BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

ELLIOT

Sur les points d'inflexion des courbes algébriques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 216-232

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_216_1>

MÉLANGES.

SUR LES POINTS D'INFLEXION DES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. ELLIOT,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

1. Les coordonnées des points d'inflexion d'une courbe algébrique de degré m satisfont à une équation de degré $3(m-2)$ qu'on obtient en égalant à zéro le hessien de la courbe. Mais les coordonnées des point multiples vérifient aussi cette équation. On sait par les recherches de Plücker que la présence d'un point double diminue le nombre des points d'inflexion de six unités, et celle d'un point de rebroussement de première espèce de huit unités. Je me propose d'indiquer, dans ce qui suit, comment on peut trouver le nombre des points d'inflexion d'une courbe algébrique qui possède des singularités de nature quelconque. Je définis un point singulier par le polygone qui, d'après la méthode de M. Puiseux, fournit les termes du degré le moins élevé, ou, ce qui revient au même, par le nombre et le degré des racines infiniment petites qui se rapportent à ce point quand on y a transporté l'origine des coordonnées.

M. Brill a entrepris tout récemment (¹) une recherche analogue fondée sur le système des notations symboliques. Il est arrivé, relativement à la multiplicité du hessien en un point multiple ordinaire de la courbe donnée, à un théorème qui est une conséquence facile de la méthode que j'ai adoptée.

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XIII, p. 175-182; 1878.

I.

2. L'introduction du déterminant de Hesse, pour la recherche des points d'inflexion, se fait très-simplement par la méthode suivante, dont j'ai pris le principe dans l'Ouvrage de Clebsch ([1]).

Soit

$$f(x,y)=0 \tag{1}$$

l'équation de la courbe donnée de degré m. Si l'on appelle x_1, y_1, x, y les coordonnées de deux points M_1, M, celles d'un point quelconque de la droite qui les joint pourront être représentées par les expressions

$$\frac{x_1+\lambda x}{\lambda+1},\quad \frac{y_1+\lambda y}{\lambda+1},$$

λ étant le rapport des distances du point dont il s'agit aux deux points M_1, M. L'équation

$$f\left(\frac{x_1+\lambda x}{\lambda+1},\ \frac{y_1+\lambda y}{\lambda+1}\right)=0$$

déterminera les rapports des distances aux points M_1 et M des m points d'intersection de la courbe (1) avec la droite M_1M. Rendons homogène l'équation de la courbe, et posons

$$z^m f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=f(x,y,z);$$

l'équation qui donne λ deviendra, en adoptant des coordonnées homogènes,

$$f(x_1+\lambda x,\ y_1+\lambda y,\ z_1+\lambda z)=0,$$

ou, en développant la formule de Taylor,

$$\left\{\begin{aligned} &f(x_1,y_1,z_1)+\lambda\left(x\frac{df}{dx_1}+y\frac{df}{dy_1}+z\frac{df}{dz_1}\right)\\ &\quad+\frac{\lambda^2}{1.2}\left(x^2\frac{d^2f}{dx_1^2}+2xy\frac{d^2f}{dx_1\,dy_1}+y^2\frac{d^2f}{dy_1^2}\right.\\ &\qquad\left.+2xz\frac{d^2f}{dx_1\,dz_1}+2yz\frac{d^2f}{dy_1\,dz_1}+z^2\frac{d^2f}{dz_1^2}\right)+\ldots=0.\end{aligned}\right. \tag{2}$$

([1]) *Vorlesungen über Geometrie*, p. 311.

Supposons que M_1 appartienne à la courbe : si l'on veut que la droite MM_1 rencontre la courbe en deux points confondus avec M_1, l'équation précédente devra avoir deux racines nulles, ce qui assujettit le point M à être sur la tangente en M_1. Supposons maintenant que M_1 soit un point d'inflexion ; si l'on prend le point M sur la tangente d'inflexion, la droite MM_1 devra rencontrer la courbe en trois points coïncidant avec M_1, et l'équation (2) aura une racine triple nulle. On aura donc

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0, \tag{3}$$

$$\varphi = x\frac{df}{dx_1} + y\frac{df}{dy_1} + z\frac{df}{dz_1} = 0, \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} \psi = x^2\frac{d^2f}{dx_1^2} &+ 2xy\frac{d^2f}{dx_1\,dy_1} \\ &+ y^2\frac{d^2f}{dy_1^2} + 2xz\frac{d^2f}{dx_1\,dz_1} + 2yz\frac{d^2f}{dy_1\,dz_1} + z^2\frac{d^2f}{dz_1^2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

L'équation $\psi = 0$ représente une conique qui contiendra tous les points de la droite $\varphi = 0$. La fonction ψ sera donc décomposable en deux facteurs linéaires, et par suite son discriminant sera nul. Les coordonnées des points d'inflexion annuleront donc le hessien

