BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 265-284

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_265_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BRUNS (Dr. HEINRICH), a. o. Professor der Mathematik an der Universität Berlin. Publication des Königl. Preussischen Geodätischen Institutes. — DIE FIGUR DER ERDE. Ein Beitrag zur europäischen Gradmessung. — Berlin, 1878. In-4°, 49 pages.

Dans un article publié au *Journal des Savants* (novembre 1874) et réimprimé au tome IX du *Bulletin*, M. Bertrand a signalé les différents points de vue qui ont présidé aux travaux des géodésistes occupés à mesurer le globe terrestre et à en déterminer la forme définitive; on y trouve un abrégé de l'histoire du problème et les différents résultats obtenus jusqu'à nos jours. Après avoir indiqué, à la fin du Mémoire, combien de difficultés la Science aura encore à vaincre, l'illustre savant termine l'article par ces paroles : « Les mesures géodésiques pourront conduire un jour à de telles déterminations; mais, si nombreuses et si exactes qu'elles soient, elles laisseront aux géomètres un problème des plus difficiles, qui certainement aujourd'hui dépasse de bien loin les ressources de la Science, et nous pouvons, après soixante ans de travaux incessants et dignes des plus grands éloges, répéter les paroles que Delambre écrivait en 1806 : « Les deux questions de la grandeur et de la figure » de la Terre, qui exercent depuis longtemps les astronomes et les » géomètres, paraissent de nature à n'être jamais épuisées ».

Le travail dont nous venons de transcrire le titre paraît comme une amplification des idées de M. Bertrand : désireux d'apprendre si les moyens nécessaires et suffisants pour une solution exacte du problème sont réellement fournis par les mesures effectives exécutées par nos astronomes et géodésistes, M. Bruns étudie et approfondit la question de toute part et parvient ainsi à une conclusion très-satisfaisante pour la théorie : c'est qu'il n'est pas nécessaire de compléter les diverses classes des mesures effectives par d'autres nouvelles, mais qu'il n'est pas non plus permis d'en négliger aucune.

La définition de la surface de la Terre ne se restreint à aucune surface idéale de Géométrie; M. Bruns n'insiste que sur les données de la Terre telle qu'elle est en vérité : comme l'existence d'un potentiel de la Terre est incontestable, il appelle, d'après M. Listing, *géoïde* une quelconque des surfaces de niveau et en fait ressortir la thèse que le problème à résoudre ne consiste pas à déterminer un géoïde particulier passant par un certain point fixe (qui serait toujours assujetti à un choix arbitraire), mais qu'il faut plutôt déterminer en définitive l'ensemble de tous les géoïdes quand on veut parvenir à une connaissance exacte de la figure de la Terre. Nous ajouterons les paroles de l'auteur qui servent d'introduction au Mémoire et qui révèlent ses idées fondamentales:

« Les recherches faites jusqu'à présent sur la figure mathématique de la Terre, à moins qu'elles ne soient d'une nature purement géométrique, sont fondées sur les résultats des mesures de degrés et sur ceux des observations du pendule. A cet effet, on a établi pour point de départ l'hypothèse : 1° que la surface des océans peut être regardée comme partie d'une seule surface analytique fermée, assujettie à une simple loi de formation; 2° que les normales de cette surface coïncident avec la direction de la pesanteur dans tous les points qui entrent en considération pour les mesures. En général, on a adopté un ellipsoïde de rotation pour cette surface, qui est désignée alors comme la figure mathématique cherchée de la Terre; cependant il faut remarquer que le choix d'une autre surface assujettie à une loi assez simple de génération ne ferait que changer les préceptes du calcul, mais qu'il n'altérerait point l'idée fondamentale essentielle de toute la méthode; d'où il résulte que le problème de la Géodésie scientifique se réduirait à déterminer les constantes ou paramètres qui entrent dans l'équation de cette surface, à un point tel que les mesures soient satisfaites rigoureusement ou, quand il y en a un nombre excédant, du moins avec le plus haut degré d'approximation. On connaît le résultat obtenu par les différents travaux qui, en reposant sur ces idées, ont combiné l'effectif des observations disponibles, résultat que l'on peut énoncer succinctement comme il suit : « 1° L'ellipsoïde de rotation est une première approximation suffisamment exacte pour la plupart des cas; 2° les contradictions qu'il y a entre l'hypothèse et la mesure, quoique toujours minimes, sont dans bien des cas telles qu'elles ne permettent plus qu'on les attribue aux fautes d'observation, c'est-à-dire que les fautes de l'hypothèse sont mensurables. »

Ce dernier résultat pouvait bien être soupçonné, même avant que, dans son Mémoire connu, Walbeck eût fait la première tentative pour déterminer la forme de la Terre, en faisant usage de l'ensemble des mesures appropriées au calcul qui existaient alors; car la surface des océans et sa continuation idéale au-dessous des continents ne saurait appartenir en toute rigueur à aucune surface assujettie à une simple loi de formation, proposition qui résultait déjà avec la plus grande probabilité de la composition irrégulière de la partie accessible de la croûte terrestre; et, de plus, il s'ensuivrait que les déviations de la verticale causées par ces irrégularités se prêtent, dans quelques cas, à une mesure exacte; car les tentatives pour se servir de ces mêmes déviations pour évaluer la densité moyenne de la Terre avaient une heureuse issue. Les expériences faites depuis nous ont même montré qu'on peut généraliser ce résultat en disant que les déviations perceptibles du fil à plomb seront d'autant moins l'exception et d'autant plus la règle, que nos observations seront devenues plus délicates.

