l'intersection de deux tangentes infiniment voisines, menées à deux courbes du faisceau passant par ce point, ce qui est impossible. *La courbe* Γ *est donc de l'ordre* $4(n-1)$. La connaissance de la classe et du degré d'une courbe unicursale suffit pour déterminer ses autres singularités ordinaires. Ainsi :

Si l'on a un faisceau F_n *de courbes de l'ordre n et une droite d, et si l'on mène par chaque point de d la tangente à la courbe du* *faisceau déterminée par ce point, cette tangente enveloppe une courbe unicursale de la classe* $2n-1$, *de l'ordre* $4(n-1)$, *dont la droite* d *est une tangente multiple de l'ordre* $2(n-1)$, *qui a* $4(n-2)(2n-3)$ *points doubles,* $3(2n-3)$ *points de rebroussement, et qui n'a aucun point d'inflexion.*

Il est facile de voir que *les tangentes en* $n-1$ *des points de rebroussement passent par les* $n-1$ *points de* d *qui correspondent au point de l'infini dans l'involution marquée sur* d *par* F_n.

Si la droite d passe par un point O de la base de F_n, la courbe Γ se décompose en un point, le point O, et une courbe de la classe $2n-2$, de l'ordre $4n-6$, dont la droite d est une tangente multiple de l'ordre $2n-3$, et qui, par suite, est encore unicursale, et a $6(n-2)$ points de rebroussement et $4(n-2)(2n-5)$ points doubles.

Enfin, *si la droite* d *passe par* δ *points de la base de* F_n, *la courbe* Γ *se décompose en ces* δ *points et une courbe unicursale de la classe* $2n-1-\delta$, *dont la droite* d *est une tangente multiple de l'ordre* $2n-2-\delta$, *de l'ordre* $2(2n-2-\delta)$, *et qui a* $3(2n-3-\delta)$ *points de rebroussement et*

$$4(n-2)(2n-3)-8(n-1)\delta+2\delta^2$$

points doubles.

XVI. Il résulte du théorème précédent que :

Dans un faisceau F_n *de courbes d'ordre* n, *il y a* $2n-1$ *courbes qui coupent une droite donnée sur un angle donné.*

Ce théorème paraît être en contradiction avec un théorème connu dans le cas où $\alpha = 0$. Dans un faisceau F_n il n'y a, en effet, que $2(n-1)$ courbes tangentes à une droite donnée; mais il faut remarquer qu'il faut ajouter à ces courbes celle qui est déterminée par le point à l'infini de la droite pour avoir toutes celles qui coupent la courbe sous un angle nul. En effet, cette courbe coupe la droite sous un angle nul, et son asymptote au point à l'infini de la droite est parallèle à cette droite sans se confondre avec elle.

C'est encore ainsi que la polaire inclinée d'un point P, par rapport à une courbe C_n, coupe cette courbe en n^2 points, même dans le cas où $\alpha = 0$; mais alors n de ces points sont à l'infini sur C_n, et les droites qui les joignent au point P sont parallèles aux asymptotes de C_n, sans se confondre avec elles.

XVII. On donne deux faisceaux de courbes F_n et f_m, les unes de l'ordre n, les autres de l'ordre m, quel est l'ordre du lieu des points où une courbe du faisceau F coupe une courbe du faisceau f sous un angle constant α?

Soient d une droite quelconque, D un point d'intersection de cette droite avec le lieu cherché, β l'angle sous lequel la courbe de f_m, déterminée par le point D, coupe la droite d, la courbe de F_n, déterminée par ce même point, coupera d sous un angle $\beta + \alpha$. Il y a $2m - 1$ courbes du faisceau f_m, qui coupent d sous un angle β aux points $A_1, A_2, \ldots, A_{2m-1}$; il y a pareillement $2n - 1$ courbes du faisceau F_n qui coupent d sous un angle $\beta + \alpha$ aux points $B_1, B_2, \ldots, B_{2n-1}$; les groupes des points A et B forment deux involutions projectives, quand on fait varier β; ces deux involutions ont $2(m + n - 1)$ points correspondants communs, c'est-à-dire qu'il existe généralement $2(m + n - 1)$ points de la droite d, tels que, si l'on considère l'un d'eux comme appartenant à l'une des involutions, il appartient aussi au groupe correspondant de l'autre involution. Donc :

Le lieu géométrique des points où les courbes de deux faisceaux, les unes de l'ordre n et les autres de l'ordre m, se coupent sur un angle constant est de l'ordre $2(m + n - 1)$.

On voit, comme plus haut, qu'il faut diminuer ce chiffre d'une unité quand on veut que les courbes des deux faisceaux soient tangentes les unes aux autres, et que l'ordre du lieu géométrique est alors $2(m + n) - 3$.

En faisant $m = 1$ dans le théorème précédent, on trouve que :

Le lieu géométrique des pieds des obliques issues d'un point P *qui coupent sous un angle constant les courbes d'un faisceau d'ordre n est de l'ordre* $2n$.

Ce théorème peut s'énoncer comme il suit :

Le lieu géométrique des $2n - 1$ *points où les courbes d'un* *faisceau* F_n *coupent une droite sous un angle constant, quand la droite tourne autour d'un point fixe, est une courbe de l'ordre* $2n$.

