BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 151-200
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_151_1>

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ;

PAR M. G. DARBOUX.

(Suite.)

XIII.

Examen du cas où le multiplicateur est de la forme $u^\alpha p^\beta$, u étant du second degré, p du premier.

Dans ce cas, il devra y avoir, comme solutions particulières, une droite et une conique. Supposons d'abord que la droite ne soit pas tangente à la conique : on pourra choisir les axes de telle ma-

---

(1) *Note on the Mean Solar Parallax as derived from the observations of the recent Transit of Venus*, by Cap. G.-L. Tupman (*Monthly Notices*, vol. XXXVIII, p. 334).

nière que l'équation de la droite soit

$$x = 0,$$

et celle de la conique

$$u = x^2 + y^2 + z^2 = 0;$$

on aura

$$L = Qz - Ry,$$
$$M = Rx - Pz,$$
$$N = Py - Qx.$$

En exprimant que L est divisible par x, on trouvera

$$Q = cx, \quad R = bx,$$

et les valeurs définitives seront

$$(70) \quad \begin{cases} L = x(cz - by), & \Delta u = 0, \\ M = bx^2 - Pz, & \Delta x = (cz - by)x, \\ N = Py - cx^2, & H = cz - by + y\dfrac{\partial P}{\partial z} - z\dfrac{\partial P}{\partial y}. \end{cases}$$

Si l'on veut que le facteur soit $u^\beta x^\alpha$, il faudra d'abord que

$$2\beta + \alpha = -4,$$

et ensuite

$$(1 + \alpha)(cz - by) - z\frac{\partial P}{\partial y} + y\frac{\partial P}{\partial z} = 0,$$

ce qui donnera, pour P,

$$P = (\alpha + 1)(bz + cy) + mx.$$

On trouvera sans peine, dans ce cas, la nouvelle solution particulière

$$\frac{mx}{\alpha + 2} + bz + cy = 0,$$

qui conduira à l'intégrale

$$u^\beta x^{\alpha+1}\left(\frac{mx}{\alpha + 2} + bz + cy\right) = C,$$

qui ne diffère pas de l'intégrale (VI). Le seul cas nouveau correspond à la valeur de α,

$$\alpha = -2.$$

Dans ce cas, l'intégrale devient

$$\text{(XIII)} \qquad \frac{bz + cy}{x} + m \log \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \text{C}.$$

Étudions maintenant le cas, beaucoup plus intéressant, où l'on suppose que la droite soit tangente à la conique, et choisissons les axes de telle manière que l'équation de la conique soit

$$y^2 + 2xz = 0,$$

celle de la droite étant toujours $x = 0$.

Alors on aura

$$\begin{aligned} \text{L} &= \text{Q}x - \text{R}y, \\ \text{M} &= \text{R}z - \text{P}x, \\ \text{N} &= \text{P}y - \text{Q}z, \end{aligned}$$

L devant être divisible par x, R est de la forme cx; mais, comme à P, Q, R on peut, sans changer L, M, N, substituer $\text{P} + \alpha z$, $\text{Q} + \alpha y$, $\text{R} + \alpha x$, nous pourrons supposer $\text{R} = 0$. Alors on a

$$\begin{aligned} \text{L} &= \text{Q}x, \\ \text{M} &= -\text{P}x, \\ \text{N} &= \text{P}y - \text{Q}x, \end{aligned} \qquad \text{H} = x\left(\frac{\partial \text{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \text{P}}{\partial y}\right) + y\frac{\partial \text{P}}{\partial z} - z\frac{\partial \text{P}}{\partial y}.$$

Le facteur étant $x^\alpha u^\beta$, on devra avoir

$$\Delta(x^\alpha u^\beta) + \text{H}x^\alpha u^\beta = 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} \text{P} &= mx + ny + pz, \\ \text{Q} &= m'x + n'y + p'z. \end{aligned}$$

L'équation précédente deviendra

$$\alpha \text{Q} + x(m' - n) + py - p'z = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)m' - n &= 0, \\ \alpha n' + p &= 0, \\ (\alpha - 1)p' &= 0. \end{aligned}$$

L'hypothèse $p' = 0$ conduirait à l'intégrale déjà trouvée. Supposons $\alpha = 1$; on a alors

$$-n' = p, \quad m' = \frac{n}{2}.$$

Le multiplicateur sera $\frac{x}{u^{\frac{5}{2}}}$. L'intégration n'offre aucune difficulté, et l'on obtient un résultat de la forme suivante :

$$\text{(XIV)} \qquad [x^2(ax + by + cz) + y^3 + 3xyz]^2 = C(y^2 + 2xz)^3.$$

L'intégrale générale se compose de courbes du sixième ordre; mais il y a, comme solutions particulières, la droite et la conique qui ont servi à former le facteur, la cubique correspondante à une valeur nulle de C, et enfin une courbe du quatrième ordre, qu'on obtient en faisant $C = 1$ et en supprimant le facteur x^2. La cubique, comme on doit s'y attendre d'après le théorème de l'article VIII, a un point double, dont les coordonnées sont $x = 0$, $y = 0$; ici ce point n'est jamais un point de rebroussement.

Pour simplifier, autant que possible, l'intégrale précédente, il convient de rapporter la cubique aux axes les plus simples possibles : ces axes seront formés par les deux tangentes au point double, et par la droite qui contient les trois points d'inflexion. En effectuant ce changement de variables, l'intégrale prend la forme

$$\text{(XIV)} \qquad (y^3 + x^3 + 3xyz)^2 = C(y^2 + 2xz + ax^2)^3,$$

qui montre que cette intégrale n'a qu'un seul invariant a.

XIV.

Étude des cas où le multiplicateur est de la forme $u^\alpha p^\beta q^\gamma$, u étant du second degré, p et q du premier.

Dans ce cas, l'équation admettra comme solutions deux droites et une conique. Si les deux droites ne sont pas tangentes à la conique, et si elles ne se coupent pas sur la conique, nous avons vu (art. IX) que l'intégrale sera de la forme

$$u^m = Cp^{m'}q^{m''}.$$

Il suffira donc d'examiner les cas exceptionnels que nous avions exclus.

Le cas où une seule des droites est tangente à la conique, et où leur point de concours est en dehors de la conique, ne donne rien de nouveau. Examinons le cas où les deux droites sont tangentes; alors, en choisissant convenablement les axes, les équations des deux droites et de la conique deviendront

$$x = 0, \quad z = 0, \quad u = y^2 + 2xz = 0.$$

On aura, comme dans l'exemple précédent,

$$L = Qr, \quad M = -Px, \quad N = Py - Qz.$$

D'ailleurs, N devant être divisible par z, puisque $z = 0$ est une solution, on devra faire $P = az$, ou, plus simplement, $P = z$.

On a donc

$$\begin{aligned} L &= x(mx + ny + pz), \\ M &= -xz, \\ N &= yz - z(mx + ny + pz), \\ H &= mx + y - pz. \end{aligned}$$

Écrivons que le facteur est $x^\alpha z^\beta u^\gamma$; on a

$$\alpha + \beta + 2\gamma = -4,$$
$$\Delta(x^\alpha z^\beta u^\gamma) + H\, x^\alpha z^\beta u^\gamma = 0,$$

ce qui donne les conditions

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta + 1)m &= 0, \\ (\alpha - \beta)n + \beta + 1 &= 0, \\ (\alpha - \beta - 1)p &= 0. \end{aligned}$$

Excluons le cas où m et p seraient nuls, qui conduirait à l'intégrale (VI); il faut donc que l'on ait

$$\alpha - \beta = \pm 1.$$

Les deux équations à considérer se ramènent l'une à l'autre en échangeant x et z. Prenons donc

$$\alpha = \beta + 1;$$

alors on aura

$$m = 0, \quad n = -\alpha,$$

et le multiplicateur sera

$$x^\alpha z^{\alpha - 1} u^{-\alpha - \frac{3}{2}}.$$

L'intégration s'effectue sans difficulté, et conduit à l'intégrale

$$\text{(XV)} \qquad \frac{x^{\alpha+1}z^{\alpha}}{u^{\alpha+\frac{1}{2}}} + p'\int \frac{\lambda^{\alpha}\,d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}} = \mathrm{C},$$

où l'on a posé $2xz = \lambda u$.

