Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 357-372

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_357_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KOWALSKI, professeur d'Astronomie à l'Université de Kazan. — RECHERCHES SUR LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE. Kazan, 1878; in-8°, XI-172 pages.

Les nombreuses théories de la réfraction que l'on possède aujourd'hui s'accordent toutes pour assigner des valeurs presque identiques aux réfractions dont la connaissance est vraiment indispensable aux astronomes, c'est-à-dire aux réfractions relatives à des distances zénithales qui n'excèdent pas 80 degrés. C'est que, jusque vers 80 degrés, la loi suivant laquelle on fait décroître la densité des couches atmosphériques n'a que très-peu d'influence sur le résultat, de sorte que l'hypothèse simple de Cassini, qui suppose la densité constante, suffit déjà pour obtenir des nombres sensiblement exacts. Il n'en est plus de même pour les réfractions qui s'opèrent plus près de l'horizon. Les valeurs de la réfraction horizontale moyenne, adoptées dans les tables les plus répandues, présentent des différences qui vont jusqu'à 80 secondes, et, en comparant ces tables aux observations, il n'est pas rare de rencontrer des écarts de 100 et 200 secondes lorsqu'il s'agit d'astres observés à moins de 1 degré de l'horizon.

Cette imperfection manifeste de la théorie continue de préoccuper les géomètres et de les exciter à de nouveaux efforts. Peu d'années après la publication du travail historique de M. Bruhns, qui avait tenté de résumer l'état de la question, on a vu paraître deux théories nouvelles, celle de M. Bauernfeind (1864) et celle de M. Gyldén (1865); cette dernière a été comparée, par M. Fuss, à une longue série d'observations instituées spécialement pour cet objet à l'Observatoire de Poulkova. Enfin, voici un travail très-important sur le même sujet que vient de publier M. Kowalski, directeur de l'Observatoire de Kazan. M. Kowalski ne s'est pas borné à exposer une nouvelle théorie qui lui a servi à construire des tables d'un usage très-commode; on trouve encore dans son Mémoire des matériaux d'observation extrêmement précieux, en raison de l'étendue des limites entre lesquelles a varié la température (+ 29° et — 38°C.). La partie théorique témoigne d'une étude approfondie du sujet; on y rencontre beaucoup de remarques judicieuses et *suggestives*, pour nous servir d'un mot anglais qui rend bien notre pensée. C'est, en somme, un travail d'une sérieuse valeur, où nous regrettons seulement d'avoir rencontré quelques méprises que nous signalerons en passant.

M. Kowalski commence par établir les formules fondamentales sur lesquelles repose la théorie des réfractions astronomiques aussi bien que la mesure des hauteurs par le moyen du baromètre. Mais, à la place de l'équation bien connue

$$dp = -g\rho\left(\frac{a}{a+h}\right)^2 dh,$$

qui exprime la condition d'équilibre de l'atmosphère en tenant compte de la variation de la gravité dans la verticale, il adopte la suivante :

$$dp = -g\rho\, dh,$$

parce que, selon lui, la colonne d'air qui agit sur le baromètre a la forme d'un *cône* dont le sommet se trouve au centre de la Terre, et dont l'élargissement compense la diminution de la pesanteur. C'est là une conception erronée qui remonte à G.-S. Ohm et qui a été abandonnée depuis longtemps, car elle suppose que l'air se comporte comme un liquide enfermé dans un vase. Heureusement, la correction due à la variation de la pesanteur est sans importance pour le calcul de la réfraction; mais il faut en tenir compte dans la formule barométrique, et c'est à tort qu'elle y a été négligée (p. 12). M. Kowalski s'efforce encore de démontrer que, si l'on conserve le facteur $\left(\frac{a}{a+h}\right)^2$, la pression p ne peut plus s'annuler à la limite de l'atmosphère; il est facile de s'assurer que cette objection n'est pas fondée (si la démonstration de M. Kowalski était exacte, elle s'appliquerait à *toutes* les formules barométriques).