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2f}{dx^2} & \dfrac{d^2f}{dx\,dy} & \dfrac{d^2f}{dx\,dz} \\ \dfrac{d^2f}{dy\,dx} & \dfrac{d^2f}{dy^2} & \dfrac{d^2f}{dy\,dz} \\ \dfrac{d^2f}{dz\,dx} & \dfrac{d^2f}{dz\,dy} & \dfrac{d^2f}{dz^2} \end{vmatrix}.$$

3. Réciproquement, il faut montrer qu'un point M_1, dont les coordonnées satisfont à l'équation (1) et annulent le hessien, est un point d'inflexion ou un point multiple. Remarquons d'abord que la fonction ψ peut être représentée par

$$x\frac{d\varphi}{dx_1} + y\frac{d\varphi}{dy_1} + z\frac{d\varphi}{dz_1}, \tag{6}$$

et que l'expression

$$x_1\frac{d\psi}{dx} + y_1\frac{d\psi}{dy} + z_1\frac{d\psi}{dz} \tag{7}$$

reproduira φ à un facteur constant près.

La première propriété est évidente. La seconde se vérifie en développant l'expression (7)

$$\begin{aligned}
&2x_1\left(x\frac{d^2f}{dx_1^2}+y\frac{d^2f}{dx_1dy_1}+z\frac{d^2f}{dx_1dz_1}\right),\\
&+2y_1\left(x\frac{d^2f}{dy_1dx_1}+y\frac{d^2f}{dy_1^2}+z\frac{d^2f}{dy_1dz_1}\right),\\
&+2z_1\left(x\frac{d^2f}{dz_1dx_1}+y\frac{d^2f}{dz_1dy_1}+z\frac{d^2f}{dz_1^2}\right).
\end{aligned}$$

Si l'on ordonne par rapport à x, y, z, en appliquant le théorème des fonctions homogènes, on trouve

$$x_1\frac{d\psi}{dx}+y_1\frac{d\psi}{dy}+z_1\frac{d\psi}{dz}=2(m-1)\varphi. \tag{8}$$

Revenons à notre hypothèse. Puisque le hessien est nul pour les coordonnées du point M_1, la conique $\psi=0$ se décompose en deux droites. Ce système de droites contient le point M_1; car la condition (3) peut s'écrire, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$x_1^2\frac{d^2f}{dx_1^2}+2x_1y_1\frac{d^2f}{dx_1dy_1}+\ldots+z_1^2\frac{d^2f}{dz_1^2}=0.$$

Appelons P et P′ les deux facteurs de ψ, en sorte que

$$\psi=P\times P'=(Ax+By+C)(A'x+B'y+C').$$

La fonction représentée par l'expression (7) sera

$$x_1(AP'+A'P)+y_1(BP'+B'P)+z_1(CP'+C'P)$$

ou bien

$$P'(Ax_1+By_1+Cz_1)+P(A'x_1+B'y_1+C'z_1).$$

Or l'un des coefficients de P ou de P′ est nul; la fonction (7), qui, d'après l'équation (8), est égale à $2(m-1)\varphi$, ne diffère donc que par un facteur constant de l'une des fonctions P ou P′. De là résulte que, si l'on prend le point M sur la tangente à la courbe au point M_1, l'équation (2) aura une racine triple égale à zéro, et le point M_1 sera un point d'inflexion.

4. Notre raisonnement serait en défaut si le point x_1y_1 appar-

tenait à la fois aux deux droites $P = 0$, $P' = 0$. La fonction (7) serait alors identiquement nulle ; il en serait de même de la fonction φ, c'est-à-dire que l'on aurait

$$\frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dy_1} = 0, \quad \frac{df}{dz_1} = 0,$$

et le point M_1 serait un point multiple.

Il peut arriver aussi que la fonction ψ soit nulle identiquement. Le théorème des fonctions homogènes montre alors que les trois premières dérivées sont encore nulles. Les points de la courbe dont les coordonnées vérifient l'équation $H = 0$ sont donc bien des points d'inflexion ou des points multiples.

II.

5. Supposons qu'on élimine y entre les deux équations

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

$$(2) \qquad H(x, y) = 0;$$

le résultant sera un polynôme en x, dont les racines seront les abscisses des points d'inflexion et celles des points multiples. Pour évaluer le degré de multiplicité de ces dernières, remarquons que, si l'on appelle $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les m valeurs de y qui satisfont à l'équation (1), le résultant pourra se mettre sous la forme

$$(3) \qquad H(x, y_1)\, H(x, y_2) \ldots H(x, y_m).$$

Soient a et b les coordonnées d'un point multiple, et posons $x = a + x'$, $y = b + y'$. Le résultant conservera une forme analogue ; pour simplifier, nous garderons la forme (3), ce qui revient à supposer que le point multiple à étudier coïncide avec l'origine des coordonnées.