Le cas où les deux droites p, q se coupent sur la conique u, aucune n'étant tangente à la courbe, ne donne rien de nouveau. Laissons-le de côté, et examinons celui où, les deux droites se coupant sur la courbe, l'une est tangente.

Alors, en choisissant convenablement les axes, les équations des deux droites et de la conique seront

$$x = 0, \quad y = 0, \quad u = y^2 + 2xz = 0.$$

On a encore ici

$$\mathrm{L} = \mathrm{Q}x, \quad \mathrm{M} = -\mathrm{P}x, \quad \mathrm{N} = \mathrm{P}y - \mathrm{Q}z,$$

et il reste à exprimer que $y = 0$ est une solution, c'est-à-dire que P est divisible par y. Prenons $\mathrm{P} = y$; on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= x(mx + ny + pz), \\ \mathrm{M} &= -xy, \\ \mathrm{N} &= y^2 - z(mx + ny + pz), \\ \mathrm{H} &= (m-1)x - pz. \end{aligned}$$

En écrivant que $x^{\alpha}u^{\beta}z^{\gamma}$ satisfait à l'équation du multiplicateur, on aura les équations

$$\begin{aligned} (\alpha+1)m &= \beta + 1, \\ \alpha n &= 0, \\ (\alpha-1)p &= 0. \end{aligned}$$

Excluons les cas qui conduiraient aux intégrales déjà trouvées, nous aurons seulement à examiner l'hypothèse

$$\alpha = 1, \quad n = 0, \quad m = \frac{1+\beta}{2}.$$

L'intégration s'effectuera sans difficulté, et conduira, aux notations près, à l'intégrale

$$\text{(XVI)} \qquad (y^2 - 2\alpha xz + a x^2)(y^2 + 2xz)^{\alpha} = \mathrm{C}y^{2\alpha+2}.$$

On remarquera que nous voyons apparaitre ici, pour la première fois, deux coniques comme solutions particulières. Ces deux coniques sont simplement tangentes, ce qui est d'accord avec le théorème de l'article XII.

Il ne reste plus à examiner de multiplicateur formé avec une conique et deux droites.

XV.

Étude du cas où au nombre des solutions particulières se trouvent trois droites et une conique.

Supposons d'abord que les trois droites forment un triangle, que nous prendrons pour triangle de référence. S'il y a seulement deux des trois droites qui ne soient pas tangentes à la conique, ou qui ne se coupent pas sur la conique, l'intégrale sera de la forme

$$u^m = C p^{m'} q^{m''}.$$

Nous pouvons donc écarter cette hypothèse, et il restera à examiner les suivantes :

1° La conique passe par les trois sommets du triangle formé par les trois droites. Alors il y a trois points par lesquels passent trois courbes non tangentes, satisfaisant à l'équation, les trois sommets du triangle, et (art. VIII) l'intégrale est formée par un faisceau de coniques circonscrites au triangle.

2° La conique passe par deux des sommets, par exemple, par ceux qui sont sur la droite $y = 0$. Alors l'une au moins des droites $x = 0$, $z = 0$ est tangente à la conique. Sans cela, on aurait deux droites ne se coupant pas sur la conique et non tangentes à la conique, ce qui est un cas exclu. On reconnait aisément que le cas où elles seraient toutes les deux tangentes est impossible. Il suffira donc de supposer qu'une seule des droites $x = 0$ est tangente à la conique.

Alors, en prenant convenablement les paramètres de référence, l'équation de la conique sera

$$u = y^2 + 2xy + 2xz = 0,$$

et les valeurs correspondantes de L, M, N

$$\begin{aligned} L &= Qx - R(y + x), \\ M &= R(y + z) - Px, \\ N &= P(x + y) - Q(y + z). \end{aligned}$$

Il faut que L, M, N soient divisibles respectivement par x, y, z. Les valeurs correspondantes de P, Q, R sont

$$\begin{aligned} P &= -y, \\ Q &= -x - y + hz, \\ R &= 0. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} L &= (-x - y + hz)\,x, \\ M &= xy, \\ N &= [x + y(1-h) - hz]\,z. \end{aligned}$$

On trouve facilement une cinquième solution

$$p = y(1-h) - hz = 0;$$

car on a

$$\Delta p = (x - hz)\,p.$$

Au moyen de ces cinq solutions, on forme, d'après la règle, l'intégrale, qui est

$$\text{(XVII)} \qquad x^{2h-2} z^{h-2} [hz + y(h-1)]^h (y^2 + 2xz + 2xy)^{2-2h} = C.$$

3° Examinons maintenant le cas où la conique passe par un seul sommet du triangle $x = 0$, $y = 0$. Alors elle sera nécessairement tangente au côté opposé, et son équation sera

$$(x-y)^2 + 2z(mx + ny) = 0.$$

Les valeurs correspondantes de L, M, N s'obtiennent sans peine. On a

$$\begin{aligned} L &= x[2mnz + (m+n)y], \\ M &= y[2mnz + (m+n)x], \\ N &= z[-my - nx]. \end{aligned}$$

On peut encore trouver une cinquième solution

$$x - y = 0;$$

car on a

$$\Delta(x-y) = 2mnz(x-y).$$

Au moyen de ces cinq solutions, on forme l'intégrale générale, qui est

$$\text{(XVIII)} \qquad z x^{\frac{m}{m+n}} y^{\frac{n}{m+n}} = C[(x-y)^2 + 2z(mx + n - y)].$$

Dans ces deux derniers cas, il y a trois droites passant par un point. Les intégrales trouvées sont donc des cas particuliers de l'intégrale X.

4° Enfin, si la conique ne passe par aucun des sommets du triangle formé par les trois droites, elle est nécessairement tangente aux trois côtés; car, si elle coupait un de ces côtés, il y aurait, sur ce côté, quatre points singuliers, ce qui est impossible. Servons-nous des formules de l'article XII. Les trois sommets de notre triangle sont les trois points singuliers qui ne se trouvent pas sur la conique. Les formules (68) sont donc applicables, et pour que les trois côtés du triangle donnent des solutions, il faut que dans ces formules on ait

$$a = a' = a'' = 0.$$

Or, il résulte des valeurs de a, a', a'' que ces équations expriment précisément que la conique est tangente aux trois côtés. En disposant des paramètres de référence de telle manière que l'équation de cette conique soit

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2xz - 2xy = 0,$$

les formules déjà rappelées nous donneront

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} &= xz\,(c - a) + xy\,(a - b),\\
\mathrm{M} &= yx\,(a - b) + yz\,(b - c),\\
\mathrm{N} &= zy\,(b - c) + zx\,(c - a),\\
\mathrm{H} &= x\,(c - b) + y\,(a - c) + z\,(b - a).
\end{aligned}$$

Avec les quatre solutions, on forme le facteur, qui est

$$\mu = \frac{1}{xyz\sqrt{u}}.$$

L'intégration directe, quoiqu'un peu longue, n'offre aucune difficulté. En ne prenant dans la différentielle que les termes contenant a, on trouve leur intégrale

$$a \log \frac{x - y - z + \sqrt{u}}{x - y - z - \sqrt{u}} = 2a \log \frac{x - y - z + \sqrt{u}}{2\sqrt{yz}},$$

ce qui conduit à l'intégrale générale

$$(\text{XIX})\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{x-y-z+\sqrt{u}}{x-y-z-\sqrt{u}}\right)^a\\ &\times\left(\frac{y-z-x+\sqrt{u}}{y-z-x-\sqrt{u}}\right)^b\left(\frac{z-x-y+\sqrt{u}}{z-x-y-\sqrt{u}}\right)^c=\mathrm{C},\end{aligned}\right.$$

que l'on pourrait aussi écrire

$$\frac{(x-y-z+\sqrt{u})^{2a}\,(y-z-x+\sqrt{u})^{2b}\,(z-x-y+\sqrt{u})^{2c}}{x^{b+c}\,y^{a+c}\,z^{a+b}}=\mathrm{C}'.$$

Nous présenterons quelques remarques sur ce résultat, qui nous paraît élégant.