Avant d'exposer sa nouvelle théorie de la réfraction, fondée sur une hypothèse particulière concernant le décroissement de la température, M. Kowalski entre dans une discussion intéressante des principales théories anciennes, et il établit notamment des rapprochements instructifs entre les théories de Laplace, d'Ivory, de Lubbock, de Bessel, de Gyldén.

Si l'on fait abstraction des artifices particuliers auxquels ont recours ces divers géomètres pour obtenir la valeur de l'intégrale définie qui exprime la réfraction, on peut dire que les différences qui existent entre leurs théories viennent uniquement de la loi suivant laquelle chacun d'eux fait décroître la densité de l'air. Or, le décroissement de la densité est intimement lié au décroissement de la température, de sorte qu'on peut aussi classer les diverses théories d'après la forme de la fonction qui représente le rapport $\frac{T}{T_0}$ des températures absolues qui correspondent à l'altitude h et au niveau de la mer. Schmidt et Bauernfeind supposent que la température décroît d'une manière uniforme à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère, ce qui revient à poser

$$\frac{T}{T_0} = 1 - Ah.$$

M. Gyldén, à son tour, fait

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 - \frac{1}{2} Ah\right)^2.$$

Ivory admet que la température de l'air varie exactement comme sa densité, et il pose

$$1 - \frac{T}{T_0} = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Lubbock adopte, pour la fraction $\frac{T}{T_0}$, une loi moins simple, dont nous parlerons plus loin.

Bessel (qui, d'ailleurs, n'a fait qu'approprier à son usage la théorie de Kramp) donne à la même fonction une forme exponentielle, qui conduit à une forme analogue pour le rapport $\frac{\rho}{\rho_0}$,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{h}{m}}.$$

Dans cette hypothèse, la densité décroît donc en progression géométrique, comme dans l'hypothèse de Newton ; mais le décroissement est moins rapide, parce que, chez Bessel, la température diminue lentement, tandis que Newton la suppose constante. L'hypothèse d'Ivory conduit à la relation suivante entre la densité ρ et l'altitude h :

$$\frac{h}{l} = -\frac{7}{9}\log\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{4}{9}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right),$$

qui représente une sorte de combinaison de la progression géométrique et de la progression arithmétique. Laplace emploie également une combinaison de ce genre, mais sous une forme qui facilite singulièrement l'intégration de la différentielle

$$\frac{\sin z\, d\rho}{\sqrt{\cos^2 z + 2u}},$$

qui représente l'élément de la réfraction, et dans laquelle

$$u = \frac{h}{a} - \alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Au lieu d'exprimer la densité ρ en fonction de h, Laplace l'exprime directement en fonction de la variable u, qui diffère très-peu de $\frac{h}{a}$; il pose

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + f\frac{u}{m}\right) e^{-\frac{u}{m}},$$

et il détermine les deux constantes m, f, de manière à reproduire une valeur donnée de la réfraction horizontale. M. Kowalski fait voir qu'en déterminant ces constantes d'une manière un peu différente on peut faire coïncider la théorie de Laplace avec celle d'Ivory; il suffit pour cela de prendre

$$m = 0,0008641, \quad f = 0,3356,$$

au lieu de faire, avec Laplace,

$$m = 0,0007418, \quad f = 0,4904.$$

En développant les formules de Laplace et en modifiant ses constantes comme il vient d'être dit, on trouve en effet

$$1 - \frac{T}{T_0} = 0,2224\omega - 0,0150\,\omega^2 + \ldots,$$

tandis que, dans la théorie d'Ivory, on a

$$1 - \frac{T}{T_0} = 0,2222\,\omega,$$

où ω désigne la différence $1 - \frac{\rho}{\rho_0}$. On voit que les deux théories doivent donner à peu près le même résultat. L'abaissement de la température, qui se déduit des formules ci-dessus, est d'environ 1 degré C. par 170 mètres dans les couches basses, mais il se ralentit progressivement, et, vers 9000 mètres, il n'est plus que de 1 degré C. par 350 mètres. Ce ralentissement se retrouve dans les observations de M. Glaisher; seulement il y est beaucoup plus marqué. Les réfractions que M. Kowalski a calculées à l'aide des formules d'Ivory et de Laplace sont presque identiques, ainsi qu'on le voit par les nombres suivants, qui se rapportent à la température de 10 degrés C. et à la pression de 762 millimètres :

z.	Ivory.	Laplace.
45°	$58'',36$	$58'',36$
85	594,1	594,1
88	1102,4	1102,4
89,5	1731,6	1731,9
90	2074,7	2075,2