On tombe sur des théorèmes connus en faisant $\alpha = 0$.

XVIII. Nous pouvons maintenant trouver combien il y a de courbes d'un faisceau F_n qui coupent une courbe donnée C_m sous un angle constant, égal à α.

Considérons la courbe C_m comme appartenant à un faisceau f_m; le lieu géométrique $\Gamma_{2(m+n-1)}$ des points où les courbes des deux faisceaux F_n et f_m se coupent sous l'angle α coupe la courbe C_m en $2m(m+n-1)$ points. Les points de la base du faisceau f_m se trouvent tous sur la courbe C_m et sur la courbe $\Gamma_{2(m+n-1)}$; ils sont, par conséquent, au nombre des $2m(m+n-1)$ points d'intersection de ces deux courbes. Soit M un quelconque des points autres que les points de la base de f_m; ce point, quel qu'il soit, détermine toujours la même courbe C_m du faisceau f_m, et la courbe de F_n qu'il détermine y coupe C_m sous l'angle α. Un point de la base de f_m, au contraire, ne détermine plus C_m, et c'est une autre courbe qui y est coupée sous l'angle α par la courbe de F_n qu'il détermine. Donc :

Le nombre des courbes d'ordre n *d'un faisceau* F_n *qui coupent sur un angle donné une courbe* C_m *d'ordre* m *est égal à* $m[m+2(n-1)]$.

Si $n = 1$, nous tombons sur un théorème connu.

Si $\alpha = 0$, le nombre des points où C_m est coupée sous un angle nul par les courbes de F_n est toujours $m[m+2(n-1)]$; mais on voit, comme plus haut, que :

Le nombre des courbes d'ordre n d'un faisceau, qui sont tangentes à une courbe d'ordre m, est égal à $m(m+2n-3)$ (¹).

XIX. Le théorème XIV, rapproché de la construction de la

(¹) M. de Jonquières a demontré (*Comptes rendus* du 21 mars 1864) que, dans un système (μ, ν) de courbes d'ordre quelconque, il existe $m(m\mu+\nu)$ de ces courbes qui coupent une courbe donnée de degré m sous un angle donné de grandeur et de sens de rotation.

droite qui porte les pôles des polaires inclinées, par rapport à une courbe C_n, qui passent par un point fixe O, construction indiquée au n° VI, montre que cette droite est précisément la tangente en O à la polaire inclinée de ce point.

Pour abréger le discours, nous nommerons cette droite *droite polaire inclinée* du point O par rapport à C_n; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

La droite polaire inclinée d'un point O, *par rapport à* C_n, *est la tangente en* O *à la polaire inclinée de ce point par rapport à la même courbe.*

La droite polaire inclinée du point O coupe la polaire inclinée de ce point en $n-2$ points différents de O; ces points sont, avec le point O, les points polaires inclinés de la droite. On peut aussi déduire le théorème ci-dessus du théorème X.

XX. Une courbe fondamentale C_n étant donnée, à une figure formée de points correspond une figure corrélative formée des droites polaires inclinées et telle qu'à un point de la première figure correspond, dans la seconde, une seule droite, et que cette droite passe par le point de la première, et à une figure formée de droites correspond une figure formée des points polaires inclinés, telle qu'à une droite de la première figure correspond un groupe de $n-1$ points de la seconde situés sur la droite de la première.

Quand, dans la première figure, une droite tourne autour d'un point fixe, ses points polaires inclinés, dans la seconde, parcourent la polaire inclinée du point fixe, c'est-à-dire une courbe de l'ordre n *qui passe par ce point.*

C'est le corollaire du théorème XIII, et nous allons voir que :

Si un point de la première figure parcourt une droite, sa droite polaire inclinée dans la seconde enveloppe une courbe unicursale de la classe n *dont la droite donnée est une tangente multiple de l'ordre* $n-1$.

En effet, la droite polaire inclinée d'un point P est la tangente en P à la polaire inclinée de ce point (XIX); or les polaires inclinées des points d'une droite forment un faisceau et $n-1$ points de la base de ce faisceau sont sur la droite; l'enveloppe cherchée est donc celle des tangentes aux points de la droite donnée aux polaires inclinées déterminées par ces points, et nous savons (XV) que cette enveloppe est de la classe n et est $n-1$ fois tangente à la droite.

XXI. Quand un point P parcourt une courbe de l'ordre n', quelle est l'enveloppe de sa droite polaire inclinée par rapport à C_n?

Désignons par y la classe de cette enveloppe C_y; si nous imaginons que la droite polaire inclinée du point P roule sur C_y, elle passera y fois par un point quelconque M; ses points polaires inclinés se trouveront donc y fois sur la polaire inclinée de M et ne pourront s'y trouver plus de y fois; cela veut dire que la valeur de y est égale au nombre des points d'intersection de cette polaire inclinée et de la courbe donnée d'ordre n'; donc $y = nn'$. Ainsi :

L'enveloppe des droites polaires inclinées des points d'une courbe de l'ordre n', par rapport à C_n, est de la classe nn'.