D'abord, l'équation différentielle ne changeant pas quand on augmente a, b, c d'une même quantité h, il faut que le produit

$$\frac{x-y-z+\sqrt{u}}{x-y-z-\sqrt{u}}\cdot\frac{y-z-x+\sqrt{u}}{y-z-x-\sqrt{u}}\cdot\frac{z-x-y+\sqrt{u}}{z-x-y-\sqrt{u}}$$

soit constant, et en effet la valeur de ce produit est l'unité.

Remarquons, de plus, que l'équation intégrée ici est celle que nous avons considérée à l'article VII, et qui est caractérisée par cette propriété, qu'il passe, en trois points singuliers, une infinité de courbes tangentes, aux mêmes droites.

Enfin, nous signalerons une manière curieuse d'interpréter le résultat trouvé. Posons

$$(71)\qquad x=a^2,\quad y=b^2,\quad z=c^2,$$

et considérons a, b, c comme les côtés d'un triangle, dont les angles seront A, B, C. On aura

$$u=-4b^2c^2\sin^2\mathrm{A}=-4a^2c^2\sin^2\mathrm{B}=-4a^2b^2\sin^2\mathrm{C},$$
$$x-y-z=a^2-b^2-c^2=-2bc\cos\mathrm{A},$$

et par suite

$$\frac{x-y-z+\sqrt{u}}{x-y-z-\sqrt{u}}=e^{2i\mathrm{A}}.$$

L'intégrale générale (XIX) sera donc, en remplaçant les exposants a, b, c par m, n, p,

$$m\mathrm{A}+n\mathrm{B}+p\mathrm{C}=\text{const.}$$

Ainsi, avec le changement de notations exprimé par les formules (71), l'équation différentielle considérée est celle des triangles dont les angles satisfont à la relation précédente.

Pour terminer l'examen complet du cas où il y a, comme solutions particulières, trois droites et une conique, il nous reste à traiter le cas où les trois droites sont concourantes. Alors, ou bien la conique passe par le point de concours des trois droites, ou bien elle est tangente à deux des droites. L'examen de ce dernier cas, qui n'offre aucune difficulté, nous a conduit à l'intégrale suivante, que nous nous contenterons de mentionner :

$$\text{(XX)} \qquad \frac{y+\sqrt{xz}}{y-\sqrt{xz}} = C\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{z}}{\sqrt{x}-\sqrt{z}}\right)^{h}.$$

Étudions un peu, avec plus de détails, le cas où la conique passe par le point de concours des trois droites. Si l'on prend ce point de concours comme origine, et que l'on choisisse les axes de telle manière que la conique ait pour équation

$$u = y^2 + 2xz = 0,$$

l'équation différentielle correspondante sera définie par les valeurs

$$\begin{aligned}
L &= ax^2 + bxy - y^2 + xz,\\
M &= -a''x^2 - b''xy + yz,\\
N &= a''xy + b''y^2 - z^2 - axz - byz.
\end{aligned}$$

Si l'on prend comme variables x, y et u, l'équation deviendra

$$L(y\,du - 2u\,dy) + M(2u\,dx - x\,du) = 0,$$

et, si l'on fait pour un instant $x = 1$, elle devient une équation linéaire $\frac{1}{u}$. L'intégrale s'obtiendra donc sans difficulté, et l'on trouvera le résultat suivant : les trois droites satisfaisant à l'équation étant représentées par les équations

$$y = \alpha x, \quad y = \beta x, \quad y = \gamma x,$$

formons les fonctions

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= (y-\alpha x)(y-\beta x)(y-\gamma x),\\
f(x,y) &= (y-\alpha x)^{\beta-\gamma}(y-\beta x)^{\gamma-\alpha}(y-\gamma x)^{\alpha-\beta}.
\end{aligned}$$

L'intégrale sera, en choisissant convenablement les paramètres de référence,

$$(\text{XX } bis)\qquad \frac{\varphi(x,y)f(x,y)}{x(y^2+2xz)}+\int f(x,y)\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=\text{C}.$$

Ici se termine l'examen des cas dans lesquels il y a, comme solutions particulières, une seule conique et des droites.

XVI.

Étude du cas où l'équation admet comme solutions particulières deux coniques simplement tangentes.

Dans ce cas, on choisira le triangle de référence de telle manière que les deux coniques aient pour équations

$$\begin{aligned} u &= x^2+y^2+2zx=0,\\ v &= x^2+y^2+2kzx=0. \end{aligned}$$

Les valeurs de L, M, N, définissant toute équation admettant la première conique comme solution particulière, seront

$$\begin{aligned} \text{L} &= \text{Q}x-\text{R}y,\\ \text{M} &= \text{R}(x+z)-\text{P}x,\\ \text{N} &= \text{P}y-\text{Q}(x+z), \end{aligned}$$

P, Q, R exprimant des polynômes du premier degré. On aura alors

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0,\\ \Delta v &= 2\text{P}xy(k-1)+2\text{Q}x^2(1-k)+2\text{R}yz(1-k). \end{aligned}$$

On trouve facilement les valeurs de P, Q, R pour lesquelles Δv est divisible par v. Ce sont

$$\text{P}=bz-y,\quad \text{Q}=x+2kz,\quad \text{R}=bx,$$

et les valeurs correspondantes de L, M, N deviennent

$$(72)\qquad \left\{\begin{aligned} \text{L} &= x^2+2kxz-bxy,\\ \text{M} &= bx^2+xy,\\ \text{N} &= byz-y^2-x^2-(2k+1)xz-2kz^2. \end{aligned}\right.$$

On a

$$H = 2x(1-k) - 2kz, \quad \Delta u = 0,$$
$$\Delta v = 2(1-k)xv, \quad \Delta x = x(x + 2kz - by).$$

Remarquons que la solution $x = 0$ s'est introduite d'elle-même. Cela est conforme au théorème général de l'article VII, d'après lequel, toutes les fois que deux courbes satisfaisant à l'équation différentielle sont simplement tangentes, leur tangente commune est une nouvelle solution particulière.

Il suffira, dans le cas actuel, de connaître une seule solution nouvelle pour obtenir au moins le facteur. Cherchons s'il y a des droites pouvant satisfaire à l'équation. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une droite, c'est que trois points singuliers soient en ligne droite. Nous allons d'abord déterminer ces points.