M. Kowalski a calculé une table complète des réfractions d'après l'hypothèse d'Ivory, en poussant l'approximation beaucoup plus loin que ne l'avait fait Ivory, qui néglige des termes ayant encore une influence sensible quand la température s'écarte de la température moyenne adoptée par lui. Les réfractions moyennes que l'on trouve dans cette table représentent en même temps les réfractions que fournit la théorie de Laplace lorsqu'on y introduit les nouvelles valeurs des constantes déterminées par M. Kowalski. Les réfractions moyennes de Lubbock et celles de M. Gyldén n'en diffèrent pas non plus beaucoup; mais celles de Bessel sont sensiblement plus fortes dans le voisinage de l'horizon. La réfraction horizontale qui correspond à la température de 10 degrés C. est, d'après Bessel, de 2194 secondes. Les Tables postérieures, où Bessel a remplacé, à partir de 85 degrés, ses nombres théoriques par des nombres empruntés directement à l'observation, donneraient encore une réfraction horizontale de 2118 secondes, plus forte de 43 secondes que celle que fournit la théorie d'Ivory.

Peu satisfait de la manière dont ces cinq théories représentent les observations de Kazan, M. Kowalski s'est décidé à entreprendre la construction de tables nouvelles, fondées sur une théorie entièrement différente. Il fait d'abord remarquer que les hypothèses qui servent de base aux théories précédentes sont choisies de telle sorte que le rapport $\frac{T}{T_0}$ puisse toujours être représenté par une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de h,

$$\frac{T}{T_0} = 1 - Ah + Bh^2 - \ldots,$$

où le premier terme seul (Ah) ait une influence sensible sur la réfraction. Or, les observations de M. Glaisher sembleraient indiquer que le décroissement de la température suit souvent une loi très-différente. M. Kowalski est parvenu à représenter ces observations par une formule qui peut s'écrire comme il suit :

$$\frac{T_0}{T} - 1 = k\omega^{\frac{5}{7}}.$$

Pour la température moyenne de 62 degrés Fahr. ($T_0 = 521°$), on a $k = 0,1871$. Voici quelques nombres qui donneront la mesure de l'accord obtenu :

Hauteur.	Pression.	Abaissement $T_0 - T$. observé.	Abaissement $T_0 - T$. calculé.	Différence.
pi	po	° F.	° F.	° F.
0	30,04	0,0	0,0	0,0
1000	29,05	6,2	6,2	0,0
5000	25,10	20,9	21,6	— 0,7
10000	20,72	33,6	35,0	— 1,4
15000	17,13	43,8	44,5	— 0,7
20000	14,16	52,4	51,7	+ 0,7
25000	11,44	58,1	58,1	0,0
29000	9,75	61,8	61,9	— 0,1

Assurément, l'approximation avec laquelle la formule représente les observations est très-suffisante; mais les nombres relatifs aux couches les plus élevées sont trop incertains pour qu'il y ait lieu d'étendre la loi jusqu'à la limite de l'atmosphère et d'en conclure la température qui règne dans les couches voisines de cette limite. Ajoutons que le résultat auquel on arrive ainsi paraît *a priori* inadmissible, car, en faisant $\omega = 1$ dans la formule ci-dessus, on trouve $T_0 - T = 82°F.$, ce qui donne $-20°F.$ ($-29°$ C.) pour la température des dernières couches de l'atmosphère, qui serait ainsi plus élevée que les températures qu'on observe très-fréquemment dans les régions polaires. M. Kowalski conclut néanmoins de sa formule que