Or la détermination de la figure de la Terre n'a pas, jusqu'à nos jours, mis à profit ces déviations de la verticale; on les a traitées en fautes accidentelles, et l'on s'est contenté d'en constater l'existence et la petitesse. Le géodésiste s'y était placé, à peu de chose près, comme un astronome chargé de discuter des observations actuelles de planètes à l'aide des théories des perturbations empruntées à la période antérieure à Laplace. Les solutions du problème de la Géodésie qu'on a données jusqu'à présent sont aussi incomplètes, vu qu'elles n'épuisent pas l'effectif du matériel numérique et qu'elles renoncent à démêler les contradictions entre l'hypothèse et l'expérience. Reste à constater si ce défaut est seulement accidentel ou s'il est nécessaire. Évidemment il serait purement accidentel si, en résolvant le problème, on pouvait se passer de toute supposition hypothétique et assujettie à une vérification *a posteriori*; de l'autre côté, il serait nécessaire, quand, sans être complétées par des hypothèses additionnelles, les données empiriques en elles-mêmes seraient insuffisantes pour en faire ressortir la solution. La discussion de cette question fait l'objet du Mémoire actuel et conduit au résultat suivant : les données empiriques des mesures de degrés, définitivement terminées jusqu'à présent, ne suffisent pas, en effet, pour en tirer, abstraction faite de toute hypothèse auxiliaire, la figure de la Terre, soit en entier, soit en partie. Cependant la mesure des degrés européens dispose en vérité de tous les moyens qu'il faut à la théorie pour découvrir, indépendamment de toute supposition hypothétique sur la loi de formation de la figure mathématique de la Terre, la surface géométrique du globe dans l'étendue de l'aire recouverte par ses réseaux. Ces moyens sont fournis par les classes suivantes de mesures :

1° Déterminations astronomiques de points sur la Terre (hauteurs du pôle, longitudes, azimuts);

2° Triangulation (angles horizontaux, bases);

3° Nivellement trigonométrique (mesures de distances zénithales);

4° Nivellement géométrique;

5° Déterminations de l'intensité de la pesanteur.

L'ensemble de ces classes de données est non-seulement suffisant pour la solution du problème libre de toute hypothèse, mais encore nécessaire, c'est-à-dire que, en supprimant une seule de ces classes de données numériques, on est obligé, pour combler la lacune, de recourir à des hypothèses sur la loi de génération de la surface en question, parce que des données d'une autre nature que celles que nous venons de signaler, et qui pourraient leur être substituées, ne se prêtent pas pour le moment à une mesure couronnée de succès.

Parmi les différentes parties du Mémoire, les premières ont pour but de définir la figure mathématique de la Terre et d'en tirer les conséquences nécessaires. Celles qui viennent ensuite s'occupent du rôle que jouent les diverses classes des données empiriques pour la solution rigoureuse du problème, considérées soit en elles-mêmes, soit dans leur ensemble; la dernière enfin discute la question de savoir jusqu'à quel point on peut envisager, comme réalisable par la pratique, la solution dont la possibilité a été démontrée.

§ 1. La définition de la figure mathématique de la Terre. — § 2. Propriétés générales des géoïdes. — § 3. Les déviations des verticales. — § 4. Résultats possibles d'opérations géodésiques. — § 5. Les mesures astronomiques et trigonométriques. — § 6. Le nivellement géométrique. — § 7. Les mesures de la pesanteur. — § 8. La solution rigoureuse du problème. E. L.

HALL (ASAPH). — OBSERVATIONS ET ORBITES DES DEUX SATELLITES DE MARS AVEC LES DONNÉES POUR LES ÉPHÉMÉRIDES EN 1879. Washington, imprimerie du Gouvernement, 1878. In-4°, 46 pages.

On se rappelle l'impression que causa, au mois d'août de l'année dernière, l'annonce, par l'amiral Rodgers, de la découverte de deux satellites de Mars; aussitôt les érudits cherchèrent dans les Ouvrages récents ou anciens si quelque astronome avait reconnu et admis la probabilité de la découverte de ces satellites, et il se trouva, chose singulière, que les auteurs les plus affirmatifs sur ce sujet étaient totalement étrangers à l'Astronomie. On rappela le passage de Swift où Gulliver décrit son arrivée à Laputa, le goût exagéré des Laputiens pour les Mathématiques et la Musique, la découverte qu'ils ont faite de deux satellites de Mars; on reproduisit surtout le passage de Micromégas où Voltaire dit : « Mais revenons à nos voyageurs. En sortant de Jupiter, ils traversèrent un espace d'environ cent millions de lieues, et ils côtoyèrent la planète Mars qui, comme on sait, est cinq fois plus petite que notre petit globe; ils virent deux Lunes qui servent à cette planète, et qui ont échappé aux regards de nos astronomes. Je sais bien que le P. Castel écrira, et même plaisamment, contre l'existence de ces deux Lunes ; mais je m'en rapporte à ceux qui raisonnent par analogie. Ces bons philosophes-là savent combien il serait difficile que Mars, qui est si loin du Soleil, se passât à moins de deux Lunes. » L'auteur qui cite ce passage, ainsi que celui des voyages de Gulliver, reproduit aussi un fragment d'une lettre de Kepler à un de ses amis, Wachenfels, écrite un peu après la découverte par Galilée des satellites de Jupiter, et alors que l'on émettait des doutes sur la réalité de cette découverte : « Je suis si convaincu de l'existence des quatre planètes entourant Jupiter qu'il me tarde d'avoir un télescope pour vous précéder, s'il est possible, dans la découverte de deux satellites de Mars et peut-être d'un pour Mercure et Vénus ».