Quand une droite enveloppe une courbe de la classe m, quel est l'ordre du lieu géométrique de ses points polaires inclinés par rapport à C_n? D'après le théorème XIII, cet ordre est nn', et nous pouvons encore le démontrer comme il suit. Soient C_x le lieu géométrique cherché, x son degré. Supposons qu'un point X parcoure C_x; il rencontrera x fois une transversale quelconque; sa droite polaire inclinée sera donc x fois tangente à l'enveloppe des droites polaires inclinées des points de cette transversale, qui est de la classe n (XX); par hypothèse, le point X est un point polaire incliné de la tangente à la courbe donnée de la classe m : il y a donc x tangentes communes à deux courbes, l'une de la classe m, l'autre de la classe n; donc $x = mn$.

XXII. Reprenons le théorème IV, que l'on peut démontrer comme il suit. Il s'agit de faire voir que, par un point M du plan, il ne passe qu'une des polaires inclinées du point P. Or la droite polaire ordinaire de M par rapport à C_n est déterminée, et, par suite, l'angle de cette droite et de PM l'est aussi. Il n'y a d'exception que quand le point M coïncide avec l'un des $(n-1)^2$ points polaires ordinaires de la droite de l'infini, dont la droite polaire a une direction indéterminée; ces points appartiennent donc, ainsi que le point P, à la base du faisceau; les $n^2-(n-1)^2-1=2(n-1)$ autres points de cette base ne peuvent être réels.

Les polaires inclinées d'un point P, par rapport à une courbe fixe C_n, formant un faisceau, pour toutes les valeurs de α, il y a $2(n-1)$ courbes de ce faisceau tangentes à une droite, et en particulier à la droite de l'infini. Donc :

Parmi les courbes du faisceau des polaires inclinées d'un point, par rapport à une courbe fixe, pour toutes les valeurs de α, il y a généralement $2(n-1)$ qui ont une branche parabolique.

Ces courbes peuvent être imaginaires; nous aurons à revenir sur cette question. Dans le cas où $n=2$:

La base du faisceau des polaires inclinées d'un point P, *par rapport à une conique fixe C_2, pour toutes les valeurs de α, a deux points réels et deux points imaginaires; et, parmi les courbes de ce faisceau, il y a deux paraboles réelles quand C_2 est une ellipse; leurs axes sont parallèles aux diagonales du parallélogramme construit sur les axes de C_2; ces paraboles séparent le groupe des ellipses du faisceau de celui de ses hyperboles. Ces deux paraboles n'existent pas dans le cas où C_2 est une hyperbole ou une parabole. Dans tous les cas, le faisceau renferme une seule hyperbole équilatère.*

Ce théorème peut être démontré directement; mais, comme il est une conséquence naturelle de l'étude des polaires inclinées des coniques, nous renvoyons pour sa démonstration au n° XXVII.

XXIII. Le faisceau des polaires inclinées d'un point P, par rapport à une courbe C_n et pour toutes les valeurs de α, marque sur la droite de l'infini une involution du $n^{\text{ième}}$ ordre, et nous avons vu (III) comment on peut déterminer un groupe de ces points; nous allons présenter cette construction sous une forme un peu différente, qui nous conduira à de nouvelles conséquences.

Supposons que l'on fasse tourner un angle α autour d'un poin fixe quelconque; dans chacune de ses positions, ses côtés marqueront deux points I et I′ sur la droite de l'infini; ces points engendrent deux ponctuelles projectives dont les points doubles imaginaires sont les points circulaires de l'infini ([1]). A un point I correspondent les $n - 1$ points I″ où la première polaire ordinaire de I′ coupe la droite de l'infini, et à un point I″ ne correspond qu'un seul point I′ et, par suite, qu'un seul point I. Quand le point I′ se confond avec I_0, un des n points à l'infini de C_n, un des points I″ se confond avec I′, parce que la première polaire ordinaire d'un point d'une courbe, par rapport à cette courbe, passe en ce point; donc le point I″ ne peut jamais se confondre avec un point I en un point I_0, quand α a une valeur quelconque, et I″ coïncide avec I en tous les points I_0 quand $\alpha = 0$. Donc :

Les polaires inclinées, par rapport à C_n, ne sont généralement pas homothétiques avec C_n quand α a une valeur quelconque; elles le sont toujours quand $\alpha = 0$.

Si la courbe C_n est tangente à la droite de l'infini en un point I_1, les premières polaires ordinaires des points de la droite de l'infini passent toutes par I_1; ce point est donc un des $(n - 1)^2$ points polaires ordinaires de la droite de l'infini. Donc :

Quand C_n est tangente à la droite de l'infini en τ points, les polaires inclinées de tous les points du plan passent par ces τ points, quelle que soit la valeur de α.

Supposons maintenant qu'une des branches de C_n passe par un des points circulaires de l'infini, que nous désignerons par e et f, c'est-à-dire par un des points doubles e des ponctuelles projectives I et I′. Quand I se trouvera en e, les points I′ et I″ s'y trouveront aussi. Donc :

Quand C_n passe ρ fois par le point circulaire de l'infini e et σ fois par le point f, les polaires inclinées par rapport à C_n passeront toutes ρ fois par e et σ fois par f.