Ils sont déterminés, nous l'avons vu, par les équations

$$L = \lambda x, \quad M = \lambda y, \quad N = \lambda z.$$

Il y a d'abord les trois points sur la droite $x = 0$,

(1) $\qquad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1, \quad \lambda = -2k,$

(2, 3) $\qquad x = 0, \quad y^2 - byz + 2kz^2 = 0, \quad \lambda = 0.$

Il y a ensuite un point sur la conique v, et non sur la conique u,

(4) $\qquad x = 1, \quad y = -b, \quad z = -\dfrac{b^2+1}{2k}, \quad \lambda = 0;$

un point sur la conique u, et non sur v,

(5) $\qquad x = k, \quad y = -b, \quad z = -\dfrac{b^2+k^2}{2k}, \quad \lambda = k(1-k),$

et enfin les deux points communs à u et à v,

(6) $\qquad x = 1, \quad y = i, \quad z = 0, \quad \lambda = 1 - bi,$

(7) $\qquad x = 1, \quad y = -i, \quad z = 0, \quad \lambda = 1 + bi.$

Ces sept points seront désignés par leurs numéros d'ordre.

D'abord, si le point (1) est en ligne droite avec deux autres, la solution particulière correspondante sera de la forme

$$mx + ny = 0.$$

Or on a

$$\Delta(mx+ny) = mx^2 + 2mkxz - mbxy + nbx^2 + nxy.$$

Pour que le second membre soit divisible par $mx+ny$, il faut que le coefficient de z soit nul, que l'on ait

$$m = 0.$$

La droite ne pourra donc être que

$$y = 0,$$

et il faudra que b soit nul.

Dans ce cas,

$$\Delta v = 2(1-k)xv,$$
$$\Delta y = xy,$$

et par conséquent

$$\Delta\left(\frac{vy^{2k-2}}{u^k}\right) = 0.$$

L'intégrale générale sera donc

$$C(x^2+y^2+2kxz)\,y^{2k-2} = (x^2+y^2+2xz)^k.$$

C'est, aux notations près, l'intégrale (XVI).

Nous pouvons donc laisser de côté le cas où la droite cherchée passerait par le point (1). Elle ne pourra donc couper la droite $x=0$ qu'en un des points (2, 3).

La droite 6, 7, $z=0$ ne pouvant jamais être solution, comme on s'en assurera sur l'équation, il ne reste donc que deux hypothèses : ou bien l'un des points 6,7, l'un des points 4,5 et l'un des points 2,3 seront en ligne droite, ou bien la droite 4,5 ira passer par un des points 2, 3.

Les points 6, 7 jouant le même rôle, et les points 4, 5 se changeant l'un dans l'autre quand on échange les deux coniques, tout se réduit, pour le premier cas, à exprimer que la droite 6, 4 contient l'un des points 2, 3. On obtient ainsi la condition

$$bi = 2k-1,$$

et la droite qui contient les points singuliers est

$$x + iy + z = 0.$$

On trouve, en effet,

$$\Delta(x+iy+z) = [(2k-1)x+iy-2kz](x+iy+z).$$

On a maintenant assez de solutions pour former le facteur; mais l'intégration se présente ainsi sous une forme si compliquée, que j'ai dû recourir au changement de variables suivant.

Prenons comme nouvelles inconnues

$$x+iy=\alpha,$$
$$x-iy=\beta,$$
$$x^2+y^2+2xz=u=\gamma^2;$$

comme $\Delta\gamma$ est nul, la nouvelle équation sera, d'après les règles données à l'article VI,

$$\Delta\alpha(\beta d\gamma-\gamma d\beta)+\Delta\beta(\gamma d\alpha-\alpha d\gamma)=0.$$

En d'autres termes, on aura, pour elle,

$$L'=\Delta\alpha,\quad M'=\Delta\beta,\quad N'=0.$$

Le calcul $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ n'offre aucune difficulté, et l'on trouve

$$L'=2\Delta\alpha=(1+bi)(\alpha^2+\alpha\beta)+2k(\gamma^2-\alpha\beta),$$
$$M'=2\Delta\beta=(1-bi)(\alpha^2+\alpha\beta)+2k(\gamma^2-\alpha\beta).$$

L'équation de la conique v devient

$$v=\alpha\beta(1-k)+k\gamma^2=0,$$

et l'on a

$$\Delta' v=2(\alpha+\beta)(1-k)v.$$

Ces formules s'appliquent à l'équation générale, et sont indépendantes de toute relation entre k et i. Appliquons-les au cas où

$$1+bi=2k;$$

on aura alors

$$L'=2k(\alpha^2+\gamma^2),$$

et, par conséquent,

$$\Delta(\alpha^2+\gamma^2)=4k\alpha(\alpha^2+\gamma^2).$$

Avec les solutions v, $\alpha^2+\gamma^2$, u, on peut former le facteur, qui est

$$\mu=(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1-2k}{2k}}[\alpha\beta(1-k)+k\gamma^2]^{-2}\gamma^{\frac{2k-1}{k}}.$$

En commençant l'intégration par rapport à β, on trouvera

$$\text{(XXI)}\quad k\frac{\gamma^{3-\frac{1}{k}}(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2k}}}{\alpha[\alpha\beta(1-k)+k\gamma^2]}+\int\frac{(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1-2k}{2k}}(\gamma d\alpha-\alpha d\gamma)}{\alpha^2\gamma^{\frac{1-2k}{k}}}=\text{C}.$$

Cette forme conduit, dans une infinité de cas, à des courbes algébriques.

Revenons à l'équation primitive. Il nous reste à étudier le cas où les deux points singuliers 4, 5 sont en ligne droite avec un des points 2, 3. La condition, facile à calculer pour qu'il en soit ainsi, est que l'on ait

$$k=-b^2,$$

et la droite qui contient les trois points singuliers aura pour équation

$$x(1-b^2)-2by-2b^2z=0.$$

Avec les variables α, β, γ, cette solution prend la forme

$$[(1+ib)\alpha+(1-ib)\beta]^2-4b^2\gamma^2=0.$$

Elle se décompose en deux

$$p=\alpha(1+ib)+\beta(1-ib)-2b\gamma=0,$$
$$q=\alpha(1+ib)+\beta(1-ib)+2b\gamma=0;$$

et, en effet, on trouve, pour l'équation en α, β, γ,

$$\Delta p=pq,$$
$$\Delta q=qp.$$

Le facteur est

$$\frac{1}{\nu\gamma\sqrt{pq}}.$$

L'intégration, encore assez compliquée, s'effectue avec facilité, si aux variables α, β, γ on substitue p, q et

$$r=\alpha(1+ib)-\beta(1-ib).$$

Je me contente d'indiquer ces calculs, qui conduisent à l'intégrale

$$\frac{r-2\sqrt{pq}}{r+2\sqrt{pq}}\left(\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{q}-\sqrt{p}}\right)^h=\text{C},\quad h=ib.$$

En revenant aux notations primitives et effectuant une substitution homographique, l'intégrale deviendra

$$\text{(XXII)}\qquad \frac{z+\sqrt{x(z+hy)}}{z-\sqrt{x(z+hy)}}\left[\frac{y+\sqrt{x(z+hy)}}{y-\sqrt{x(z+hy)}}\right]^h = \mathrm{C},$$

les équations des deux coniques étant, avec les nouvelles variables,

$$z^2 - xz - hyx = 0,$$
$$y^2 - xz - hyx = 0,$$

et la tangente commune ayant pour équation

$$z + hy = 0.$$

XVII.

Examen du cas où au nombre des solutions particulières se trouvent deux coniques simplement osculatrices.