La question est de trouver à quel degré x entre comme facteur dans le premier membre de l'équation résultante, ou bien dans l'expression (3). Pour cela on considérera les racines infiniment petites, dont on sait calculer le développement en série, limité à un ou plusieurs termes, d'après la méthode de M. Puiseux ; chacune de ces racines rend infiniment petit le facteur qui lui correspond dans l'expression (3). Nous allons voir comment on peut évaluer le degré de ces différents facteurs, en sorte que, faisant la somme des degrés fournis par les racines infiniment petites, on aura le degré de x dans le résultant pour le point singulier étudié. Il est clair que, s'il n'y a pas d'autre point singulier sur l'axe Oy que l'origine, et s'il n'y a pas non plus de point d'inflexion, le calcul relatif à l'origine donnera le degré du facteur x dans le résultant; sinon, le degré de ce facteur sera la somme des degrés répondant aux différents points multiples ou d'inflexion que contient l'axe Oy.

6. Il est inutile, pour le calcul actuel, de substituer au hessien, tel qu'il a été trouvé, une autre forme ne contenant plus de dérivées par rapport à z. Multiplions par x, y, 1 les éléments de la première, de la deuxième et de la troisième colonne du hessien, et transformons la somme de ces produits au moyen du théorème des fonctions homogènes. On aura trois termes

$$(m-1)\frac{df}{dx},\quad (m-1)\frac{df}{dy},\quad (m-1)\frac{df}{dz},$$

qu'on pourra mettre à la place des éléments de la dernière colonne. Le hessien H deviendra

$$(m-1)\begin{vmatrix} \dfrac{d^2f}{dx^2} & \dfrac{d^2f}{dx\,dy} & \dfrac{df}{dx} \\ \dfrac{d^2f}{dy\,dx} & \dfrac{d^2f}{dy^2} & \dfrac{df}{dy} \\ \dfrac{d^2f}{dz\,dx} & \dfrac{d^2f}{dz\,dy} & \dfrac{df}{dz} \end{vmatrix}.$$

Remplaçons de la même façon les éléments de la dernière ligne par ceux qu'on obtient en multipliant par x, y, 1 les éléments des trois lignes, et en faisant la somme, on aura

$$(m-1)^2\begin{vmatrix} \dfrac{d^2f}{dx^2} & \dfrac{d^2f}{dy\,dx} & \dfrac{df}{dx} \\ \dfrac{d^2f}{dy\,dx} & \dfrac{d^2f}{dy^2} & \dfrac{df}{dy} \\ \dfrac{df}{dx} & \dfrac{df}{dy} & 0 \end{vmatrix}$$

ou bien

$$(4)\qquad -(m-1)^2\left[\left(\frac{df}{dy}\right)^2\frac{d^2f}{dx^2}-2\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}\frac{d^2f}{dx\,dy}+\left(\frac{df}{dx}\right)^2\frac{d^2f}{dy^2}\right].$$

7. Considérons une racine infiniment petite d'ordre μ entier ou fractionnaire. On pourra la représenter par $y = Vx^\mu$, V étant une fonction algébrique de x qui ne s'annule pas avec x. Adoptons le mode de représentation géométrique de M. Puiseux, c'est-à-dire, dans un terme $Ay^\alpha x^\beta$ de $f(x,y)$, regardons α comme une abscisse, β comme une coordonnée. On fait ainsi correspondre à chaque terme un point, et l'on sait que, si l'on regarde y comme un infiniment petit de l'ordre μ, les termes du moindre degré répondront à des points situés sur une même ligne droite G. Il résulte de notre représentation géométrique que, si l'on prend la dérivée de $f(x,y)$ par rapport à x ou à y, les termes du plus petit degré de cette dérivée, quand y est considéré comme de l'ordre μ, répondront à des points situés sur une ligne droite, et cette ligne droite sera la droite G qu'on aura reculée d'une unité dans la direction $O\beta$ ou $O\alpha$. La même remarque s'appliquera s'il s'agit des dérivées secondes de la fonction $f(x,y)$; car il suffira d'opérer un nouveau déplacement d'une unité vers les α ou les β négatifs.

Si, maintenant, nous remarquons que la forme (4) du hessien ne contient que des dérivées d'ordre un ou deux de la fonction $f(x,y)$, on voit que, pour avoir les termes du plus petit degré dans le hessien, il suffit de faire la substitution $y = Vx^\mu$ dans les termes des différentes dérivées qui proviennent des termes de $f(x,y)$ répondant à la droite G. Il est d'ailleurs évident qu'on pourra substituer pour y sa valeur approchée νx^μ, quand on aura pris les dérivées. La seule réserve à faire est que le coefficient de la plus petite puissance de x que l'on calcule ainsi soit différent de zéro.