XXIV. Il résulte plusieurs conséquences de ces derniers théo-

([1]) Chasles, *Géométrie supérieure*, n° 652.

rèmes, et, quoique leur place soit plutôt dans la seconde partie de cet Essai, où il sera question des courbes douées de points multiples, nous allons les énoncer :

Quand C_n *passe* ρ *fois par* e *et* σ *fois par* f, *si* $\rho + \sigma = n$, *les polaires inclinées par rapport à* C_n *sont homothétiques avec cette courbe, quelle que soit la valeur de* α.

Les polaires inclinées par rapport à un cercle sont des cercles, quelle que soit la valeur de α.

Les polaires inclinées par rapport à une cubique circulaire sont des cubiques circulaires, quelle que soit la valeur de α.

Quand C_n *a* τ *branches paraboliques, on ne peut plus mener, par un point quelconque* P, *que* $n^2 - \tau$ *droites qui coupent* C_n *sous un angle constant.*

Quand C_n *passe* ρ *fois par un des points circulaires de l'infini et* σ *fois par l'autre, on ne peut plus mener par un point quelconque que* $n^2 - \rho - \sigma$ *droites qui coupent* C_n *sous un angle constant* (1).

Enfin le théorème III peut être complété comme il suit :

La polaire inclinée d'un point quelconque par rapport à une courbe C_n, *la plus générale de son degré, est généralement de l'ordre* n *et de la classe* n^2; *mais, si la courbe* C_n *a* τ *branches paraboliques, et si, en outre, elle passe* ρ *fois par un des points circulaires de l'infini et* σ *fois par l'autre, la classe de la polaire inclinée se réduit à* $n^2 - \tau - \rho - \sigma$.

XXV. Si des différents points d'une courbe C on mène des rayons formant des angles constants, égaux à α, avec les tangentes à C en ces points, le lieu des intersections de ces rayons est la *développée oblique* de la courbe (Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes*, p. 77).

Quelques-unes des propriétés des développées obliques découlent naturellement de la théorie des polaires inclinées ; nous allons les examiner.

---

(1) M. Chasles a démontré ces deux théorèmes par une autre méthode, *Comptes rendus* de 1871, p. 396.

Si la polaire inclinée d'un point P du plan de C, par rapport à cette courbe, la coupe en deux points infiniment voisins, le point P appartient à la développée oblique de la courbe C. On peut donc dire :

La développée oblique d'une courbe C_n *est le lieu géométrique des points dont les polaires inclinées sont tangentes à* C_n.

Les pôles des polaires inclinées tangentes à C_n jouent donc, dans la théorie des développées obliques, le rôle que jouent les centres des cercles osculateurs dans celle des développées ordinaires.

Soient maintenant P un point de la développée oblique de C_n, M le point où la polaire inclinée de P est tangente à C_n; à un point P ne correspond généralement qu'un seul point M, et à un point M ne correspond qu'un pôle P dont la polaire inclinée soit tangente en M à C_n; la courbe C_n et sa développée oblique portent donc deux séries projectives de points, comme cela résulte aussi de la première définition des développées obliques. D'après un théorème de Clebsch, il résulte (¹) de cette propriété que :

Une courbe et sa développée oblique sont du même genre.

Nous n'avons fait jusqu'ici aucune hypothèse sur la nature de la courbe C_n; nous allons supposer maintenant qu'elle soit la plus générale de son degré. Le cas d'une courbe quelconque douée de points multiples sera examiné dans la seconde partie de cet Essai.

XXVI. De ce qu'on peut mener par un point quelconque n^2 droites qui coupent la courbe C_n sous un angle α, il résulte que :

Une développée oblique d'une courbe de l'ordre n est de la classe n^2.

Les polaires inclinées de tous les points d'une droite forment un faisceau (V), et, parmi toutes les courbes d'un faisceau de l'ordre n, il y en a $3n(n-1)$ qui sont tangentes à C_n (XVIII); donc, sur toute transversale, il y a $3n(n-1)$ points dont les po-

(¹) *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, pel A. Cremona. Bologne, 1866, p. 44.

laires inclinées par rapport à C_n sont tangentes à cette courbe. Par suite :

Une développée oblique d'une courbe de l'ordre n est de l'ordre $3n(n-1)$.

Connaissant le genre p, la classe n^2 et l'ordre $3n(n-1)$ d'une développée oblique de C_n, les formules

$$\begin{aligned} 2p'-2 &= m'+r'-2n' \\ &= n'+i'-2m' \\ &= n'(n'-3)-2(d'+r') \\ &= m'(m'-3)-2(t'+i'), \end{aligned}$$

où p', n', m', r', t', d', i' représentent le genre, l'ordre, la classe, le nombre de points de rebroussement, celui des tangentes doubles, celui des points doubles et celui des points d'inflexion de la développée oblique (¹), nous donnent

$$i'=0, \quad r'=3n(2n-3), \quad t'=\tfrac{1}{2}n(n-1)[n(n+1)-3],$$

$$d'=\frac{n}{2}[3(n-2)(3n^2-5)+2n],$$

et nous savons déjà que

$$n'=3n(n-1), \quad m'=n^2 \quad \text{et} \quad p'=p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Nous pouvons trouver directement le nombre des points de rebroussement d'une développée oblique. M. de Jonquières a démontré, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1866, qu'il existe $\frac{1}{2}n(r+1)(2m+nr-3r)$ courbes C_m d'ordre m, qui ont un contact d'ordre r avec une courbe fixe C_n d'ordre n, et qui passent en outre par $\frac{n(n+3)}{2}-r$ points donnés. En faisant, dans cette formule, $r=2$ et $m=n$, on trouve le nombre $3n(2n-3)$ des courbes du réseau des polaires inclinées par rapport à C_n, qui ont avec cette courbe un contact du second