Le Mémoire de M. Asaph Hall auquel nous empruntons ces citations contient une partie beaucoup plus étendue et beaucoup plus importante. L'auteur reproduit les observations des deux satellites; il calcule les éléments de leurs orbites, et aussi, après une comparaison détaillée de différents groupes d'observations, la masse de la planète Mars, et il termine la partie scientifique de son important travail en faisant connaître les données numériques qui permettront de retrouver en 1879 les deux astres auxquels il a donné les noms de *Deimos* et *Phobos*, Phobos étant le plus rapproché de la planète.

MATTHIESSEN (L.). — GRUNDZÜGE DER ANTIKEN UND MODERNEN ALGEBRA DER LITTERALEN GLEICHUNGEN. — Leipzig, 1878. 1 vol. in-8°, 1001 pages.

Les recherches des géomètres sur chaque point des Mathématiques vont en s'accumulant d'une façon qui commence à rendre nécessaire la publication de monographies analogues à celle que M. Matthiessen vient de donner. Elle se rapporte presque uniquement aux équations des quatre premiers degrés, et forme un volume de plus de mille pages; on peut espérer qu'elle est à peu près complète. L'étendue avec laquelle est traité un sujet aussi restreint étonnera sans doute quelques lecteurs, disposés à reconnaître à quelques-unes des méthodes entassées dans le Livre de M. Matthiessen une grande valeur, soit historique, soit analytique, mais persuadés que, en Mathématiques comme ailleurs, certains travaux, qui ont été utiles, sont cependant destinés à l'oubli, et portés peut-être à regretter que le soin de faire eux-mêmes le choix judicieux des méthodes qui sont vraiment dignes d'être conservées leur ait été laissé : ils devront toutefois reconnaître que ce dernier travail leur est singulièrement facilité par celui que M. Matthiessen a su accomplir. Il y a, en outre, un défaut inhérent à la nature de l'Ouvrage : c'est uniquement sur le but commun vers lequel tendent toutes les méthodes exposées qu'est attirée l'attention du lecteur, non sur les points de départ, ni sur les voies qui les rattachent aux autres parties de la Science et, en quelque sorte, à des sommets plus élevés, d'où la vue s'étend sur un horizon plus large. Quoi qu'il en soit, l'extrême richesse des renseignements historiques et bibliographiques rendront ce Livre éminemment utile et commode à consulter.

Il est divisé en huit Sections. Les deux premières (p. 1-24-154) contiennent les théories générales et sont relativement peu développées : l'existence des racines, la démonstration de la continuité des fonctions algébriques, la décomposition en facteurs, la règle de Descartes ou de Harriot, la transformation des équations, la théorie des fonctions symétriques, les équations aux sommes, aux quotients, aux différences, etc. des racines, les diverses méthodes d'élimination, les notions les plus essentielles relatives aux invariants et covariants y sont rapidement exposées ou étudiées.

La troisième Section (p. 154-236) concerne la résolution directe d'équations particulières, telles que les équations réciproques, binômes, à racines égales ou commensurables, ou telles que leurs racines aient entre elles certaines relations ; on y trouvera les belles recherches de Gauss sur l'équation binôme.

Les Sections IV et V (p. 237-789-878) sont les plus développées : elles contiennent à peu près toutes les méthodes connues pour la résolution directe des équations du premier, du deuxième, du troisième et du quatrième degré, fondées soit sur la substitution d'une certaine fonction à l'inconnue, soit sur l'étude de combinaisons formées avec les racines, combinaisons qui se trouvent être les racines d'équations qu'on sait résoudre (*Directe Auflosung der Gleichungen von den ersten vier Graden durch Substitution, durch Combination*). On acquerra l'idée de l'étendue des renseignements qu'on trouve dans le Livre de M. Matthiessen, en consultant simplement la liste des auteurs auxquels est attribuée l'invention des méthodes exposées.

Premier degré : Job ben Salomon, Ibn Albanna.

Deuxième degré : Brahmegupta, Bhascara, Diophante, Mohammed ben Musa, Omar Alkhayyami, Viète, Grunert, Job, Clebsch, Hulbe, Sommer, Mallet, Heilermann, Diekmann, Cayley, Laplace, Haminger, Lagrange, Vandermonde.

Troisième degré : Scipione Ferro, Nicolò Tartaglia, Cardan, Viète, Hudde, Lacroix, Landen, Hulbe, Tschirnhausen, Euler, Bézout, Guglielmini, Lockhart, Cayley, Lagrange, Mallet, Cockle, Arndt, Bretschneider, Schlesicke, Grunert, Sommer, Faure, Heilermann, Spitz, Blerzy, Tortolini, Clebsch, Eisenstein, Laplace, Vandermonde, Blomstrand.