8. Faisons la substitution $y = \nu x^\mu$, où ν est la valeur approchée de la fonction V. Si l'on désigne par k le plus petit exposant de x, dans les termes de $f(x,y)$ après la substitution, on aura

$$(5)\qquad f(x,y) = x^k\varphi(\nu) + \ldots.$$

Si nous voulons avoir les termes du plus petit degré des dérivées $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \ldots$, il suffira de tenir compte du premier terme, qui a été seul écrit dans le second membre de l'équation précédente. Or les règles élémentaires des dérivées donneront

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= x^{k-1}\left(k\varphi - \mu\nu\frac{d\varphi}{d\nu}\right) + \ldots,\\
\frac{df}{dy} &= x^{k-\mu}\frac{d\varphi}{d\nu} + \ldots,\\
\frac{d^2f}{dx^2} &= x^{k-2}\left[k(k-1)\varphi + \mu\nu(1+\mu-2k)\frac{d\varphi}{d\nu} + \mu^2\nu^2\frac{d^2\varphi}{d\nu^2}\right] + \ldots,\\
\frac{d^2f}{dx\,dy} &= x^{k-\mu-1}\left[(k-\mu)\frac{d\varphi}{d\nu} - \mu\nu\frac{d^2\varphi}{d\nu^2}\right] + \ldots,\\
\frac{d^2f}{dy^2} &= x^{k-2\mu}\frac{d^2\varphi}{d\nu^2} + \ldots.
\end{aligned}\right.$$

On n'a écrit dans les seconds membres de ces formules que les termes du degré le moins élevé, et désigné simplement par φ la fonction $\varphi(\nu)$. Si l'on forme maintenant la quantité

$$\left(\frac{df}{dy}\right)^2\frac{d^2f}{dx^2} - 2\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}\frac{d^2f}{dx\,dy} + \left(\frac{df}{dx}\right)^2\frac{d^2f}{dy^2},$$

on trouve immédiatement que les termes provenant de ceux qui ont été écrits dans les formules (6) ont le même degré $3k - 2\mu - 2$, et que le coefficient en $x^{3k-2\mu-2}$ est

$$(7)\qquad k^2\varphi^2\frac{d^2\varphi}{d\nu^2} - k(1 - 2\mu + k)\varphi\frac{d\varphi^2}{d\nu^2} + \mu(1-\mu)\nu\frac{d\varphi^3}{d\nu^3}.$$

Si l'on regarde ν comme le coefficient de x^μ dans la valeur approchée de la racine, on aura $\varphi(\nu) = 0$, et le coefficient se réduira à

$$\mu(1-\mu)\nu\frac{d\varphi^3}{d\nu^3}.$$

D'après la nature de la question, μ et ν sont différents de zéro; notre coefficient ne pourra être nul que dans deux cas :

1° $\mu = 1$. La racine considérée est du premier degré, ou a pour valeur approchée $y = \nu x$.

2° $\frac{d\varphi}{d\nu} = 0$, c'est-à-dire que l'équation $\varphi(\nu) = 0$ a des racines multiples.

En écartant ces deux exceptions, on voit donc qu'il faudra chercher le degré μ de chaque racine infiniment petite, le degré k de sa substitution dans $f(x, y)$, qui n'est autre que l'ordonnée à l'origine de la ligne G, et multiplier le nombre $3k - 2\mu - 2$ par le nombre des racines infiniment petites du degré μ, enfin répéter le même calcul pour les racines infiniment petites des différents degrés. Faisons l'application à quelques exemples.

9. Étudions l'influence d'un point de rebroussement de première espèce, en prenant l'axe des x parallèle à la tangente de rebroussement. En transportant l'origine en ce point, l'équation de la courbe sera

$$y^2 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + \ldots = 0.$$

Les termes du plus petit degré sont évidemment $y^2 + ax^3$. On a deux racines infiniment petites de degré $\mu = \frac{3}{2}$; k est égal à 3, et $3k - 2\mu - 2$ a pour valeur 4. Puisqu'il y a deux racines infiniment petites, le degré total sera 8; cela s'accorde bien avec le résultat connu.