(¹) Ces formules, déduites de celles de Plücker, sont données dans la Géométrie de Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, p. 351.

ordre; donc *une développée oblique d'une courbe* C_n *a* $3n(2n-3)$ *points de rebroussement*. C'est bien le nombre que nous venons de trouver.

Une développée oblique de C_n a $3n(n-1)$ points à l'infini; il y a donc, dans le faisceau des polaires inclinées de la droite de l'infini, $3n(n-1)$ courbes tangentes à C_n. Or une courbe quelconque de ce faisceau se décompose (III) en une polaire ordinaire d'un point de la droite de l'infini différent du pôle de la polaire inclinée et en la droite de l'infini. Parmi les $3n(n-1)$ points à l'infini d'une développée oblique de C_n, il y en a donc un certain nombre x qui correspondent à x autres points à l'infini dont les polaires ordinaires sont tangentes à C_n; mais les polaires ordinaires des points de la droite de l'infini forment un faisceau d'ordre $n-1$; donc $x = 3n(n-2)$, et les points de contact de la polaire ordinaire et de C_n sont les points d'inflexion de cette courbe. Ce premier groupe de points à l'infini d'une développée oblique de C_n s'obtient donc en menant par les points d'inflexion de cette dernière courbe des droites faisant un angle α avec les tangentes d'inflexion.

Il reste $3n(n-1) - 3n(n-2) = 3n$ autres points de la développée oblique de C_n sur la droite de l'infini, et, pour ces $3n$ points, la droite de l'infini, qui fait partie de leur polaire inclinée, doit être considérée comme tangente à C_n; mais la droite de l'infini ne peut être tangente à C_n qu'aux n points à l'infini de cette courbe. A chacun de ces n points correspond donc un groupe de trois points infiniment voisins de la développée oblique, situés sur la droite de l'infini; en chacun de ces groupes, la développée oblique a donc deux tangentes confondues avec la droite de l'infini, ou, en d'autres termes, chacun de ces n groupes de trois points est un point de rebroussement de la développée oblique dont la tangente de rebroussement est la droite de l'infini.

Ainsi, parmi les $3n(2n-3)$ points de rebroussement d'une développée oblique, il y en a n à l'infini, et leur tangente de rebroussement est la droite de l'infini.

M. Halphen est parvenu à ce résultat par une voie entièrement différente, pour le cas des développées ordinaires, dans son *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques*, p. 74.

Nous pouvons observer que les n points de rebroussement à l'infini d'une développée oblique de C_n sont communs à toutes les développées obliques de cette courbe; ils se confondent, en particulier, avec les centres des cercles osculateurs aux n points à l'infini de C_n.

Ces divers résultats peuvent être réunis dans un seul énoncé :

La développée oblique d'une courbe C_n, *d'ordre* n, *a :* 1° n *points de rebroussement à l'infini qui restent fixes, quelle que soit la valeur de* α, *et qui ont la droite de l'infini pour tangente commune;* 2° $2n(3n-5)$ *points de rebroussement à distance finie;* 3° $\frac{1}{2}n(n-1)$ *tangentes doubles confondues avec la droite de l'infini;* 4° $\frac{1}{2}n(n-1)[n(n+1)-4]$ *tangentes doubles à distance finie;* 5° $3n(n-2)$ *asymptotes qui sont les droites menées par les points d'inflexion de* C_n *et faisant un angle* α *avec les tangentes d'inflexion.*

Puisque la développée oblique de C_n a $\frac{1}{2}n(n-1)[n(n+1)-3]$ tangentes doubles, dont $\frac{1}{2}n(n-1)[n(n+1)-4]$ sont à distance finie, on peut dire que :

Il y a $\frac{1}{2}n(n-1)[n(n+1)-3]$ *droites qui coupent* C_n *en deux points différents sous un même angle donné;*

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)[n(n+1)-4]$$

de ces droites sont à distance finie, les autres sont à l'infini.

Et, de ce qu'une développée oblique a

$$\frac{n}{2}[3(n-2)(3n^2-5)+2n]$$

points doubles, on conclut que :

Parmi les courbes du réseau des polaires inclinées prises par rapport à une courbe C_n *d'ordre* n, *il y en a*

$$\frac{n}{2}[3(n-2)(3n^2-5)+2n]$$

qui sont tangentes à C_n *en deux points différents.*

Ce nombre est bien celui que donne la formule de M. Bischoff, et qui est démontré dans le Mémoire de M. de Jonquières intitulé :

Théorèmes généraux sur les courbes géométriques planes (*Journal de Liouville*, 1861).