Quatrième degré : Ludovico Ferrari, Viète, Descartes, Schooten, Euler, Lagrange, Waring, Bézout, Mossbrugger, Hulbe, Le Besgue, Tschirnhausen, Bring, Francœur, Jourdain, Pratt, Mallet, Sommer, Ball, Grunert, Cayley, Hesse, Hermite, Aronhold, Jerrard, Simpson, Lacroix, Bardey, Heilermann, Eisenstein, Clebsch, Blerzy, Roberts, Salmon, Laplace, Terquem, Darboux, Ampère, Lacroix, Blomstrand, Job, Ley, Hunrath, Wilson.

A peine est-il utile de dire que, parmi ces géomètres, plusieurs ont donné plus d'une méthode, et que bon nombre des méthodes développées par M. Matthiessen sont anonymes.

La sixième Section (p. 879-920) est consacrée aux méthodes trigonométriques, et la septième (p. 921-963) aux méthodes géométriques : on relèvera dans la première les noms de Fürstemann, Grunert, Fischer, Terquem, Viète, Girard, Schooten, Landen, Colson, Moivre, Eytelwein, Könitzer, Heis, Björling, et, dans la seconde, de Ibn Albanna, Euclide, Omar ben Ibrahim, Francœur, Koppe, Heis, Eschweiler, Platon, Eutocius, Almahani, Descartes, Schooten, Newton, Colson, Spitz.

Enfin la dernière Section (p. 964-1001) est consacrée à la bibliographie et à l'histoire : on y trouvera des renseignements sur les travaux des Chinois, des Égyptiens, des Indiens, des Grecs, des Arabes et des Persans, la liste des travaux de l'ancienne école italienne (1100-1600) et des différents peuples occidentaux depuis le XVII^e siècle, enfin le catalogue des écrits sur les méthodes d'approximation, sur la résolution des équations algébriques par les fonctions circulaires et elliptiques et, spécialement, sur la résolution de l'équation du cinquième degré.

PETERSEN (J.). — BEWEIS EINES LEHRSATZES BETREFFEND DIE INTEGRATION ALGEBRAISCHER DIFFERENTIALAUSDRÜCKE, BEZIEHUNGSWEISE ALGEBRAISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UNTER GESCHLOSSENER FORM (1).

Étant donnée une équation de la forme

$$(1)\qquad dy = P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \ldots + P_k\,dx_k,$$

où les quantités P sont des fonctions algébriques de x_1, x_2, ...,

(1) *Nachrichten v. d. königl. Gesellschaft der Wissenschaften u. d. G.-A.-Universität zu Göttingen,* février 1878, p. 67-88.

x_k et y, satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, l'auteur s'occupe de l'intégrer, sous forme finie, au moyen de fonctions algébriques et de transcendantes d'une espèce donnée. Il convient d'abord de dire quelques mots de la classification de ces transcendantes.

Une équation

$$(2) \qquad d\omega + N_1\, dv_1 + N_2\, dv_2 + \ldots + N_n\, dv_n = 0,$$

où $N_1, N_2, \ldots, N_n$ sont encore des fonctions algébriques de v_1, $v_2, \ldots, v_n$, ω, satisfaisant, bien entendu, aux conditions d'intégrabilité, définit en général la fonction ω des variables v comme une fonction *transcendante* de ces dernières; toutefois, si ω n'entre pas dans les N, ω sera dite une fonction *hyperalgébrique* des v; si maintenant on substitue aux v d'autres variables w, liées algébriquement aux premières, la fonction ω sera dite, en général, une fonction *simplement transcendante* (*Transcendente erster Stufe*), ou, dans le cas particulier, *simplement hyperalgébrique,* des variables w; si actuellement les variables w sont des fonctions simplement transcendantes d'autres variables, ω sera une fonction *doublement transcendante* (*zweiter Stufe*) de ces dernières. On passera de même aux fonctions *triplement* transcendantes, etc. Il est entendu qu'on doit supposer l'ordre de transcendance le moins élevé possible, en sorte qu'une équation algébrique entre une fonction transcendante et des fonctions transcendantes d'un ordre moins élevé se réduise nécessairement à une identité.

Cela posé, soit

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y;\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p) = \text{const.} = c$$

l'intégrale de l'équation (1), f étant une fonction algébrique de $x_1, x_2, \ldots, y, \omega_1, \omega_2, \ldots,$ et les quantités $\omega_1, \omega_2, \ldots$ étant des fonctions transcendantes d'ordre quelconque de $x_1, x_2, \ldots, y$; si l'on met en évidence une des transcendantes ω de l'ordre le plus élevé, M. Petersen établit qu'en désignant par φ un facteur intégrant de l'équation différentielle (2), qui est supposée définir cette transcendante, l'équation

$$\frac{du}{d\omega} = c\varphi,$$

où la dérivée partielle est prise par rapport à ω en tant que cette fonction entre explicitement dans u, se réduit à une identité ou bien est une nouvelle forme de l'intégrale de l'équation proposée.

L'auteur étudie ensuite spécialement le cas où l'équation différentielle (2), qui définit la transcendante ω, admet un facteur intégrant qui soit une fonction algébrique de $\omega, v_1, v_2, \ldots$, la même chose ayant lieu pour les autres transcendantes; dans ce cas u, mis sous sa forme la plus simple, doit être la somme de fonctions simplement hyperalgébriques.

Voici maintenant d'importantes conclusions particulières que M. Petersen déduit de ses recherches.