10. Considérons un point de rebroussement de deuxième espèce ayant pour tangente Ox. L'équation de la courbe aura la forme

$$y^2 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 + dx^4 + \ldots = 0;$$

le terme en x^3 manque, d'après la définition de ce point. On voit très-facilement que le polygone élémentaire se réduit à une seule ligne droite répondant aux termes

$$y^2 + ax^2y + dx^4.$$

Il y a deux racines de degré $\mu = 2$; la quantité k est égale à 4, et $3k - 2\mu - 2$ a pour valeur 6. Le coefficient de x^4, quand on pose $y = \nu x^2$, étant $\nu^2 + a\nu + d$, il faut supposer, d'après ce qui a été dit plus haut, que ce trinôme n'est pas un carré parfait. La diminution apportée par un tel point sera donc de 12 unités.

11. Considérons un point tel que les termes du plus petit degré, quand y est infiniment plus petit, se réduisent à $y^p - ax^q$. Il y aura p racines d'ordre $\mu = \frac{q}{p}$. Le nombre k sera égal à q. La quan-

tité $3k - 2\mu - 2$ aura pour valeur $3q - 2\frac{q}{p} - 2$, et, comme il y a p racines infiniment petites, la diminution sera $3pq - 2p - 2q$.

Supposons en particulier $p = 1$. On aura un point simple; mais la tangente, qui est Ox, aura avec la courbe un contact d'ordre $q - 1$, puisque le plus petit exposant de x dans l'équation donnée est q. Un pareil point compte donc pour $3q - 2 - 2q$ ou pour $q - 2$ points d'inflexion ordinaires.

III.

12. Il nous reste à examiner les deux cas d'exception où le coefficient de la plus petite puissance de x dans le hessien, après la substitution, est égal à zéro. Nous effectuerons, pour cela, dans la fonction $f(x, y)$ une transformation qui sera comprise dans la suivante, en appelant ψ et φ deux polynômes quelconques,

$$(1) \qquad x = \psi(x'), \quad y = \varphi(x') + y'.$$

On aura, par cette transformation,

$$(2) \qquad f(x, y) = \mathrm{F}(x', y'),$$

et les deux hessiens H et H′ seront liés par une relation que nous allons chercher. On a

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\mathrm{F}}{dx'} = \frac{df}{dx}\frac{d\psi}{dx'} + \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx'}, \\ &\frac{d\mathrm{F}}{dy'} = \frac{df}{dy}, \\ &\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'^2} = \frac{d^2f}{dx^2}\frac{d\psi^2}{dx'^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{d\varphi}{dx'}\frac{d\psi}{dx'} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{d\varphi^2}{dx'^2} + \frac{df}{dx}\frac{d^2\psi}{dx'^2} + \frac{df}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx'^2}, \\ &\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy'} = \frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{d\psi}{dx'} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{d\varphi}{dx'}, \\ &\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'^2} = \frac{d^2f}{dy^2}. \end{aligned} \right.$$

Calculons la quantité

$$\frac{-\mathrm{H}'}{(m'-1)^2} = \frac{d\mathrm{F}^2}{dy'^2}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'^2} - 2\frac{d\mathrm{F}}{dx'}\frac{d\mathrm{F}}{dy'}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy'} + \frac{d\mathrm{F}^2}{dx'^2}\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'^2},$$

où m' désigne le degré de la fonction $F(x', y')$; on trouvera immédiatement

$$(4) \qquad \frac{H'}{(m'-1)^2} = \frac{H}{(m-1)^2}\frac{d\psi^2}{dx'^2} - \frac{df^2}{dy^2}\left(\frac{df}{dx}\frac{d^2\psi}{dx'^2} + \frac{df}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx'^2}\right).$$

Il est avantageux d'introduire, dans le second membre de l'équation (4), les dérivées $\frac{dF}{dx'}$, $\frac{dF}{dy'}$, au lieu de $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, ce qui se fera facilement au moyen des deux premières équations (3). On aura ainsi

$$\frac{H'}{(m'-1)^2} = \frac{H}{(m-1)^2}\frac{d\psi^2}{dx'^2} - \frac{dF^2}{dy'^2}\left(\frac{dF}{dx'}\frac{\frac{d^2\psi}{dx'^2}}{\frac{d\psi}{dx'}} - \frac{dF}{dy'}\frac{\frac{d\varphi}{dx'}\frac{d^2\psi}{dx'^2}}{\frac{d\psi}{dx'}} + \frac{dF}{dy'}\frac{d^2\varphi}{dx'^2}\right),$$

ou, enfin, en résolvant, par rapport à H,

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} H = {} & \frac{(m-1)}{(m-1)^2}\frac{H'}{\frac{d\psi^2}{dx'^2}} \\ & + (m-1)^2\frac{\frac{dF^2}{dy'^2}}{\frac{d\psi^2}{dx'^2}}\left(\frac{dF}{dy'}\frac{\frac{d^2\psi}{dx'^2}}{\frac{d\psi}{dx'}} - \frac{dF}{dx'}\frac{\frac{d\varphi}{dx'}\frac{d^2\psi}{dx'^2}}{\frac{d\psi}{dx'}} + \frac{dF}{dy'}\frac{d^2\varphi}{dx'^2}\right).\end{aligned}\right.$$