On pourra toujours choisir le triangle de référence de telle manière que les équations des deux coniques soient

$$u = y^2 + 2xz = 0,$$
$$v = y^2 + 2xz + 2xy = 0.$$

Les valeurs déjà données de L, M, N, qui définissent toute équation admettant comme solution particulière la première conique, sont

$$\mathrm{L} = \mathrm{Q}x - \mathrm{R}y,\quad \mathrm{M} = \mathrm{R}z - \mathrm{P}x,\quad \mathrm{N} = \mathrm{P}y - \mathrm{Q}z.$$

On aura

$$\Delta u = 0,$$
$$\Delta v = -2\mathrm{P}x^2 + 2\mathrm{Q}xy + 2\mathrm{R}(zx - y^2).$$

En écrivant que Δv est divisible par v, on aura facilement les valeurs de P, Q, R, et, par suite, celles de L, M, N. On trouve ainsi

$$(73)\quad \begin{cases} \mathrm{L} = (2b+3c)x^2 - ay^2 - 3axz + (b-2a)xy, \\ \mathrm{M} = ayz + 2bxz - 3cxy, \\ \mathrm{N} = 3cy^2 + (2a-3b)yz - (2b+3c)xz + 3az^2, \\ \mathrm{H} = 2bx - 2by + 4az, \\ \Delta v = (2bx - 2ay)v. \end{cases}$$

On voit que nous n'avons pas, dans cet exemple comme dans le précédent, une troisième solution. C'est un désavantage; car, dans la plupart des cas, en cherchant à déterminer les solutions nouvelles qui nous sont nécessaires, nous serons conduits à déterminer $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, c'est-à-dire à des équations numériques.

Je traite d'abord le cas où $a = 0$; alors on aura une nouvelle solution

$$x = 0,$$

qui, jointe aux précédentes, permet de déterminer le facteur

$$x^2 u^{\frac{3c}{b}} v^{-3\frac{b+c}{b}}.$$

L'intégration se fera facilement, si l'on choisit comme variables x^2, u, v, et le résultat obtenu est, aux notations près, le suivant :

$$\text{(XXIII)} \quad \left\{ \begin{array}{l} (y^2 + 2xz)^\alpha (y^2 + 2xz + 2xy)^\beta \\ \times \left(y^2 + 2xz - \frac{2\beta}{\gamma} xy - \frac{2\alpha\beta}{\gamma^2} x^2\right)^\gamma = C, \end{array} \right.$$

avec la relation $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

On remarquera qu'il y a, comme solution particulière, une troisième conique osculatrice aux deux premières.

Cherchons maintenant à compléter, au moyen de droites, le nombre de solutions nécessaire pour qu'on puisse déterminer le facteur. La connaissance des points singuliers nous aidera dans cette recherche; ces points, désignés par leurs numéros, sont les suivants :

$$(1) \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1, \quad \lambda = 3a.$$

Nous appelons toujours λ le quotient $\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}$. Ce point appartient aux coniques u, v,

$$(2) \qquad y = 0, \quad z = 0, \quad x = 1, \quad \lambda = 2b + 3c;$$

il appartient aussi à u et à v;

$$(3, 4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y^2 + 2xz = 0, \\ \lambda = bx - ay, \\ (b + 3c)x + (b - a)y - az = 0; \end{array} \right.$$

ces points appartiennent à u;

(5) $$x=a,\quad y=b,\quad z=c,\quad \lambda=0;$$

il n'appartient ni à u ni à v;

(6, 7) $$\left\{\begin{array}{l} y^2+2xz+2xy=0,\quad \lambda=0,\\ -az+by+(2b+3c)x=0;\end{array}\right.$$

ces deux points appartiennent à v.

Nous allons d'abord chercher les droites qui peuvent passer par l'un des points communs aux deux coniques. Commençons par le point 2 : toute droite passant par ce point aura pour équation

$$y+mz=0;$$

elle ne pourra devenir solution, on le reconnaîtra aisément, que si l'on a

(74) $$bc(b+c)=0.$$

Et, en effet, pour $c=0$, on a

$$\Delta z=z[3z+(2a-3b)y-2bx];$$

pour $b=-c$,

$$\Delta(y+z)=(y+z)\,(3cy+3z-3cx);$$

mais, pour $b=0$, on a trois droites passant par le point considéré. On trouve, en effet, dans ce cas,

$$\Delta y=y(az-3cx),$$

$$\Delta(hy+z)=(hy+z)\left(3az-3cx+\frac{3c}{h}y\right),$$

$$\Delta(h'y+z)=(h'y+z)\left(3az-3cr+\frac{3c}{h'}y\right),$$

h, h' étant les racines de l'équation

$$2ah^2-2ah+3c=0,$$

et satisfaisant, par conséquent, à l'équation

$$h+h'=1.$$

Ayant cinq solutions, on peut former l'intégrale générale, qui est

(XXIV) $$\left(\frac{y^2+2xz+2xy}{y^2+2xz}\right)^{1-2h}\frac{z+hy}{z+(1-h)y}=C.$$

Mais on peut aussi se proposer de déterminer les constantes de telle manière que l'on puisse former le facteur avec la droite trouvée et u, v. Le cas de $b = 0$ ne peut rien donner de nouveau; mais, si l'on suppose $c = 0$, on verra alors que le facteur peut être de la forme $u^\alpha v^\beta z^\gamma$, si $b = -1$. L'équation correspondante est définie par les valeurs suivantes de L, M, N :

$$\begin{aligned} L &= 2x^2 + 3xy + 3xz + y^2, \\ M &= -yz + 2xz, \\ N &= -5yz - 2xz - 3z^2. \end{aligned}$$

Le facteur est

$$\mu = v^{-\frac{7}{3}} u z^{-\frac{4}{3}}.$$

L'intégration peut être faite en commençant par x, et elle conduit à l'intégrale

$$(\text{XXV}) \qquad z(y^2 + 2xz + 2xy)^4 = C(y^3 + xy^2 + 2xyz - x^2z)^3,$$

qui est formée de courbes du neuvième degré. Pour $c = -\frac{64}{27}$, on obtient une courbe du cinquième ordre, et deux fois la conique u.

Il est inutile de traiter de la même manière le cas où $b = -c$; car il se ramène au précédent quand on échange les deux coniques l'une dans l'autre.

Après avoir étudié cette première manière d'obtenir des droites, cherchons s'il peut y en avoir qui passent par le point $x = 0$, $y = 0$. Il suffira de voir si $\Delta(y + hx)$ peut être divisible par $y + hx$, et l'on reconnaît que cela ne pourra avoir lieu que si l'on a

$$(75) \qquad b^2 - 4ab - 8ac = 0.$$

On obtient alors

$$\Delta(bx + 2ay) = (bx + 2ay)\left[(2b + 3c)x - \frac{by}{2} + az\right].$$

Il y a plusieurs manières de faire usage de ce résultat : d'abord, la condition (75) peut être combinée avec l'équation (74), et l'on aura alors une droite de chacun des deux systèmes déjà étudiés. Le seul cas nouveau auquel conduise cette combinaison est celui pour lequel

$$c = 0, \quad b = 4a.$$

Il est toujours permis de prendre $a = 1$; on aura alors

$$a = 1, \quad b = 4, \quad c = 0.$$

L'équation sera définie par les valeurs

$$\begin{aligned} L &= 8x^2 + 2xy - 3xz - y^2, \\ M &= yz + 8xz, \\ N &= 10yz - 8xz + 3z^3. \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned} \Delta u = 0, \quad \Delta v &= (8x - 2y)v, \\ \Delta(2x + y) &= (2x + y)(z + 8x - 2y), \\ \Delta z &= z(3z - 10y - 8x). \end{aligned}$$

Au moyen de ces solutions, on formerait sans peine le facteur. Mais il vaut mieux remarquer que les deux droites, solutions particulières,

$$z = 0, \quad y + 2x = 0,$$

se coupent sur la conique v. Comme en leur point de rencontre il passe trois courbes non tangentes, satisfaisant à l'équation différentielle, les deux droites et la conique v, il y aura (art. VII) une nouvelle droite passant par ce point et satisfaisant à l'équation; et, en effet, on trouve

$$\Delta\left(y + 2x - \frac{z}{4}\right) = (8x - 2y + 3z)\left(y + 2x - \frac{z}{4}\right).$$

Au moyen de ces cinq solutions, on forme l'intégrale générale, qui est

$$\text{(XXVI)} \qquad \frac{(y^2 + 2xz + 2xy)^2\left(y + 2x - \frac{z}{4}\right)}{(y + 2x)^3(y^2 + 2xz)} = C,$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$1 - C = \frac{z[y^2 - 2xy - 8x^2 - 2xz]^2}{(y + 2x)^3(y^2 + 2xz)}.$$

On voit que, dans ce cas, il y aura trois coniques au nombre des solutions particulières.