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_m$ des fonctions algébriques de x, qui ne soient point les dérivées de fonctions algébriques; introduisons les transcendantes

$$\Phi_1(x) = \int^x P_1 dx, \quad \ldots, \quad \Phi_m(x) = \int^x P_m dx;$$

l'intégrale

$$\int^x P\, dx,$$

où P désigne une fonction algébrique de x, ne pourra pas être exprimée sous forme finie au moyen des fonctions Φ et des fonctions inverses, à moins qu'on ne puisse la mettre sous la forme

$$\int P\, dx = \sum_\mu \sum_\nu c_{\mu,\nu} \Phi_\mu(x_{\mu,\nu}) + X,$$

où $x_{\mu,\nu}$ et X sont des fonctions algébriques de x.

Si l'on peut intégrer une différentielle algébrique, sous forme finie, au moyen des fonctions algébriques et des transcendantes élémentaires $\log x$, a^x, $\sin x$, $\arcsin x$, ..., on pourra la mettre sous la forme

$$\int P\, dx = \Sigma c_\nu \log x_\nu + X,$$

où x_ν et X sont des fonctions algébriques.

PETERSEN (J.), Docent an der polytechnischen Schule in Kopenhagen. — THEORIE DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN. Kopenhagen, Andr.-Fred. Höst et John, 1878, in-8°, 335 pages.

Le Traité dont nous avons à rendre compte doit son origine aux leçons que M. Petersen a dû faire sur ce sujet à l'École Polytechnique de Copenhague. Dans sa Préface, l'auteur cite les Ouvrages qu'il a suivis dans quelques parties : d'abord l'Algèbre supérieure de M. Serret, dont une nouvelle édition vient de nous être donnée ; ensuite l'Ouvrage de Todhunter, auquel il a emprunté une méthode d'approximation malheureusement peu connue en France et due à Horner ; enfin, pour ce qui concerne la théorie des substitutions, le Traité fondamental de M. Jordan. L'Ouvrage de M. Petersen contient, condensées dans un espace relativement étroit, beaucoup de théories importantes d'Algèbre supérieure, et l'on doit savoir gré à l'auteur d'avoir fourni aux étudiants une nouvelle occasion de s'instruire et de se préparer à la lecture des Traités où les mêmes questions sont reprises avec tout le developpement qu'elles comportent.

La première Section traite des équations en général, des relations entre les coefficients et les racines, de l'élimination, de la transformation des équations, du calcul des fonctions symétriques.

La deuxième Section traite de la résolution algébrique des équations. Après avoir examiné les équations du troisième et du quatrième degré, les équations binômes, l'auteur donne la démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique à partir du cinquième degré (1). Un des Chapitres de cette Section traite des équations abéliennes.

La troisième Section est consacrée à la résolution numérique des équations. Elle contient les théorèmes de Descartes, de Budan, de Rolle, de Sturm ; les méthodes d'approximation de Newton, de La-

(1) Il y a un point toutefois de cette démonstration qui ne nous a pas paru rigoureux. L'auteur admet que si $\sqrt[n]{p}$ est le premier radical qui se présente dans la formule qui donne une des racines, p deviendra une puissance n^{ieme} parfaite lorsqu'on remplacera dans p les coefficients des équations par leurs expressions en fonctions symétriques des racines. C'est un point qui ne peut pas être accordé, et qu'Abel, dans son Mémoire, s'est soigneusement attaché à démontrer.

grange, de Horner. Nous y avons remarqué l'emploi ingénieux que fait l'auteur du théorème de Descartes, pour trouver des limites plus resserrées du nombre des racines positives et négatives.

Enfin la quatrième Section contient une étude élémentaire des substitutions. Elle traite des substitutions en général, des groupes et des substitutions conjugués de la théorie de Galois, et elle se termine par quelques applications de cette théorie, et, en particulier, par l'étude de l'équation de Hesse.

Ces indications rapides indiqueront suffisamment quel est le but de l'Ouvrage et dans quel esprit il a été composé. G. D.

CASORATI (F.). — Sui determinanti di funzioni (¹).

M. Casorati s'occupe dans cette Note du déterminant fonctionnel de $n+1$ fonctions de $n+1$ variables, c'est-à-dire du déterminant dont une ligne a pour éléments $n+1$ fonctions de n variables, les éléments des autres lignes étant les dérivées partielles de ces $n+1$ fonctions prises par rapport à une de ces variables, enfin du déterminant dont la première ligne a pour éléments $n+1$ fonctions d'une seule variable, les éléments des autres lignes étant les dérivées 1^re, 2^e, ..., $n^{\text{ième}}$ de ces fonctions. Ces trois déterminants jouissent de la propriété suivante : si dans l'un quelconque on substitue aux fonctions au moyen desquelles il est formé ces fonctions divisées par une même fonction θ, on reproduit les mêmes déterminants, divisés le premier par θ^{n+2}, les deux autres par θ^{n+1}.

M. Casorati déduit de là diverses conséquences ; ainsi, lorsque une fonction entière de n variables est divisible par la $m^{\text{ième}}$ puissance d'une autre fonction de ces mêmes variables, le hessien de la première fonction est divisible par la $n(m-1)^{\text{ième}}$ puissance de la seconde ; lorsqu'une fonction de n variables est divisible par une fonction de μ de ces variables, son hessien est divisible par la $(n-2\mu)^{\text{ième}}$ puissance de cette dernière fonction ; lorsqu'une fonction linéaire de n variables admet un facteur fonction linéaire

(¹) *Memorie del Reale Istituto Lombardo*, t. XIII (3^e serie, t. IV). Milan, 1875, in-4°, 7 p.

de ces mêmes variables, son hessien admet $n-2$ fois ce facteur.