13. Considérons une racine du premier degré, dont la valeur approchée est $y = \nu x$, et posons

$$x = x', \quad y - \nu x = y';$$

nous aurons un cas particulier de la transformation précédente, le polynôme $\psi(x')$ se réduisant à x', et le polynôme $\varphi(x')$ à $\nu x'$. La formule (5) se réduira ici à

$$H = H',$$

ce qui donne la propriété connue du hessien, d'être un covariant. Au lieu de substituer dans H la valeur plus approchée $y = \nu x + y'$, il suffira de substituer y' dans le hessien H'. Or y' est maintenant d'un degré supérieur à l'unité; le degré de la substitution sera donc, en désignant par μ' le degré de y', par k' le degré de la substitution dans la fonction $F(x,y') = f(x, y' + \nu x)$,

$$3k' - 2\mu' - 2,$$

en sorte qu'on n'aura nullement à calculer le hessien H'.

14. Considérons un point double ordinaire,

$$(y - ax)(y - bx) + \varphi_3(x,y) + \varphi_4(x,y) + \ldots = 0,$$

où je supposerai que a et b sont distincts, et que la fonction homogène du troisième degré $\varphi_3(x,y)$ n'est divisible ni par $y - ax$ ni par $y - bx$. Il y a ici deux racines infiniment petites du premier ordre. Posons $y - ax = y'$, l'équation deviendra

$$y'[(a-b)x + y'] + \varphi_3(x, ax + y') + \ldots = 0.$$

Les termes qui répondront au polynôme élémentaire seront

$$y'^2 + (a-b)xy' + \varphi_3(1, a)x^3.$$

Le polynôme élémentaire se composera de deux côtés; le premier fournira, comme cela doit être, une racine du premier ordre, dont nous n'avons pas à nous occuper; le second côté fournira une racine de degré 2; le résultat de la substitution de cette racine dans le premier membre de l'équation sera de degré 3; la quantité $3k' - 2\mu' - 2$ aura donc pour valeur 3, et, puisqu'il y a deux racines infiniment petites, le degré total sera 6. Cela est bien d'accord avec la réduction indiquée par les formules de Plücker.

15. Considérons un point multiple d'ordre p, dont les tangentes sont distinctes. Quand on aura transporté l'origine en ce point, l'équation prendra la forme

$$(y - a_1x)(y - a_2x)\ldots(y - a_px) + \varphi_{p+1})(x,y) + \ldots = 0;$$

l'équation est ordonnée par rapport aux deux variables x et y. Nous supposons $a_1, a_2, \ldots, a_p$ différents, et nous admettons que la fonction homogène de degré $\mu + 1, \varphi_{p+1}(x,y)$ ne soit divisible par aucun des binômes $y - a_1x$, $y - a_2x$, $\ldots, y - a_px$. Posons $y - a_1x = y'$; l'équation deviendra

$$y'[y' + (a_1 - a_2)x][y' + (a_1 - a_3)x]\ldots$$
$$[y' + (a_1 - a_p)x] + \varphi_{p+1}(x, a_1x + y') + \ldots = 0.$$

Les termes qui répondront aux côtés du polygone élémentaire seront les termes en

$$y'^p, \quad y'^{p-1}x, \quad y'^{p-2}x^2, \quad \ldots, \quad y'x^{p-1}, \quad x^{p+1}.$$

Il n'y aura pas de terme en x^p, et le coefficient $\varphi_p(1, a_1)$ de x^{p+1} est différent de zéro, d'après l'hypothèse. Les p points répondant aux p premiers termes sont sur une même ligne droite, et fournissent des racines infiniment petites d'ordre 1, dont nous n'avons pas à nous occuper. Mais le second côté du polygone élémentaire répondant aux deux derniers termes fournit une racine d'ordre 2. Cette racine, substituée dans le premier membre de l'équation, donne le degré $k' = p + 1$. La quantité $3k' - 2\mu' - 2$ sera donc égale à $3p + 3 - 4 - 2 = 3(p-1)$. Puisqu'il y a p racines, le degré total sera $3p(p-1)$.

16. La même méthode s'applique encore, si l'origine est un point de rebroussement de première espèce, avec une tangente quelconque. L'équation aura la forme

$$(y - ax)^2 + \varphi_3(x, y) + \ldots = 0,$$

la fonction $\varphi_3(x, y)$ n'étant pas divisible par $y - ax$. Il y aura deux valeurs de $y' = y - ax$ de degré $\mu' = \frac{3}{2}$, et l'on aura $k' = 3$ La diminution sera donc $2(3k' - 2\mu' - 2) = 8$, comme dans le cas où la tangente était l'axe des x.