$$k = \frac{T_0}{T_n} - 1,$$

où T_n est la température *invariable* de la limite de l'atmosphère, de sorte que le coefficient k varie avec T_0. En désignant par t_0 la température de la surface, exprimée en degrés centigrades, et en prenant $T_n = 273 - 29 = 244$, on aurait

$$k = \frac{t_0 + 29}{244}.$$

Pour l'état de l'atmosphère qui correspond à la température de 30°, 8, observée par Gay-Lussac au début de son ascension aérostatique, on trouverait $k = 0{,}245$, et il s'ensuivrait qu'à la hauteur de 10000 pieds Gay-Lussac aurait dû observer un abaissement de 25 degrés C. (45 degrés F.) au lieu de 18 degrés C. (33 degrés F.); l'écart est ici de 7 degrés C. (12 degrés F.). M. Kowalski a encore comparé sa formule aux moyennes mensuelles que fournissent les observations de Genève et du Saint-Bernard; mais tout ce qu'on peut légitimement conclure de ces comparaisons, c'est qu'en général le décroissement de la température est plus rapide en été qu'en hiver. Au reste, les réfractions observées à Kazan l'ont conduit à augmenter fortement la valeur du coefficient k; en définitive, M. Kowalski prend

$$k = \frac{t_0 + 45}{228},$$

en supposant que la température des dernières couches de l'atmosphère est de 45 degrés C. au-dessous de zéro.

Si M. Kowalski s'était contenté de présenter sa formule comme une expression assez approchée de la loi empirique qui se dégage des observations de M. Glaisher, nous n'y trouverions rien à redire; mais il prétend la déduire des principes de la « Mécanique rationnelle », comme une conséquence nécessaire de la Théorie mécanique de la chaleur, et l'on va voir quelle étrange application M. Kowalski a faite de cette théorie. Rappelons d'abord qu'une première tentative pour établir par des considérations théoriques la loi du décroissement de la température avait été faite par Lubbock en

1855 ; sa formule peut s'écrire

$$\frac{T_0}{T} - 1 = k\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right],$$

où k est une constante qui diffère peu de $0,5$. Lubbock y arrive en supposant que la quantité de chaleur Q absorbée par 1 kilogramme d'air est une fonction linéaire de la température T,

$$Q = a + bT,$$

et, en combinant cette équation avec l'équation de Laplace,

$$Q = A + BT\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

où $\gamma = 1,4$ est le rapport des deux chaleurs spécifiques.

Les deux équations ne sont pas contradictoires (comme le veut M. Kowalski); mais elles reposent toutes les deux sur des suppositions arbitraires, car l'équation de Laplace ne satisfait pas d'une manière générale à l'équation différentielle qui détermine la chaleur Q. La formule de Lubbock n'est donc autre chose qu'une formule d'approximation empirique. M. Kowalski la remplace par la suivante :

$$\frac{T_0}{T} - 1 = k\omega^{\frac{1}{\gamma}},$$

où $\frac{1}{\gamma} = \frac{5}{7}$. La discussion des observations de M. Glaisher montre, en effet, que la dépression du thermomètre $T_0 - T$ n'est pas proportionnelle à ω, comme le veut l'hypothèse d'Ivory, mais à une puissance de ω voisine de $\omega^{\frac{2}{3}}$. Soit maintenant v le volume spécifique : on aura

$$\omega = 1 - \frac{v_0}{v},$$

et, de plus,

$$\frac{pv}{p_0 v_0} = \frac{T}{T_0}.$$

En tenant compte de ces relations, la différentiation de l'équation ci-dessus donne

$$\gamma p_0(v - v_0)\,dT = (T - T_0)\,p\,dv.$$

C'est cette équation différentielle que M. Kowalski s'est efforcé d'établir *a priori* par les considérations suivantes ; ne pouvant en donner un résumé intelligible, nous sommes obligés de citer textuellement. La théorie de la chaleur fournit d'abord l'équation connue

$$dQ = c_0 dT + \frac{pdv}{E},$$

où c_0 est la chaleur spécifique sous volume constant.