L'auteur étudie ensuite plus particulièrement le second des trois déterminants dont nous avons parlé et en fait une théorie analogue à celle du déterminant fonctionnel.

GENOCCHI (A.). — INTORNO ALL' EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL MOLTIPLICATORE.

Jacobi a remarqué qu'en éliminant λ entre les deux équations

$$M^2 = \frac{(\lambda-\lambda^3)\,d\lambda}{n(k-k^3)\,dk},$$

$$M\left[(k-k^3)\frac{d^2M}{dk^2}+(1-3k^2)\frac{dM}{dk}-kM\right]+\frac{\lambda\,d\lambda}{n\,dk}=0,$$

qui relient le multiplicateur M, les modules primitif et transformé λ et k, et l'ordre n de la transformation, on tombait sur une équation, entre k et $f=\sqrt{n}\,.M$, du troisième ordre, indépendante de l'ordre n. M. Genocchi rectifie une erreur dans les équations de Jacobi, erreur reproduite dans les *Mathematische Werke*, t. II, p. 21-36, et dans la traduction publiée dans le *Journal de Liouville*, 1846 (t. XIV, p. 181-200); ces équations rectifiées sont

$$k_1 f^4\left(\frac{dH}{dk_1}\right)^2 = H^2+4H^3,$$

$$4k_1^2 f^3\frac{d^2f}{dk_1^2}+4k_1 f^3\frac{df}{dk_1}-\frac{k_1 f^4}{(1+k_1)^2}=H,$$

où

$$k_1=\frac{k^2}{1-k^2};$$

en éliminant H entre ces équations, on trouve l'équation cherchée, à propos de laquelle M. Genocchi rappelle certaines remarques faites par lui dans un Mémoire publié antérieurement (*Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, t. XXIII, p. 246, 1866).

(1) *Rendiconti del R. Istituto Lombardo.* Série II, t. X, fasc. XVII.

CATALAN (E.). — SUR QUELQUES FORMULES RELATIVES AUX INTÉGRALES EULÉRIENNES. In-4°, 20 pages.

On remarquera dans ce travail les deux formules suivantes :

$$\lim \frac{B(n+\alpha, \gamma)}{B(an+\beta+1, \gamma)} = a^\gamma \text{ pour } n = \infty ;$$

$$\frac{B(p, m)}{B(q, m)} = \sum_{i=0}^{i=\infty} C_{m,i} \frac{(q-p)(q-p-1)\ldots(q-p+1-i)}{p(p+1)\ldots(p-1+i)}.$$

Dans cette dernière formule, dont l'auteur tire diverses conséquences, p, q, m sont des quantités positives, $C_{m,i}$ est le $(i+1)^{\text{ième}}$ coefficient numérique de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un binôme.

DARBOUX (G.). — MÉMOIRE SUR L'ÉQUILIBRE ASTATIQUE ET SUR L'EFFET QUE PEUVENT PRODUIRE DES FORCES DE GRANDEURS ET DE DIRECTIONS CONSTANTES APPLIQUÉES EN DES POINTS DÉTERMINÉS D'UN CORPS SOLIDE, QUAND CE CORPS CHANGE DE DIRECTION DANS L'ESPACE. Paris, 1877, Gauthier-Villars. 1 vol. in-8°, 68 pages (¹).

Dans ce petit opuscule de Statique géométrique, l'auteur a développé la solution d'un problème qui a été abordé pour la première fois dans la *Statique* de Möbius. On sait que l'étude des forces parallèles appliquées en des points déterminés d'un corps solide a conduit à la notion du centre des forces parallèles, point d'application d'une force unique, ayant même direction que les forces considérées, égale à leur somme algébrique et qui peut toujours les remplacer lorsque le corps change de situation dans l'espace.

Il était naturel de chercher à étendre aux systèmes composés de forces quelconques les propriétés du centre des forces parallèles, c'est-à-dire d'examiner comment varie l'effet, c'est-à-dire la résultante générale et le couple résultant d'un système quelconque de

(¹) Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. II, 2ᵉ série, IIᵉ cahier.

forces appliquées en des points déterminés du corps solide, soit lorsque, leur grandeur et leur direction demeurant les mêmes, l'orientation du corps vient à changer, soit, ce qui est la même chose, lorsque, le corps demeurant en repos, les forces conservent leurs points d'application, mais changent de direction de manière à conserver entre elles les mêmes angles.

On peut demander, par exemple, quelles sont les conditions nécessaires pour qu'elles se fassent équilibre dans toutes les positions du corps. On dit alors que le corps est en équilibre astatique. Möbius, nous l'avons dit, avait déjà commencé cette étude dans sa *Statique;* Minding, dans le tome XV du *Journal de Crelle,* a donné sur le même sujet un théorème des plus remarquables, et il a prouvé que, toutes les fois que le corps est ramené par une rotation convenable dans une situation où le système des forces a une résultante unique, cette résultante unique rencontre deux courbes ayant une position fixe dans le corps, qui sont une ellipse et une hyperbole, focales l'une de l'autre.