Une courbe du troisième degré a neuf points d'inflexion. On connaît la propriété remarquable de ces points de se trouver trois à trois sur un système de douze lignes droites, qui est une conséquence immédiate de l'expression des coordonnées par les fonctions elliptiques. Si la courbe a un point double, il n'y aura plus que trois points d'inflexion, qui seront en ligne droite. Si la courbe a un point de rebroussement, il n'y aura plus qu'un seul point d'inflexion.

17. Il nous reste enfin à examiner le second cas d'exception, qui se présente quand l'équation $\varphi(\nu) = 0$ a des racines multiples d'ordre quelconque.

On sait, par la théorie des fonctions algébriques, que, si p désigne le nombre des racines qui forment un système circulaire, et si l'on pose

$$(6)\qquad x = x'^p,$$

on aura

$$(7)\qquad y = ax'^\alpha + bx'^\beta + \ldots + lx'^\lambda + y',$$

où α, β, ..., λ sont des nombres entiers, qu'on peut supposer croissants, et où les p valeurs approchées de y' sont distinctes les unes des autres. Nous pouvons admettre, en outre, que α est différent de p; autrement, y serait en x du premier degré, et la substitution $y' = y - ax$ nous débarrasserait de ce cas. La transformation exprimée par les formules (6) et (7) est un cas particulier de celle qui a été examinée dans le n° 12. On aura ici

$$\psi(x') = x'^p, \quad \varphi(x') = ax'^\alpha + bx'^\beta + \ldots + lx'^\lambda.$$

Au lieu de substituer dans H la racine y, représentée par la formule (7), il est clair qu'ayant fait la substitution dans la fonction donnée, qui fournira l'identité

$$f(x, y) = \mathrm{F}(x', y'),$$

il suffira de substituer y' dans le second membre de l'identité (5) du n° 12, qui ne contient que des résultats relatifs à x' et y', ou, si l'on veut, à la fonction $\mathrm{F}(x', y')$. Cette identité deviendra, en remarquant que

$$\frac{d\psi}{dx'} = px'^{p-1}, \quad \frac{d^2\psi}{dx'^2} = p(\mu - 1)x'^{p-2},$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{H} &= \frac{(m-1)^2}{(m'-1)^2}\,\frac{\mathrm{H}'}{p^2 x'^{2p-2}} \\ &+ \frac{(m-1)^2 \dfrac{d\mathrm{F}^2}{dy'^2}}{p^2 x'^{2p-2}}\left(\frac{p-1}{x'}\frac{d\mathrm{F}}{dx'} - \frac{p-1}{x'}\frac{d\mathrm{F}}{dy'}\frac{d\varphi}{dx'} + \frac{df}{dy'}\frac{d^2\varphi}{dy'^2}\right). \end{aligned}\right.$$

Le second membre de la formule (8) se compose de quatre termes; nous allons faire voir que les deux premiers ont le même degré, ainsi que les deux derniers, mais qu'on peut négliger les premiers comme étant d'un ordre infinitésimal supérieur à celui des autres.

Désignons toujours par μ' le degré d'une racine y', et par k' le degré en x' de la substitution de l'expression $y' = \nu' x'^{\mu'}$ dans $F(x', y')$. Les racines y' étant d'ordre différent de l'unité, et leurs valeurs approchées étant distinctes, le degré du hessien H' sera $3k' - 2\mu' - 2$, et celui du premier terme dans le second nombre de (8) sera $3k' - 2\mu' - 2p$.

Puisque F est du degré k' quand y' est de l'ordre μ', $\frac{dF}{dy'}$ sera de l'ordre $k' - \mu'$, et $\frac{dF}{dx'}$ de l'ordre $k' - 1$. Le degré du deuxième terme sera donc

$$2k' - 2\mu' + k' - 1 - 2p + 2 - 1 = 3k' - 2\mu' - 2p.$$

Le polynôme $\varphi(x')$ est du degré α. Le degré du troisième terme sera donc, comme celui du quatrième,

$$3k' - 3\mu' - 2p + \alpha.$$

Je dis que l'on a

$$3k' - 3\mu' - 2p + \alpha < 3k' - 2\mu' - 2p;$$

cela revient, en effet, à $\alpha < \mu'$, ce qui est évident par la définition de la formule (7).