Si l'on cherchait à former le facteur avec une des droites passant par le point $x = 0, y = 0$ et u, v, on serait conduit à des cas traités $a = b = 0$. Nous avons donc épuisé tout l'usage que l'on peut faire des solutions précédentes.

Voyons, maintenant, s'il y a des droites ne passant pas par les points 1, 2, communs aux coniques u, v. Je dis que de pareilles droites doivent être tangentes au moins à l'une de ces coniques. En effet, si elles les coupaient en quatre points distincts, ces points, étant des points singuliers, seraient au nombre de quatre sur une droite, ce qui est impossible.

Ainsi les droites nouvelles doivent être tangentes au moins à l'une des coniques u, v. Supposons d'abord qu'elles soient tangentes aux deux.

L'unique tangente commune aux deux coniques, en dehors de la tangente triple $x = 0$, est

$$x - 4y - 8z = 0,$$

et l'on trouve qu'elle est solution, si l'on a

$$b + 2c = \frac{a}{4}. \tag{76}$$

Alors on a

$$\Delta(x - 4y - 8z) = (x - 4y - 8z)\left[x\left(\frac{a}{2} - c\right) + y\left(6c + \frac{a}{4}\right) + 3az\right].$$

Cherchons si cette tangente commune peut être solution en même temps qu'une de celles des groupes précédents. Supposons d'abord que les deux relations (74), (76) aient lieu en même temps. On peut écarter le cas où $b = 0$, qui a été complétement intégré; quant aux équations

$$c = 0, \quad b + c = 0,$$

elles se changent l'une dans l'autre, quand on échange les deux coniques. On peut donc se borner à examiner le cas où l'on a

$$c = 0, \quad b = \frac{a}{4}.$$

Prenons

$$b = 1, \quad a = 4, \quad c = 0;$$

l'équation est définie par les valeurs

$$\begin{aligned} L &= 2x^2 - 7xy - 12xz - 4y^2, \\ M &= 4yz + 2xz, \\ N &= 5yz - 2xz + 12z^2; \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} &= 2x - 2y + 16z,\\
\Delta v &= (2x - 8y)v,\\
\Delta z &= (5y - 2x + 12z)z,\\
\Delta(x - 4y - 8z) &= (x - 4y - 8z)(2x + 12z + y).
\end{aligned}$$

Le facteur est compliqué,

$$\mu = (x - 4y - 8z)^{-\frac{5}{6}} z^{-\frac{1}{2}} (y^2 + 2xz + 2xy)^{-\frac{2}{3}} (y^2 + 2xz)^{-\frac{2}{3}}.$$

Pour faire l'intégration, ayons recours au changement de variables. Substituons à x la variable x', définie par l'équation

$$x'^2 = y^2 + 2xz.$$

La nouvelle équation sera définie par les valeurs

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}' &= 0,\\
\mathrm{M}' &= 4yz + x'^2 - y^2,\\
\mathrm{N}' &= 5yz + y^2 - x'^2 + 12z^2.
\end{aligned}$$

Enfin, substituons à z la variable z' définie par la formule

$$4z' = 4z + y.$$

On aura, pour la nouvelle équation,

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}'' &= 0,\\
\mathrm{M}'' &= 4yz' + x'^2 - 2y^2,\\
\mathrm{N}'' &= \tfrac{3}{4}(16z'^2 - x'^2).
\end{aligned}$$

Cette nouvelle équation, considérée comme définissant y, est de la nature de celles qu'on intègre quand on en connaît une solution particulière. Faisons-y, pour un instant, $z' = 1$, ou, si l'on veut, prenons comme inconnues $\frac{y}{z'}$, $\frac{x'}{z'}$; elle deviendra

$$\left(12 - \frac{3}{4}x'^2\right)\left(x'\frac{dy}{dx'} - y\right) + 4y + x'^2 - 2y^2 = 0.$$

Or, la solution particulière $v = 0$ devient ici

$$y^3 - \left(\frac{3y}{4} + 1\right)x'^2 = 0.$$

Les trois valeurs de y, fournies par cette opération, seront donc des solutions particulières de l'équation différentielle, et, d'après une propriété connue des équations de cette forme, l'intégrale générale sera cette fonction de x' qui forme, avec les trois racines de l'équation précédente, un rapport anharmonique constant. En particulier, on aura une solution nouvelle en cherchant la valeur de y qui forme une proportion équianharmonique avec ces valeurs. On trouve ainsi la nouvelle solution

$$4y^2 + 16y + x'^2 = 0,$$

ou, en rétablissant l'homogénéité,

$$4y^2 + 16yz' + x'^2 = 0,$$

et enfin, en revenant aux notations primitives,

$$9y^2 + 16yz + 2xz = 0.$$

On aura donc cinq solutions de l'équation primitive.

On trouve

$$\Delta(9y^2 + 16yz + 2xz) = 16z(9y^2 + 16yz + 2xz),$$

et l'intégrale générale est

$$\text{(XXVII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & z^3(x - 4y - 8z)(y^2 + 2xz + 2xy)^2 \\ & \quad = C(y^2 + 2xz)(9y^2 + 16yz + 2xz)^3. \end{aligned} \right.$$

On voit qu'elle est formée de courbes du huitième ordre.

Cette intégrale peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} & (1 - 128C)(y^2 + 2xz)(9y^2 + 16yz + 2xz)^3 \\ & \quad = [(y^2 + 2xz)^2 - 4(y^2 + 2xz)(5y^2 + 8z^2 + 10yz) - 8y^3(y + 4z)]^2. \end{aligned}$$

Après avoir combiné les formules (76), (74), il nous reste à supposer que les relations (75), (76) ont lieu simultanément. Il y a alors deux systèmes de valeurs pour a, b, c, qui se ramènent l'un à l'autre quand on échange les deux coniques. J'en prends donc un seul,

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = -\frac{3}{8}.$$

On a alors

$$\Delta(x+2y)=(x+2y)\left(\frac{7}{8}x-\frac{y}{2}+z\right),$$

$$\Delta(x-4y-8z)=(x-4y-8z)\left(\frac{7}{8}x-2y+3z\right),$$

et l'on peut former le multiplicateur, qui est

$$(x+2y)^{-2}(x-4y-8z)^{-\frac{2}{3}}(y^2+2xz+2xy)^{\frac{1}{6}}(y^2+2xz)^{-\frac{5}{6}}.$$

Dans cet exemple, comme dans les suivants, je me contenterai de donner la valeur du multiplicateur.