Les études de Möbius et de Minding ont été développées dans la *Mécanique* de M. Broch. M. l'abbé Moigno les a résumées d'après l'Ouvrage de M. Broch dans deux Chapitres de sa *Statique.* La théorie trouve d'ailleurs des applications pratiques intéressantes dans l'étude de plusieurs appareils de Physique qui peuvent être assimilés à des corps solides soumis à plusieurs systèmes de forces, de natures différentes. Nous citerons les boussoles, par exemple, sur lesquelles agissent à la fois les forces magnétiques et celles qui sont dues à la pesanteur.

Dans le travail actuel, M. Darboux démontre les propositions connues et en ajoute plusieurs qui sont nouvelles.

L'auteur cherche d'abord la condition pour que des forces appliquées à un corps solide se fassent équilibre, non-seulement dans la position actuelle du corps, mais encore lorsque le corps tournera d'un angle quelconque autour d'un axe fixe, et il en déduit les conditions pour que l'équilibre subsiste dans toutes les positions du corps, c'est-à-dire soit astatique. Ces conditions, comme on sait, équivalent à douze équations. Il montre ensuite que, dans le cas général, on peut toujours remplacer les forces, en nombre quelconque, appliquées au corps par une résultante unique appliquée en un point quelconque et par trois couples dont les forces ont des points d'application déterminés. L'étude des différentes réductions de ce genre et leur comparaison sont beaucoup simplifiées quand on emploie un ellipsoïde central relatif à chaque point de l'espace, analogue à celui que l'on rencontre dans la théorie des moments d'inertie. Sans entrer dans de plus grands détails, nous indiquerons les résultats suivants :

1° Étant donné un corps soumis à l'action d'un système de forces dont la résultante générale est nulle, Möbius croyait que, si l'équilibre subsiste dans quatre orientations du corps, il se maintient dans toutes les autres. M. Darboux montre, au contraire, qu'il y a toujours quatre positions du corps pour lesquelles les forces se font équilibre et qu'il peut y en avoir un plus grand nombre. Ces différentes positions sont étudiées et définies.

2° Par l'emploi de l'ellipsoïde central dont il a déjà été question plus haut, le beau théorème de Minding cesse d'être un résultat de calcul et est démontré géométriquement. L'auteur le complète en montrant que, si l'on considère, dans toutes les positions d'un système de forces, l'axe central des moments de Poinsot, cet axe appartiendra à un complexe remarquable du second ordre, dont les droites sont l'intersection de deux plans rectangulaires assujettis à être tangents respectivement aux deux focales de Minding.

3° Möbius avait introduit la notion des axes principaux de rotation, qu'il définissait par la propriété mécanique suivante : « Si le corps tourne autour d'un tel axe, le système de toutes les forces peut toujours être remplacé, dans toutes les positions que prend ainsi le corps, par deux forces appliquées en deux points fixes de l'axe. » Quand le corps tourne, l'axe est donc toujours pressé de la même manière, ce qui constitue en un sens une généralisation de la propriété du centre des forces parallèles ; car, si le corps est fixé en ce centre, il exercera dans toutes les positions qu'il pourra prendre la même pression sur l'appui qui assure la fixité de ce point. Möbius avait établi qu'un système de forces a en général deux axes principaux. M. Darboux cherche le lieu de ces axes quand l'orientation des forces change, et il démontre qu'ils sont les génératrices rectilignes d'une famille de surfaces homofocales du second degré.

En terminant, nous signalerons l'emploi que fait l'auteur, pour présenter les énoncés et les résultats de calcul sous une forme intuitive, des notions généralisées d'angles et de distances, telles que

M. Cayley les a introduites en substituant, aux deux points imaginaires à l'infini sur le cercle, une conique quelconque réelle ou imaginaire.

PELLET (A.-E.). — THÈSES PRÉSENTÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS (14 mars 1878). Clermont-Ferrand, Ferdinand Thibaud, libraire. — In-4°, 50 pages.

Première thèse. — Sur la théorie des équations algébriques.
Seconde thèse. — Sur la théorie des surfaces.

Galois, dans son célèbre Mémoire sur les *Conditions de résolubilité des équations par radicaux* (*Journal de Liouville*, t. XI), a montré la relation intime qui existe entre la théorie algébrique des équations et la théorie des groupes de substitutions, relation qui est telle qu'on peut dire que les deux théories sont corrélatives. La corrélation des deux théories étant établie, Galois cherche à développer la théorie des groupes de substitutions, et s'il s'adresse parfois à la théorie algébrique des équations, ce n'est que d'une manière subsidiaire. M. Camille Jordan a repris la théorie de Galois, et l'a développée avec une ampleur incomparable dans son *Traité des Substitutions et des équations algébriques*, en y ajoutant un grand nombre de résultats nouveaux. Mais, devant la complication de cette théorie, on peut se demander s'il ne serait pas plus avantageux de développer directement la théorie algébrique des équations. C'est le but que l'auteur s'est proposé dans la première des thèses qu'il a présentées à la Faculté des Sciences de Paris. Sa méthode repose sur le théorème suivant :

$\theta(x)$ étant une fonction rationnelle de x, soit μ le nombre de valeurs distinctes qu'elle acquiert lorsqu'on remplace x successivement par les m racines de l'équation $f(x) = 0$, irréductible et de degré m; μ est un diviseur de m, et ces μ valeurs sont racines d'une équation irréductible.