XXVII. Nous allons appliquer maintenant quelques-uns des résultats obtenus au cas où $n = 2$.

La polaire inclinée d'un point P, par rapport à une conique, est une conique passant par P. Il est facile de le voir directement. Nommons O le centre de C_2, M un point quelconque de la polaire inclinée de P : la droite polaire de M doit faire un angle constant α avec PM; donc le diamètre conjugué à OM doit faire le même angle constant α avec PM. Si nous désignons par M′ le point d'intersection de ce diamètre conjugué à OM avec PM, ce point M′ devra se trouver sur le segment capable de l'angle α décrit sur PO. Une fois ce segment décrit, il est facile de déduire de chacun de ses points M′ le point M correspondant de la développée oblique; il suffit de tracer OM′ et le diamètre conjugué à OM′, puis de prendre l'intersection M de ce diamètre conjugué avec PM′. Les faisceaux engendrés par les droites OM et PM sont projectifs; donc le point M décrit une conique qui passe par les points O et P, et dont la tangente en P est le rayon du faisceau P qui correspond au rayon OP du faisceau O, c'est-à-dire la droite qui joint le point P au point d'intersection avec le segment capable du diamètre de C_2 conjugué à OP. On voit que ce résultat concorde avec l'application du théorème XIV. De même, la tangente en O à la polaire inclinée est le diamètre de C_2 conjugué à la tangente en O au segment capable. On peut construire ainsi la polaire inclinée, point par point, au moyen du segment capable ou au moyen de l'hexagramme de Pascal.

On peut reconnaître immédiatement la nature de la polaire inclinée. Soit I un de ses points à l'infini; la direction PI fait un angle α avec le diamètre conjugué à OI; le diamètre OI et son conjugué font donc entre eux un angle α, et la polaire inclinée de P aura autant de points à l'infini que C_2 a de couples de diamètres conjugués faisant entre eux un angle α. Donc :

Si la courbe C_2 est une hyperbole ou une parabole, la polaire inclinée par rapport à cette courbe est toujours une hyperbole. Si C_2 est une ellipse, la polaire inclinée peut être une hyperbole, une parabole ou ellipse, suivant la valeur de α.

Supposons que C_2 ait deux couples de diamètres conjugués $a'b'$ et $a''b''$ tels que les angles $\widehat{a'b'}$ et $\widehat{a''b''}$ comptés dans le sens de a vers b soient positifs et égaux à $+\alpha$: les asymptotes de la polaire inclinée seront parallèles à a' et à a''.

On pourra remarquer qu'il existe une différence entre cette conclusion et ce que dit M. Chasles dans son *Traité des sections coniques*, p. 143, n° 221.

Le théorème précédent conduit facilement à celui qui concerne les coniques du n° XXII.

On voit encore que :

Si C_2 est une parabole, les polaires inclinées de tous les points du plan, quelle que soit la valeur de α, ont un point commun à l'infini sur la direction des diamètres de la parabole, et il résulte de là qu'*on ne peut mener par un point* P *que trois droites qui coupent la parabole sous un angle donné* (1).

Il résulte encore de ce qui précède que :

Si $\alpha = 0$, la polaire inclinée d'un point par rapport à C_2 est toujours de la même nature que C_2.

Si $\alpha = 90°$, et quelle que soit la nature de C_2, la polaire inclinée d'un point est toujours une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de C_2.

En effet, si l'on cherche les couples de rayons d'un faisceau en involution qui font entre eux un angle très-peu différent de 90 degrés, on trouve qu'il y a toujours deux solutions et que ces solutions se confondent quand $\alpha = 90°$.

On voit encore, en partant du tracé par le segment capable, que :

La polaire inclinée par rapport à un cercle est un cercle, quelle que soit la valeur de α (XXIV).

XXVIII. Nous savons que les polaires inclinées, par rapport à C_2, des points d'une droite d forment un faisceau. Les points de la base de ce faisceau sont le centre O de C_2, les deux points à l'infini communs aux polaires inclinées de tous les points du plan

(1) Chasles, *Traité des sections coniques*, n° 222, p. 245.

dont nous avons indiqué la construction et enfin un point D de la droite d, qui se trouve sur le diamètre de C_2 conjugué à la direction qui fait un angle α avec d (V). On sait que ce point D est le point polaire incliné de la droite d par rapport à C_2.

De cette construction résulte celle de la droite polaire inclinée de D par rapport à C_2. On peut dire :

Le point polaire incliné d'une droite d, par rapport à une conique, est l'intersection avec cette droite du diamètre de C_2 conjugué à la direction qui fait un angle α avec d.

La droite polaire inclinée d'un point D par rapport à une conique C_2 est la tangente de D à la polaire inclinée de ce point.

De ces théorèmes on déduit ceux-ci :

Quand une droite tourne autour d'un point fixe, son point polaire incliné par rapport à C_2 décrit la polaire inclinée du point fixe, qui est une conique passant par ce point.

Quand un point parcourt une droite d, sa droite polaire inclinée par rapport à une conique enveloppe une conique tangente à d.

