Bulletin des sciences

mathématiques et astronomiques

Baillaud

Sur la méthode de Hansen pour la détermination des perturbations absolues des petites planètes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 261-264

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_261_0>

SUR LA MÉTHODE DE HANSEN POUR LA DÉTERMINATION DES PERTURBATIONS ABSOLUES DES PETITES PLANÈTES;

PAR M. BAILLAUD.

Dans sa méthode pour la détermination des perturbations absolues des petites planètes ([1]), Hansen utilise trois conceptions différentes.

1° Il détermine les coordonnées de l'astre par rapport à des axes mobiles OX, OY, OZ, tellement choisis, que ces coordonnées et leurs dérivées par rapport au temps soient représentées par les mêmes fonctions du temps et des éléments dans le mouvement troublé que dans le mouvement elliptique. Il nomme ces coordonnées *coordonnées idéales*.

2° Il remarque que toute fonction de coordonnées idéales dépend du temps de deux manières : le temps s'introduit explicitement, quand on exprime ces coordonnées idéales, au moyen des formules du mouvement elliptique, en partant de l'équation de Kepler; il entre aussi implicitement dans les éléments variables de l'orbite. Hansen désigne par τ le temps dans l'équation de Kepler, sauf à remplacer à la fin des calculs τ par t. Il a cru nécessaire, dans le cas où il s'est placé à ce point de vue, de changer toutes les lettres qui représentent des fonctions du temps. Il semble que ce changement, en multipliant beaucoup les symboles employés, rende les démonstrations moins faciles à suivre. Nous nous bornerons ici à représenter les dérivées partielles relatives à τ par la caractéristique $\frac{\partial}{\partial\tau}$, réservant $\frac{d}{dt}$ pour les dérivées complètes. Si L est une coordonnée idéale ou une fonction de coordonnées idéales ne renfermant pas explicitement les éléments variables, on a

$$\frac{\partial L}{\partial\tau}=\frac{dL}{dt}.$$

([1]) *Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten.* (Erste Abhandlung.)

3° Hansen dispose les formules de manière à substituer partout aux éléments variables leurs valeurs initiales ou leurs valeurs moyennes, sauf à introduire de très-petites quantités variables qui correspondent à la variation de ces éléments.

Soit, à un instant quelconque, a le demi-grand axe de l'orbite, n le moyen mouvement, $e = \sin\varphi$ l'excentricité, ϖ l'angle de la direction du périhélie fait avec OX, c l'anomalie moyenne de l'époque. Représentons par les mêmes lettres, affectées de l'indice zéro, les valeurs des mêmes quantités à l'origine du temps; par u l'anomalie excentrique, par f l'anomalie vraie, par r le rayon vecteur, par v l'angle qu'il fait avec OX, par k la constante de Gauss.

On a entre toutes ces quantités les formules bien connues du mouvement elliptique, parmi lesquelles nous noterons les suivantes :

$$v = f + \varpi,$$

$$r = \frac{a\cos^2\varphi}{1 + e\cos f},$$

$$r^2\frac{dv}{dt} = na^2\cos\varphi,$$

$$n^2 a^3 = k^2(1 + m).$$

Hansen désigne par u_1, f_1, r_1 des quantités voisines de u, f et r, satisfaisant aux équations

$$n_0 z = u_1 - e_0 \sin u_1,$$

$$r_1\cos f_1 = a_0\cos u_1 - a_0 e_0,$$

$$r_1\sin f_1 = a_0\cos\varphi_0\sin f_1,$$

$$r_1 = \frac{a_0\cos^2\varphi_0}{1 + e_0\cos f_1},$$

$$v = f_1 + \varpi_0,$$

$$r^2\frac{df_1}{dz} = n_0 a_0^2\cos\varphi_0,$$

$$r = r_1(1 + \lambda).$$

Pourvu que z et λ soient des fonctions du temps convenablement choisies, ces formules représenteront le mouvement troublé; r_1 et f_1 seront des coordonnées idéales; on peut appeler z et λ des coordonnées, et elles sont aussi *idéales*.

Hansen parvient, par des calculs très-compliqués, à deux formules très-simples; d'où il déduit facilement z et λ en fonction de forces perturbatrices. M. Dupuy, dans son étude sur la méthode de Hansen, a très-notablement simplifié la démonstration de l'une de ces équations; elles deviennent toutes deux intuitives de la manière suivante : on a

$$\frac{1}{1+\lambda}=\frac{r_1}{r}=\frac{r+er_1\cos(f_1-\varpi+\varpi_0)}{a\cos^2\varphi}.$$

Posons avec Hansen

$$e\cos(\varpi-\varpi_0)=e_0+\xi\cos^2\varphi_0,$$
$$e\sin(\varpi-\varpi_0)=\eta\cos^2\varphi_0;$$

nous aurons

$$\frac{1}{1+\lambda}=\frac{n^{\frac{2}{3}}\cos^2\varphi_0}{n_0^{\frac{2}{3}}\cos^2\varphi}\left(1+\frac{\xi}{a_0}r_1\cos f_1+\frac{\eta}{a_0}r_1\sin f_1\right).$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{n^{\frac{1}{3}}\cos\varphi_0}{n_0^{\frac{1}{3}}\cos\varphi}=\frac{h}{h_0},$$

on a

$$(1)\qquad \frac{1}{1+\lambda}=\frac{h^2}{h_0^2}\left(1+\frac{\xi}{a_0}r_1\cos f_1+\frac{\eta}{a_0}r_1\sin f_1\right).$$

On a, d'autre part,

$$\frac{dv}{dt}=\frac{df_1}{dz}\frac{dz}{dt},$$

d'où

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial\tau}=\frac{h_0}{h}\frac{r_1^2}{r^2}=\frac{h_0}{h}\frac{1}{(1+\lambda)^2}.$$

Il est utile, et entièrement conforme à l'esprit de la méthode de Hansen, de séparer les termes du deuxième ordre. A cet effet, on a

$$\frac{\partial z}{\partial\tau}=\frac{h_0}{h}\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\frac{h_0}{h}\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$
$$=1+W+\frac{h_0}{h}\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2},$$

en posant

$$W = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2\frac{h}{h_0}\frac{\xi}{a_0}r_1\cos f_1 + 2\frac{h}{h_0}\frac{\eta}{a_0}r_1\sin f_1;$$

on en tire

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + \int\left[W + \frac{h_0}{h}\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\right]dt;$$

c'est la formule (37) (¹) de Hansen.

La valeur de λ, donnée par l'équation (1), n'est pas commode à cause des dénominateurs. On la transforme ainsi :

On a, en regardant τ comme seule variable,

$$W = \text{const.} + 2\frac{h_0}{h}\frac{1}{1+\lambda},$$

par suite,

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -2\frac{h_0}{h}\frac{1}{(1+\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial z} = -2\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\tau} = -2\frac{\partial\lambda}{\partial\tau};$$

d'où

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial z} \quad \text{et} \quad \lambda = \text{const.} - \frac{1}{2}\int\frac{\partial W}{\partial z};$$

c'est la formule (36) du Chapitre cité.

Il faut avoir soin de ne regarder W comme fonction de z que par suite de l'emploi des formules du mouvement elliptique, et de ne pas regarder les éléments comme fonctions de z pour la différentiation.

(¹) *Voir* Mémoire cité, art. 18 à 23.