« Cette formule montre que le travail élémentaire pdv est produit par l'excès de l'énergie calorique entière EQ sur celle qui est dépensée pour échauffer le gaz à une certaine température. Soit Q_0 cette dernière quantité de chaleur, et EQ_0 l'énergie calorique correspondante : on aura

$$E(Q - Q_0)pdv$$

pour la valeur du moment virtuel respectif. Quand le gaz n'est pas libre de se dilater et de produire le travail externe, toute la chaleur Q que le gaz reçoit sera dépensée pour augmenter la température sous un volume constant et, par cela même, pour accroître sa force élastique ; le moment virtuel correspondant à ce dernier cas aura la valeur $EQvdp$.

» Cela posé, concevons l'unité de poids de l'air atmosphérique faisant équilibre avec l'air environnant, et supposons qu'on y ajoute une quantité Q de chaleur. Soient p la pression, v le volume de l'air que nous considérons, et qu'à partir de cet état l'équilibre soit troublé, et que l'air, en se dilatant d'une quantité infiniment petite dv, donne du travail externe produit par la force élastique $E(Q - Q_0)$. Pour que l'équilibre, à chaque instant, soit rétabli, il est nécessaire que la détente de l'air soit compensée par la perte d'une partie de son élasticité, ce qui exige que la somme des moments virtuels $E(Q - Q_0)pdv$ et $EQvdp$, abstraction faite des signes, soit nulle. On aura donc

$$(Q - Q_0)pdv + Qvdp = 0. \text{ »}$$

En tenant compte de la relation $pv = CT$, on tire de là

$$CQdT = Q_0 pdv.$$

Comme on le voit, M. Kowalski appelle *moments virtuels* des produits qu'il forme en multipliant un travail EQ par un travail pdv; c'est comme si l'on évaluait une dépense de chauffage en *multipliant* le prix du charbon par le prix des allumettes. Quoi qu'il en soit, il s'agit maintenant de déterminer les quantités de chaleur Q, Q_0. M. Kowalski suppose donc que l'air s'échauffe fortement au contact du sol, puis s'élève et se dilate aux dépens de la chaleur ainsi gagnée, sans en rien perdre par rayonnement. « La chaleur Q est consommée à la surface de la Terre sous la pression constante p_0, et cette chaleur est dépensée en tout pour l'expansion successive de l'air dans son trajet, en partant du volume v_0 correspondant à la pression p_0 pour arriver au volume final v. » L'équation

$$C dQ = c_0 v dp + c_1 p dv,$$

où $c_1 = \gamma c_0$ est la chaleur spécifique sous pression constante, donne dès lors

$$Q = \frac{c_1}{C} p_0 (v - v_0).$$

Quant à la chaleur Q_0, elle est « consommée sous un volume constant. Cette chaleur n'est absorbée qu'à la surface de la Terre; donc, si nous désignons par T_0 la température de la couche inférieure de l'air, nous aurons

$$Q_0 = c_0 (T - T_0).$$

Nous admettons ici que la différence $T - T_0$ est positive. » En substituant ces valeurs de Q et de Q_0 dans l'équation trouvée plus haut, on a

$$c_1 p_0 (v - v_0)\, dT = c_0 (T - T_0)\, p\, dv;$$

c'est l'équation différentielle qu'il s'agissait d'établir. Mais que faut-il entendre ici par la température T? La phrase qui vient d'être citée semble indiquer que c'est la température qui résulte de l'échauffement de l'air; mais l'emploi qu'on fait de l'expression de la chaleur Q_0 veut que T soit la température finale à laquelle l'air arrive en se dilatant, de sorte qu'elle serait à la fois supérieure et inférieure à T_0. Puis M. Kowalski paraît distinguer la chaleur qui échauffe de la chaleur qui travaille, comme s'il y avait deux espèces de chaleur ayant des attributs différents. N'insistons pas; il est évident, pour nous, que cette singulière théorie a été imaginée après coup pour justifier une formule empirique.