Pour terminer ce qui concerne la tangente commune, il nous suffira de rechercher si, prise seule avec les coniques u et v, elle peut donner un multiplicateur. Le calcul indique que cela ne peut avoir lieu que pour les deux systèmes de valeurs

$$a=4,\quad c=\frac{3}{2},\quad b=-2,$$

$$a=4,\quad c=-\frac{1}{2},\quad b=2,$$

qui se ramènent l'un à l'autre quand on échange les deux coniques. En considérant donc seulement le premier, on trouvera que le multiplicateur est

$$(y^2+2xz+2xy)^{-\frac{7}{6}}(x-4y-8z)^{-\frac{4}{3}}(y^2+2xz)^{-\frac{1}{6}}.$$

Nous avons maintenant obtenu tous les cas d'intégration que peut donner la considération des trois premiers groupes de droites. Il nous reste à rechercher s'il peut y avoir des droites tangentes à l'une des coniques u ou v, et coupant l'autre en deux points distincts.

Si la droite cherchée est tangente à la conique u, elle ne peut être que la droite joignant les deux points singuliers 6, 7, situés sur la conique v. En exprimant que cette droite, dont l'équation est

$$(2b+3c)x+by-az=0,$$

est tangente à u, on trouve la condition

$$(77)\qquad b^2-4ab-6ac=0.$$

Et alors on a, en effet

$$\begin{aligned}&\Delta[(2b+3c)x+by-az]\\&\quad=[(2b+3c)x+by-az][(2b+3c)x+(2a-b)y+3az].\end{aligned}$$

Si l'on exprime de même que la droite qui joint les points singuliers 3, 4 est tangente à la conique ν, on aura

$$b^2 - 2ab - 6ac = 0. \tag{78}$$

Cette condition, combinée avec la précédente, ne donne que des cas examinés. Prise seule, il suffit, pour la ramener à la précédente, d'échanger le rôle des deux coniques. Nous pourrons donc la laisser de côté, et nous borner à combiner la relation (77) avec les précédentes (74), (75), (76).

Supposons, d'abord, que la relation (77) ait lieu seule, et voyons si la droite obtenue dans ce cas suffit, avec u et ν, à donner un facteur. Nous retomberons sur le cas, déjà examiné, où cette droite serait tangente aux deux coniques. Cette supposition ne donne donc rien de nouveau.

Combinons ensuite la relation (77) avec la relation (74), ce qui donne d'abord

$$c = 0, \quad a = 1, \quad b = 4$$

et, en second lieu,

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 2.$$

Dans le premier cas, le facteur sera

$$(8x + 4y - z)^{-\frac{5}{6}} z^{-\frac{1}{2}} (y^3 + 2xz + 2xy)^{-\frac{2}{3}} (y^2 + 2xz)^{-\frac{2}{3}}.$$

Dans le second, on trouvera

$$(y + z)^{\frac{1}{6}} (2x - 2y - z)^{-\frac{1}{2}} (y^2 + 2xz + 2xy)^{-\frac{1}{2}} (y^2 + 2xz)^{\frac{1}{6}}.$$

En combinant les relations (77), (75), on obtient $a = 0, c = 0$, cas déjà examinés.

Enfin, en combinant les relations (77), (76), on obtiendra le système nouveau

$$a = -5, \quad b = -4, \quad a = 8,$$

pour lequel le multiplicateur sera

$$(x - 4y - 8z)^{-\frac{19}{24}} (-9x - 12y + 8z)^{-\frac{13}{24}}$$
$$\times (y^2 + 2xz + 2xy)^{-\frac{1}{2}} (y^2 + 2xz)^{-\frac{5}{6}}.$$

Nous avons ainsi terminé l'examen des cas où il peut y avoir, comme solutions particulières, des droites en même temps que les coniques u et v.

XVII.

Étude du cas où, au nombre des solutions particulières, se trouvent deux coniques doublement osculatrices.

Écrivons les équations des deux coniques,

$$u = y^2 + 2xz = 0,$$
$$v = y^2 + 2xz + x^2 = 0;$$

je ferai même remarquer que les axes ne sont pas complétement déterminés. La droite $z = 0$ est une tangente quelconque à la première conique. On pourra profiter de cette indétermination pour simplifier l'équation différentielle.

On aura toujours

$$L = Qx - Ry,$$
$$M = Rz - Px,$$
$$N = Py - Qx.$$

Ces valeurs donneront

$$\Delta u = 0,$$
$$\Delta v = 2x(Qx - Ry).$$

Pour que Δv soit divisible par v, il faut prendre

$$R = -y, \quad Q = x + 2z.$$

Quant à P, il sera quelconque,

$$P = ax + by + cz,$$

et l'on aura

$$L = x^2 + y^2 + 2zx,$$
$$M = -yz - ax^2 - bxy - cxz,$$
$$N = axy + by^2 + cyz - xz - 2z^2,$$
$$H = x(1 - b) + cy - 3z,$$
$$\Delta v = 2xv.$$

On verra, par un calcul facile, que l'on peut toujours choisir les axes de telle manière que l'on ait $c = 0$. Nous supposerons donc cette constante nulle dans la suite.

Les points singuliers sont définis par les équations

$$L = \lambda x, \quad M = \lambda y, \quad N = \lambda z,$$

et ces valeurs de L, M, N, substituées dans les identités

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 2xv,$$

donnent

$$\lambda u = 0, \quad (\lambda - x)v = 0.$$

Il y aura d'abord un point commun aux deux coniques

$$(1) \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \lambda = -2.$$

Il y aura ensuite trois points sur v, pour lesquels $\lambda = 0$: ces points se déterminent par les formules

$$(2, 3, 4) \qquad \begin{cases} x = 2, \\ y = -2\mu, & \mu^3 + \mu(1 - 2b) + 2a = 0, \\ z = -1 + \mu^2, & \lambda = 0, \end{cases}$$

puis trois points sur u, pour lesquels $\lambda = x$, qui sont déterminés par les formules

$$(5, 6, 7) \qquad \begin{cases} x = 2, \\ y = -2\mu, & \mu^3 - 2(b + 1)\mu + 2a = 0, \\ z = -\mu^2, & \lambda = 2. \end{cases}$$

Un premier cas d'intégration se présente si l'on a $a = 0$. Alors on a une nouvelle solution $y = 0$

$$\Delta y = -y(z + bx),$$

et le facteur est

$$y^{-3} v^{-b-\frac{1}{2}} u^b.$$

L'intégration se fait sans difficulté si l'on prend comme variables $u, v, \frac{1}{y^2}$. On obtient une équation linéaire, dont l'intégrale est

$$(\text{XXVIII}) \quad \frac{2u^{b+1} v^{-b+\frac{1}{2}} (v - u)^{-\frac{1}{2}}}{y^2} + \int u^b v^{-b-\frac{1}{2}} (v - u)^{-\frac{3}{2}} (u\,dv - v\,du) = \text{C}.$$

Le cas que nous venons d'examiner est le seul dans lequel il puisse y avoir, comme solution, une droite passant par le point commun aux deux coniques. Nous allons rechercher s'il peut y avoir d'autres droites satisfaisant à l'équation.

Ces droites seront nécessairement tangentes à l'une des coniques et couperont l'autre en deux points singuliers. L'équation d'une droite tangente à la conique v est

$$h^2 x + 2hy - x - 2z = 0.$$

Écrivons qu'elle coupe la conique u en deux points singuliers. Nous trouverons

$$a = h^3 - h, \quad 2b = 3h^2 - 1.$$

On a, en effet, avec ces valeurs de a et de b,

$$\begin{aligned}&\Delta(h^2 x + 2hy - x - 2z)\\ &\quad = (h^2 x + 2hy - x - 2z)[(1 - 2h^2)x - hy - 2z].\end{aligned}$$

Mais cette unique droite, jointe aux coniques u, v, ne peut donner un facteur que dans le cas déjà examiné $a = 0$.