M. Pellet donne quelques applications de ce théorème à la réduction des équations en général; mais la partie importante de sa thèse consiste dans l'application qu'il en fait aux équations qu'il appelle *holodromes*, c'est-à-dire aux équations irréductibles dont toutes les racines peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de l'une d'elles. On sait que Lagrange a ramené l'étude d'une équation quelconque à celle d'une équation jouissant de cette propriété, et qu'il appelle l'équation *résolvante* de la proposée ; de sorte que la théorie des équations holodromes renferme implicitement celle de toutes les équations.

Comme M. Jordan, l'auteur dit que deux équations dont les coefficients sont formés avec les mêmes irrationnelles sont *équivalentes* lorsque les racines de l'une peuvent s'exprimer rationnellement en fonction des racines de l'autre, qu'une équation holodrome est *simple* lorsqu'elle ne peut se réduire qu'à l'aide d'une équation holodrome équivalente ; et il arrive assez rapidement au théorème suivant, qui résume à peu près la théorie :

Une équation holodrome $F(x)=0$ *se réduit à l'aide d'une suite d'équations simples : cette suite n'est pas entièrement déterminée, mais la suite des degrés de ces équations simples l'est, abstraction faite de l'ordre, et le produit de ces degrés est égal à celui de* $F(x)$.

Abel a fait une étude semblable, mais en se bornant à des cas particuliers.

La thèse se termine par quelques applications aux équations quelconques de cette théorie générale, et en particulier par une démonstration nouvelle de ce théorème :

Si m est supérieur à 4, le groupe alterné de m lettres, d'ordre $\frac{1.2\ldots m}{2}$, *est simple, et il conduit immédiatement à ce théorème de M. Bertrand : Le nombre des valeurs distinctes d'une fonction de m variables ne peut s'abaisser au-dessous de n sans se réduire à 1 ou à 2, le cas de $m=4$ étant seul excepté.*

Cette première thèse est suivie d'une Note, où l'auteur étend le théorème qui en est le fondement à la théorie des fonctions irréductibles suivant un module premier, et il en déduit immédiatement les deux suivants :

Soient $F(x)$ *et* $F_1(x)$ *deux fonctions irréductibles suivant le* *module p, de degrés* V *et* V_1, *premiers entre eux; l'élimination de i et i_1 entre les trois congruences*

$$F(i) \equiv 0, \quad F_1(i_1) \equiv 0, \quad I \equiv i i_1 \pmod{p},$$

donnera une congruence $\mathfrak{F}(I) \equiv 0$, *irréductible* (mod. p), *et de degré* VV_1.

Soit $F(x)$ *une fonction irréductible* (mod. p.), *de degré* V, *et telle que le coefficient du terme de degré* V — 1 *ne soit pas congru à* 0 (mod. p); *la fonction* $F(x^p - x)$, *obtenue en remplaçant* x *par* $x^p - x$ *dans la première, est irréductible.*

Le premier est nouveau; quant au second, l'auteur l'a démontré pour la première fois, avec cette généralité, dans une Note présentée par M. Serret à l'Académie des Sciences, en février 1878, mais en s'appuyant sur une théorie un peu différente; antérieurement M. Serret l'avait démontré dans le cas de $V = 1$ (*Algèbre supérieure*).

La seconde thèse roule sur la théorie des surfaces.

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

étant le carré de la distance de deux points infiniment voisins sur une surface, celle-ci est applicable sur un plan, s'il existe deux fonctions de u et de v, x et y, telles que l'expression précédente soit égale à $dx^2 + dy^2$ identiquement; x et y sont développés suivant les puissances croissantes de u et de v, entre de petites limites de ces variables, suivant la formule de Taylor, et, en opérant cette identification, on en déduit l'équation différentielle qui doit avoir lieu entre les fonctions E, F, G. Le même procédé donne l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée. Un résultat mérite d'être signalé : c'est l'expression de la courbure géodésique d'une courbe en fonction des variables u et v. On a, en désignant par $\frac{1}{\rho}$ cette courbure géodésique,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{[(EG - F^2)v'' + \varphi_1.(E + v'F) - \varphi.(F + v'G)]^2}{(EG - F^2)(E + 2v'F + v'^2 G)^3},$$

où v', v'' désignent les dérivées de v par rapport à u, et φ et φ_1 les polynômes

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial E}{\partial u} + 2v'\frac{\partial E}{\partial v} + v'^2\left(2\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\right)\right],$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v}\right) + 2v'\frac{\partial G}{\partial u} + v'^2\frac{\partial G}{\partial v}\right].$$

On voit que la méthode employée dans ce travail revient essentiellement à supposer que les fonctions inconnues, qui doivent satisfaire à une certaine équation différentielle, sont développables par la formule de Taylor, ainsi que celles qui sont données, et à appliquer la méthode des coefficients indéterminés, après avoir substitué aux fonctions leurs développements. M. Pellet applique cette méthode avec succès, non-seulement à la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée, mais encore à la théorie des systèmes de coordonnées curvilignes dans l'espace, et des familles de surfaces pouvant faire partie d'un système triple orthogonal. Nous ferons observer, toutefois, que M. Puiseux a déjà appliqué la méthode en question à cette dernière théorie (*Journal de Liouville*, t. VIII, 2e série).