S'il s'agissait de mettre en équation cette hypothèse, qu'une masse d'air, ayant reçu la chaleur Q sous la pression constante p_0, se dilate ensuite sans variation de chaleur jusqu'à atteindre la pression p et la température T qui conviennent à un certain niveau atmosphérique, on aurait pour la première phase

$$Q = c_1 (T_1 - T_0),$$

et pour la seconde

$$\frac{T_1}{T} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{2}{7}},$$

où T_1 est la température qui résulte de l'échauffement préalable. L'élimination de T_1 donne

$$\frac{Q}{c_1} = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{2}{7}} - T_0;$$

c'est l'équation de Laplace, qui n'est vraie que dans ce cas particulier. En supposant la température T_1 très-peu différente de T_0, ces formules s'accorderaient avec les résultats de M. Glaisher vers 2500 pieds d'altitude; mais, au delà de ce niveau, il faudrait supposer des températures T_1 de plus en plus élevées pour arriver à représenter les températures T par l'hypothèse en question, qui se trouve ainsi écartée par une conséquence inadmissible. Si l'on réfléchit d'ailleurs au rôle important que joue la vapeur d'eau dans les phénomènes météorologiques des couches inférieures, il ne paraît guère possible d'expliquer la distribution de la chaleur dans ces couches sans tenir compte de l'humidité atmosphérique. C'est dans cette dernière voie que sir William Thomson, M. Peslin, M. Mendeléief, ont cherché la solution du problème. Il ne faudrait pas non plus perdre de vue que le décroissement de la température varie beaucoup dans le cours d'une journée. Dans ses ascensions de 1877, M. Glaisher a trouvé, pour les premiers 1000 pieds, une diminution de 7°,5 à 10 heures du matin et 2°,8 vers 7 heures du soir; pendant la nuit, la température, loin de décroître, augmente souvent avec la hauteur, jusqu'à un certain niveau. Or, ces variations doivent exercer une forte influence sur la réfraction dans le voisinage de l'horizon. Il est probable qu'elles ne se font sentir que dans les couches inférieures de l'atmosphère, mais cela suffit pour changer la valeur de la réfraction, qui sera d'autant plus faible que le décroissement de la température sera plus accentué. Le décroissement rapide adopté par M. Kowalski donne, pour la température de 10 degrés C., une réfraction horizontale d'environ 32 minutes, tandis que la théorie de Bessel, qui suppose un décroissement très-lent, donne 36′,5.

Pour obtenir les valeurs numériques des réfractions, M. Kowalski emploie, jusqu'à 80 degrés de distance zénithale, le développement en série ordonnée suivant les puissances impaires de tang z, et, à partir de 80 degrés, une série plus convergente qu'il se procure en posant $1 - \omega = e^{-x}$, ce qui ramène le problème à la détermination de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{a^2\cos^2 z + x + \Phi}},$$

où

$$\Phi = -\frac{k\omega^{\frac{5}{7}}}{1 + k\omega^{\frac{5}{7}}} - \int \frac{k\omega^{\frac{5}{7}}}{1 + k\omega^{\frac{2}{7}}}\,\frac{d\omega}{1-\omega} - s\omega.$$

En développant le radical en série ordonnée par rapport aux puissances de Φ, on peut calculer cette intégrale à l'aide des fonctions ψ employées par Kramp, Bessel, Laplace, etc. Le procédé ne laisse pas d'être laborieux. On aurait des formules plus simples en remarquant que les observations de M. Glaisher sont représentées tout aussi bien par la formule

$$1 - \frac{T}{T_0} = 0{,}104\,\omega + 0{,}069\sqrt{\omega}.$$

Mais M. Kowalski n'a point reculé devant la longueur des calculs, et il a construit : 1° trois tables de réfractions appropriées au calcul logarithmique, l'une d'après la théorie d'Ivory, en remplaçant le coefficient $\frac{2}{9}$ par

$$\frac{t_0 + 45}{273},$$

les deux autres d'après sa propre théorie, avec les deux valeurs du coefficient k que l'on trouve plus haut; 2° une quatrième table, qui est une transformation de l'une des précédentes, par laquelle on évite l'emploi des logarithmes. Voici quelques nombres tirés de cette table; ils représentent les réfractions correspondant à une température de t degrés centigrades et à une pression de $76 + \zeta$ centimètres.