18. Réunissons les deux derniers termes, afin de voir dans quel cas le coefficient pourrait être nul. On trouvera

$$\frac{(m-1)^2 \frac{df^3}{dy'^3}}{p^2 x'^{2p-2}} \left(\frac{d^2\varphi}{dx'^2} - \frac{p-1}{x'} \frac{d\varphi}{dx'} \right) = \frac{(m-1)^2 \frac{dF^3}{dy'^3}}{p^2 x'^{p-1}} \frac{d}{dx'} \left(\frac{\frac{d\varphi}{dx'}}{x'^{p-1}} \right).$$

Le coefficient de la plus petite puissance de x' dans l'expression $\frac{dF}{dy'}$ est différent de zéro, puisque les valeurs approchées de y' sont toutes distinctes. La fonction $\frac{\frac{d\varphi}{dx'}}{x'^{p-1}}$ a pour expression

$$a\alpha x'^{\alpha-p} + b\beta x'^{\beta-p} + \ldots + l\lambda x'^{\lambda-p}.$$

La dérivée

$$a\alpha(\alpha - p) x'^{\alpha-p-1} + \ldots$$

sera donc bien du degré $\alpha - p - 1$, à moins que $\alpha = p$, hypothèse qu'on a pu écarter dès le début.

Ainsi le degré de substitution de notre racine dans le hessien H sera

$$3k' - 3\mu' - 2p + \alpha,$$

où les quantités k', μ', p, α seront connues quand on aura fait les calculs nécessaires pour développer en série la racine en question avec assez de termes pour qu'elle se distingue des autres. Il faudra seulement avoir soin d'observer que l'on a posé $x = x'^p$, et qu'il faudra diviser par p pour revenir au degré relatif à l'infiniment petit principal x.

19. J'indiquerai enfin comment la méthode qui a été développée conduit au théorème de M. Brill.

Admettons que la courbe $f(x, y) = 0$ ait un point multiple d'ordre p. Transportons-y l'origine, et coupons la courbe par une droite arbitraire $y = vx$. Le calcul du n° 8 montre que l'équation en x, obtenue par l'élimination de y entre $y = vx$ et $f(x, y) = 0$, admet une racine nulle d'ordre $3p - 4$. La courbe hessienne a donc à l'origine un point multiple de l'ordre $3p - 4$. Les tangentes en ce point s'obtiendront en égalant à zéro le coefficient de x^{3p-4}, c'est-à-dire, puisque $\mu = 1$,

$$p^2\varphi^2\frac{d^2\varphi}{dv^2} - p(p-1)\frac{d\varphi^2}{dv^2};$$

on trouve d'abord $\varphi = 0$, ce qui prouve que p des tangentes coïncident avec les p tangentes au point multiple de la courbe donnée. Il est aisé de vérifier que les autres tangentes, dont les coefficients angulaires sont fournis par l'équation

$$p\varphi\frac{d^2\varphi}{dv^2} - (p-1)\frac{d\varphi^2}{dv^2} = 0,$$

correspondent au hessien de la fonction φ, c'est-à-dire, en rendant homogène cette fonction par rapport à deux variables x et y, à l'expression

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^2\varphi}{dx^2} & \dfrac{d^2\varphi}{dx\,dy} \\ \dfrac{d^2\varphi}{dy\,dx} & \dfrac{d^2\varphi}{dy^2} \end{vmatrix}.$$

Le théorème des fonctions homogènes donne

$$x\frac{d^2\varphi}{dx^2}+y\frac{d^2\varphi}{dy^2}=(p-1)\frac{d\varphi}{dx};$$

on en conclut que, quand on aura remplacé x par v et y par 1, l'expression $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ deviendra

$$(p-1)\frac{d\varphi}{dv}-v\frac{d^2\varphi}{dv^2}.$$

On a de même les identités

$$x\frac{d^2\varphi}{dy\,dx}+y\frac{d^2\varphi}{dy^2}=(p-1)\frac{d\varphi}{dy},$$

$$x\frac{d\varphi}{dx}+y\frac{d\varphi}{dy}=p\varphi,$$

dont la seconde montre que $\frac{d\varphi}{dy}$ doit être remplacé par

$$p\varphi-v\frac{d\varphi}{dv}.$$

La première montre alors que $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ doit être remplacé par

$$p(p-1)\varphi-2(p-1)v\frac{d\varphi}{dv}+v^2\frac{d^2\varphi}{dv^2}.$$

En substituant à $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$, $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ dans la forme hessienne les expressions que nous venons de trouver, elle se réduit à

$$(p-1)\left[p\varphi\frac{d^2\varphi}{dv^2}-(p-1)\frac{d\varphi^2}{dv^2}\right],$$

qui est bien, à un facteur constant près, le quotient par φ du coefficient de x^{3p-4}. Ainsi :

En un point multiple d'ordre p de la courbe proposée, la courbe hessienne a un point multiple d'ordre $3p-4$; p des tangentes sont les mêmes que celles de la courbe donnée et, pour avoir les autres, il suffit d'égaler à zéro le hessien répondant aux p tangentes communes.