Quand une droite enveloppe une courbe de la classe m, son point polaire incliné, par rapport à C_2, décrit une courbe de l'ordre $2m$.

Quand un point parcourt une courbe de l'ordre n, sa droite polaire inclinée, par rapport à une conique, enveloppe une courbe de la classe $2m$.

Ces derniers théorèmes vont nous donner, comme cas particuliers, des théorèmes démontrés par M. Chasles dans son Mémoire intitulé : *Propriétés relatives au déplacement fini quelconque dans l'espace d'une figure de forme invariable.* (*Comptes rendus*, 1860, p. 855.)

XXIX. Supposons que la conique C_2 soit un cercle; dans ce cas, le lieu géométrique des points polaires inclinés des tangentes à une courbe C_m de la classe m n'est autre chose que la podaire oblique du centre de ce cercle par rapport à C_m. Donc :

La podaire oblique ou le lieu géométrique des pieds des obliques abaissées d'un point O sous un angle constant de grandeur *et de sens de rotation sur les tangentes à une courbe* C_m *de la classe m est le lieu des points polaires inclinés, sous le même angle, des tangentes de* C_m, *par rapport à un cercle dont le centre est* O, *ou l'enveloppe des polaires inclinées sous l'angle* α *des points de* C_m *par rapport à un cercle ayant son centre en* O, *et cette courbe est de l'ordre* $2m$.

On peut dire encore :

Si l'on décrit sur les rayons vecteurs, menés d'un point fixe O *à tous les points d'une courbe* C_m *de la classe m, des segments capables d'un angle constant* α, *la courbe enveloppe de ces cercles se confond avec le lieu des pieds des obliques abaissées sous un angle constant* α *du point fixe* O *sur les tangentes à* C_m, *et cette enveloppe est de l'ordre* $2m$.

Le premier des théorèmes XXVIII nous donne encore ce cas particulier :

Quand le sommet d'un angle constant α, *dont un côté tourne autour d'un point fixe* O, *glisse sur une courbe d'ordre n, l'autre côté enveloppe une courbe de la classe* $2m$.

On reconnaît dans les théorèmes ci-dessus les théorèmes des §§ 23, 24 et 26 du Mémoire précité, et l'on voit que nous démontrons l'identité des courbes des §§ 24 et 26.

XXX. Une développée oblique d'une conique est de la quatrième classe du sixième ordre; elle n'a pas de points d'inflexion, ni de branches infinies réelles; elle a deux points de rebroussement à l'infini, quatre points de rebroussement à distance finie, deux tangentes doubles à distance finie et une à l'infini.

Nous allons déterminer directement le nombre des points de rebroussement d'une développée oblique d'une conique; cette recherche nous amènera à résoudre un problème de Géométrie intéressant, dont voici l'énoncé :

On donne une conique Γ_2 et trois points fixes quelconques A, B, C; par ces trois points on peut toujours mener une conique tangente à Γ_2 en un point donné P de cette courbe. Cette conique, que nous désignerons par $(ABC\bar{P})$, coupe généralement Γ_2 en deux points M et N différents de P, et, pour qu'elle ait un contact du second ordre avec Γ_2, il faut et il suffit que la corde MN passe en P. Le problème de savoir combien il y a, dans un réseau de coniques circonscrites à un triangle donné ABC, de courbes ayant un contact du second ordre avec une conique donnée Γ_2, revient donc à savoir combien de fois la corde MN passera par le point P, quand on fera parcourir à celui-ci la conique donnée. Nous sommes conduits ainsi à chercher l'enveloppe de MN.

Désignons par t la tangente en un point donné P à Γ_2. La conique formée par les droites t et MN et les coniques $(\mathrm{ABC}\overline{\mathrm{P}})$ et Γ_2 sont circonscrites à un même quadrilatère (dont un des côtés est infiniment petit); donc, d'après le théorème de *Desargues*, elles marquent une involution sur une transversale quelconque, et les involutions qu'elles tracent sur deux transversales sont projectives. Traçons les droites PA et PB, qui coupent la conique Γ_2 en A′ et B′ et la corde MN en M′ et N′; les points P, M′, A, A′ et P, N′, B, B′ sont des points correspondants de deux involutions projectives, et, comme le point P est commun aux deux groupes, les droites M′N′, AB et A′B′ concourent en un même point, c'est-à-dire que la corde MN passe par le point de concours des droites AB et A′B′. Nommons C′ l'intersection de la droite PC avec la conique Γ_2; on verra de la même manière que MN passe par les points de concours des droites AC et A′C′, BC et B′C′. Les triangles ABC et A′B′C′ sont homologiques, et la corde MN est leur axe d'homologie. On peut énoncer le théorème suivant :

Si l'on projette d'un point P *d'une conique* Γ_2 *trois points fixes* A, B, C *en* A′, B′, C′ *sur cette conique, la corde commune à la conique* Γ_2 *et à la conique circonscrite au triangle* ABC *et tangente en* P *à* Γ_2 *est l'axe d'homologie des triangles* ABC *et* A′B′C′.