z.	Réfractions.
$80^\circ.\ 0'$	$331'',35 - t(1,27 - 0,0047t) + \zeta(4,40 - 0,0170t)$
$85.\ 0$	$616,4 - t(2,58 - 0,0100t) + \zeta(8,29 - 0,035\ t)$
$89.\ 0$	$1529,0 - t(9,63 - 0,0498t) + \zeta(21,72 - 0,148\ t)$
89.40	$1884,3 - t(14,44 - 0,0978t) + \zeta(27,37 - 0,232\ t)$

Cette table est d'un usage très-commode, mais elle suppose un état de l'atmosphère assez éloigné de l'état moyen. M. Kowalski paraît être lui-même de cet avis, car il semble dire (p. 109) que l'hypothèse d'Ivory représente mieux cet état moyen. Quoi qu'il en soit, le travail de M. Kowalski sera fort utile à ceux qui voudront entreprendre de nouvelles recherches sur les réfractions atmosphériques.

R. Radau.

BOCKWOLDT (G.). — Ueber die Enneper'schen Flachen mit constantem positivem Krümmungsmaas, bei denen die eine Schaar der Krümmungslinien von ebenen Curven gebildet wird. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde an der Georg-Augusts Universität zu Göttingen. Göttingen, W.-Fr. Kästner, 1878, in-8°, 32 pages.

Parmi les géomètres allemands, M. Enneper est, avec Joachimsthal, presque le seul qui se soit constamment occupé de Géométrie infinitésimale, et plus particulièrement de cette branche de la Science, cultivée avec tant de zèle par les géomètres français, qui trouve son origine dans le Mémoire de Lagrange sur les cartes géographiques, et surtout dans celui de Gauss. M. Bockwoldt, qui est sans doute un des élèves de M. Enneper, vient d'étudier, dans sa *Dissertation inaugurale,* les surfaces à courbure constante positive, découvertes il y a dix ans par cet habile géomètre. Bour, on le sait, dans son *Mémoire sur les surfaces applicables,* a montré que l'on peut toujours déterminer des surfaces hélicoïdes applicables sur une surface de révolution, et, en particulier, sur une sphère. En dehors des surfaces de révolution applicables sur la sphère anciennement connues et des surfaces hélicoïdes découvertes par Bour, on ne connaît, croyons-nous, d'autres surfaces à courbure constante positive que celles auxquelles est consacré le travail dont nous rendons compte, travail qui contient une discussion très-détaillée et très-bien faite de ces surfaces. Donnons d'abord le théorème fondamental qui sert de base à cette recherche.

Si une surface à courbure constante positive a un système de lignes de courbure planes, les plans de ces lignes passent tous par une droite fixe T. Les lignes de courbure du second système sont alors sphériques, et les sphères qui les contiennent coupent la surface orthogonalement. Leurs centres se trouvent sur la droite T. Réciproquement, les surfaces pour lesquelles les lignes de courbure ont la relation indiquée sont à courbure constante positive.

Voici, du reste, quelles sont les formules définissant la surface. Soient u et v les variables indépendantes, et u_1, v_1 deux fonctions définies par les équations

$$g^2 \frac{du_1^2}{du^2} = \mathrm{A}\cos 2u_1 - \mathrm{C} - 1,$$

$$g \frac{dv_1^2}{dv^2} = \mathrm{C} - \mathrm{A}\cos 2v_1.$$

Posons, en outre,

$$\frac{d\varphi^2}{du_1^2} = \frac{\mathrm{A}^2 - \mathrm{C}^2}{(\mathrm{A}\cos 2u_1 - \mathrm{C} - 1)(\mathrm{A}\cos 2u_1 - \mathrm{C})^2}.$$

On aura, pour les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de la surface, les expressions

$$x = \rho\cos\varphi,$$

$$y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho = \frac{g}{\sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{C}^2}} \frac{\sqrt{\mathrm{A}\cos 2u_1 - \mathrm{C}}}{\sin(u_1 + v_1)},$$

$$\sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{C}^2}\,.\,z = g\cot(u_1 + v_1)\sqrt{\mathrm{C} - \mathrm{A}\cos 2v_1} + \int_0^{v_1} g\sqrt{\mathrm{C} - \mathrm{A}\cos 2v_1}\,.\,dv_1,$$

g^2 désignant la courbure totale.

L'auteur discute ces formules, ramène à la forme normale de M. Weierstrass les intégrales elliptiques qui y figurent. Il étudie aussi celle des surfaces parallèles à la proposée pour laquelle la courbure moyenne est constante. Enfin, il termine par la discussion détaillée et numérique du cas où l'on a $\mathrm{A} = 2$, $\mathrm{C} = 0$. L'auteur a même présenté un modèle en plâtre construit d'après les données numériques calculées pour cet exemple spécial. G. D.

HEINE (E.). — Handbuch der Kugelfunctionen. Theorie und Anwendungen. Erster Band. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Berlin, G. Reimer, 1878; in-8°, 484 pages.

La théorie des fonctions sphériques offre, dans sa partie élémentaire, le sujet d'études le plus propre à intéresser un jeune géomètre, à lui faire connaître, dans leur application à un sujet intéressant, les méthodes de Calcul intégral, les fractions continues et la théorie des séries. Aussi, depuis longtemps, l'Ouvrage que M. Heine a publié en 1861, et où sont rassemblés avec beaucoup de soin et beaucoup d'ordre tous les résultats de la théorie des fonctions sphériques, était connu et très-apprécié des nombreux géomètres qui ont eu à s'occuper de ces fonctions. Les méthodes de Legendre, de Laplace, de Dirichlet, de Lamé et de M. Liouville, ainsi que celles qui sont propres à l'auteur, y étaient exposées d'une manière très-complète, et M. Heine avait réussi à composer une monographie comme nous serions heureux d'en avoir sur bien des sujets de Mathématiques.

Depuis 1861, la théorie des fonctions sphériques a reçu des accroissements de différents côtés; les beaux travaux de M. Tchebychef et de M. Heine lui-même nous ont beaucoup appris sur l'application des fractions continues au Calcul intégral; ceux de M. Hermite, publiés dans ces derniers temps sur le même sujet, offrent à notre admiration les premières applications d'une Méthode susceptible de nombreuses conséquences. D'un autre côté, les méthodes de Cauchy ont commencé à pénétrer dans la théorie des fonctions de Legendre et de Laplace. Si l'on tient compte en même temps du nombre des Mémoires qui, dans ces dernières années, sont venus accroître nos connaissances sur les différentes parties de ce sujet, on reconnaîtra que le Traité primitif de M. Heine, sans cesser d'être utile, était devenu incomplet, et qu'une nouvelle édition de cet Ouvrage devait contenir plusieurs Chapitres nouveaux.

Parmi les additions les plus importantes, nous citerons la théorie des séries trigonométriques (p. 53-64). L'auteur l'expose d'une manière détaillée en employant les travaux de Dirichlet, Riemann, et ceux de MM. du Bois-Reymond, Cantor, Ascoli et Dini.

Un autre Chapitre complémentaire, très-intéressant, est consacré à la série hypergéométrique généralisée, celle qui est définie par la formule

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,\xi) = 1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)}q^\xi + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^\alpha)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}q^{2\xi} + \ldots.$$

Ces additions et quelques autres sont distinguées du texte et placées à la fin du Chapitre; mais il y en a un très-grand nombre qui font corps avec le reste de l'Ouvrage. Nous citerons les recherches de MM. Hermite et Fuchs sur l'équation de Lamé, les travaux de M. Heine sur le développement en fraction continue de l'intégrale $\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$. Le cinquième Chapitre de l'Ouvrage, où on les trouvera développés, est entièrement consacré à la théorie des fractions continues.

En résumé, l'Ouvrage de M. Heine, dans sa nouvelle édition, rendra les plus grands et les plus réels services, et nous en recommandons vivement l'étude à tous ceux qui s'occupent de la théorie des fonctions sphériques. G. D.