Ceci posé, nous allons nous appuyer sur les lemmes suivants:

Si l'on joint un point P d'une conique Γ_2 à deux points fixes A et B, la corde A′B′, déterminée par les côtés de l'angle APB, enveloppe une conique (A′B′) doublement tangente à Γ_2 aux points où cette courbe est coupée par la droite AB (Poncelet, *Propriétés projectives*, 1822, p. 245).

Réciproquement, si l'on mène une tangente A′B′ à une conique

(A′B′) doublement tangente à une conique Γ_2 aux points où elle est coupée par une transversale AB, un des points diagonaux du quadrilatère ABA′B′ se trouve sur la conique Γ_2.

Dans la question qui nous occupe, chacun des côtés du triangle A′B′C′ enveloppe donc une conique doublement tangente à Γ_2 aux points $C_1 C_2$, $B_1 B_2$, $A_1 A_2$, où les côtés AB, AC, BC du triangle ABC coupent Γ_2. L'axe d'homologie de ces triangles est déterminé par les intersections C″ de AB et A′B′ et B″ de AC et A′C′. Or, à un point P de Γ_2 correspond un seul point C″ et un seul point B″; et, si nous prenons un point C″ de AB, on peut mener par ce point deux tangentes à la conique (A′B′), et chacune de ces tangentes détermine un point P; donc, à un point C″ correspondent deux points B″; on voit de la même manière qu'à un point B″ correspondent deux points C″. Donc la droite B″C″ enveloppe une courbe de la quatrième classe. Ainsi *l'enveloppe cherchée est de la quatrième classe.*

Quand le point C″ de AB se confond avec le point A, il y a deux points B″ sur AC; cette dernière droite est donc doublement tangente à la courbe; on verrait de même que les côtés AB et AC sont doublement tangents à la courbe; donc *les trois côtés du triangle* ABC *sont doublement tangents à l'enveloppe.* Il résulte de là que cette courbe est unicursale ou que son genre p est nul. Les formules que nous avons données au numéro XXVI nous apprennent que la courbe a six points de rebroussement, quatre points doubles, et qu'elle n'a aucun point d'inflexion.

Remarquons, en passant, que cette courbe a les mêmes singularités ordinaires qu'une développée oblique de conique; comme cette remarque peut conduire à d'autres investigations, nous allons l'énoncer nettement : *Le lieu géométrique des points dont les polaires inclinées, par rapport à une conique* C_2, *sont tangentes à* C_2, *et l'enveloppe des cordes communes à ces courbes et à* C_2, *sont des courbes douées des mêmes singularités.*

Quand le point C″ de AB vient en C_1 (un des points d'intersection de AB et de Γ_2), les deux tangentes à la conique (A′B′) issues de C″ se confondent en une seule, les deux points P correspondants se confondent aussi en C_2, et les deux axes d'homologie correspondants sont infiniment voisins ou coïncident avec la tangente en C_1 à Γ_2. Donc les tangentes à Γ_2 aux six points d'intersection, réels ou imaginaires, de cette conique avec les côtés du triangle ABC, sont les tangentes de rebroussement de l'enveloppe cherchée. Réunissons ces diverses propriétés en un seul énoncé :

Si l'on projette d'un point P *d'une conique* Γ_2 *trois points fixes* A, B, C *en* A', B', C' *sur cette conique, l'enveloppe de l'axe d'homologie des triangles* ABC *et* A'B'C', *quand le point* P *parcourt la conique* Γ_2, *se confond avec l'enveloppe des cordes communes à* Γ_2 *et aux coniques circonscrites au triangle* ABC *et tangentes à* Γ_2, *et cette courbe est de la quatrième classe, du sixième ordre; elle n'a pas de points d'inflexion, elle est doublement inscrite au triangle* ABC, *elle a quatre points doubles et six points de rebroussement. Les tangentes de rebroussement sont les tangentes à* Γ_2 *aux points d'intersection de cette courbe et des côtés du triangle* ABC.

Ces tangentes de rebroussement sont donc imaginaires par couples, si un, deux ou les trois côtés du triangle ne coupent pas Γ_2.

Supposons maintenant que nous voulions trouver le nombre des points de rebroussement d'une développée oblique de Γ_2; nous savons que ce nombre est égal à celui des polaires inclinées qui ont un contact du second ordre avec Γ_2. Ces polaires inclinées sont circonscrites à un triangle. Soit P un point de Γ_2; il y a une conique du réseau des polaires inclinées qui est tangente à Γ_2 en P, et il faut trouver combien de fois la corde commune MN à ces deux coniques passe par le point P, quand celui-ci parcourt la conique Γ_2. A un point P de Γ_2 correspondent deux points M (M ou N); et, comme par un point M on peut mener quatre tangentes à la courbe enveloppe de MN, à un point M correspondent quatre points P. Il y a donc $4+2=6$ coïncidences des points P et M, et une développée oblique d'une conique à six points de rebroussement (¹).

(¹) Le lecteur est prié de faire les corrections suivantes :

Page 43, biffer la note (²) au bas de la page.

Page 48, ligne 16, lire *points polaires inclinés*, au lieu de *points polaires obliques*.

» ligne 28, lire *points polaires inclinés*, au lieu de *pôles inclinés*.