Si l'on exprime de même qu'il y a, comme solution particulière, une droite tangente à la conique u, l'équation de cette droite sera

$$k^2 x + 2ky - 2z = 0.$$

On trouvera

$$a = k^3 + k, \quad 2b = 3k^2,$$

$$\begin{aligned}&\Delta(k^2 x + 2ky - 2z)\\ &\quad = (k^2 x + 2ky - 2z)[-(1 + 2k^2)x - ky - 2z].\end{aligned}$$

Pour qu'il y ait une droite de chaque système, il faudra que l'on ait

$$\begin{aligned}a &= h^3 - h = k^3 + k,\\ 2b &= 3k^2 = 3h^2 - 1,\end{aligned}$$

ce qui donne les deux systèmes de solutions

$$k = \frac{1}{3}, \quad h = -\frac{2}{3}, \quad a = \frac{10}{27}, \quad b = \frac{1}{6},$$

$$k = -\frac{2}{3}i, \quad h = \frac{1}{3}i, \quad a = -\frac{10i}{27}, \quad b = -\frac{2}{3}.$$

Ces deux systèmes se ramènent l'un à l'autre quand on échange les coniques. Je traiterai donc seulement le premier. Les valeurs de L, M, N sont alors

$$L = x^2 + y^2 + 2zx,$$
$$M = -yz - \frac{10}{27}x^2 - \frac{xy}{6},$$
$$N = \frac{10}{27}xy + \frac{y^2}{6} - xz - 2z^2,$$

et l'on trouve

$$\Delta\left(\frac{5x}{9} + \frac{4y}{9} + 2z\right) = \left(\frac{5x}{9} + \frac{4y}{3} + 2z\right)\left(\frac{x}{9} + \frac{2y}{3} - 2z\right),$$
$$\Delta\left(-\frac{x}{9} - \frac{2y}{3} + 2z\right) = \left(-\frac{11x}{9} - \frac{y}{3} - 2z\right)\left(-\frac{x}{9} - \frac{2y}{3} + 2z\right).$$

Le facteur sera

$$\left(-\frac{x}{9} - \frac{2y}{3} + 2z\right)^{-1}\left(\frac{5x}{9} + \frac{4y}{3} + 2z\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times (y^2 + 2xz)^{-\frac{1}{4}}(y^2 + 2xz + 2xy)^{-1}.$$

On peut effectuer l'intégration de la manière suivante. Prenons, à la place de y, z, les inconnues définies par les relations

$$5x + 12y + 8z = 18z',$$
$$-x - 6y + 18z = 18y'.$$

Les équations de u et de v deviendront

$$u = (y' - z')^2 + 2xy' = 0,$$
$$v = (y' - z')^2 + 2xy' + x^2 = 0,$$

et la nouvelle équation différentielle sera définie par les valeurs

$$L' = 0,$$
$$M' = -y'(x + y' + z'),$$
$$N' = -2y'z'.$$

Posons enfin

$$2z' = (\alpha + \beta)^2\sqrt{-u},$$
$$2y' = (\alpha^2 + \beta^2)\sqrt{-u};$$

on aura

$$\alpha\sqrt[4]{-4u} = \sqrt{y'} + \sqrt{2y' - z'},$$
$$\beta\sqrt[4]{-4u} = \sqrt{z'} - \sqrt{2y' - z'}.$$

L'équation en α, β deviendra

$$\frac{d\alpha}{\alpha^4 - 1} + \frac{d\beta}{\beta^4 - 1} = 0,$$

et son intégrale sera

$$\text{(XXIX)} \qquad \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} = C\left[\frac{(\alpha - i)(\beta - i)}{(\alpha + i)(\beta + i)}\right]^i.$$

On voit que les courbes représentées par cette équation ne seront pas algébriques.

XIX.

Étude du cas où, au nombre des solutions particulières, se trouve une cubique à point double.

Après avoir examiné le cas où il y a, comme solutions particulières, des droites et des coniques, nous allons dire quelques mots de ceux où il y a au moins une cubique comme solution particulière. Mais, comme déjà nous avons rencontré plusieurs de ces cas, nous ne donnerons pas à cette Partie de notre étude tout le développement qu'elle comporte.

Commençons par les cubiques à point double; la forme canonique de leur équation est

$$u = x^3 + y^3 + 3xyz = 0.$$

Il faut chercher les valeurs de L, M, N pour lesquelles on a

$$L(x^2 + yz) + M(y^2 + xz) + Nxy = 0.$$

On a une première solution

$$\begin{aligned} L &= c(y^2 + xz) - bxy, \\ M &= axy - c(x^2 + yz), \\ N &= b(x^2 + yz) - a(y^2 + xz), \end{aligned}$$

qui, prise seule, donnerait

$$\Delta(ax + by + cz) = 0,$$

et, par conséquent, l'intégrale serait

$$x^3 + y^3 + 3xyz = C(ax + by + cz)^3;$$

c'est un cas particulier de l'intégrale V.

Mais on peut profiter de cette solution particulière pour simplifier la recherche des valeurs les plus générales de L, M, N; il suffit de remarquer qu'en l'ajoutant à toute solution on peut disposer de a, b, c de manière à annuler dans L les coefficients de x^2 et de xy, dans M celui de xy. En cherchant alors les solutions pour lesquelles ces trois coefficients sont nuls, le calcul sera beaucoup simplifié, et l'on obtiendra les valeurs les plus générales de L, M, N. On a ainsi

$$(78)\quad \begin{cases} L = c(y^2 + xz) - bxy + xz - y^2, \\ M = axy - c(x^2 + yz) + yz - x^2, \\ N = b(x^2 + yz) - a(y^2 + xz) + 2xy - 2z^2, \\ H = -2z. \end{cases}$$

On peut intégrer l'équation correspondante dans les cas suivants :

1° Si l'on a $c = 1$, $b = 0$, on aura la solution particulière $x = 0$; le facteur sera $\dfrac{x}{u^{\frac{5}{3}}}$, et l'intégration, qui se fait sans difficulté, donnera l'intégrale

$$(y^2 + 2xz + ax^2)^3 = C(x^3 + y^3 + 3xyz)^2.$$

Cette intégrale a déjà été rencontrée (art. XIII).

2° Cherchons s'il peut y avoir, comme solutions particulières, des droites passant par le point $x = 0, y = 0$; il faudra, pour cela, que $\Delta(y + \lambda x)$ soit divisible par $y + \lambda x$: cela ne peut arriver que si l'on a

$$(79)\qquad c(c^2 - 1) = 0.$$

En effet, pour $c = 1$,

$$\Delta x = x(2z - by);$$

pour $c = -1$

$$\Delta y = y(ax + 2z);$$

enfin, pour $c = 0$, on trouve trois droites; mais, dans ce dernier cas, l'équation peut être complétement intégrée. Prenons, en effet, comme nouvelles variables x, y, et le premier membre u de l'équation de la cubique; les formules du changement de variables nous donnent, pour la nouvelle équation, la forme

$$L(y\,du - 3u\,dy) + M(3u\,dx - x\,du) = 0.$$

Il faudra remplacer dans L, M, z en fonction de u : on obtient ainsi, en faisant $x = 1$, l'équation

$$\frac{du}{dy}(y^3 + by^2 + ay - 1) = 3u\left(y^2 + by - \frac{u - y^3 - 1}{3y}\right),$$

qui est une équation linéaire en $\frac{1}{u}$. L'intégrale s'obtient aisément. Si l'on appelle λ, λ', λ'' les racines de l'équation

$$y^3 + by^2 + ay - 1 = 0,$$

et si l'on rétablit l'homogénéité, l'intégrale générale est

$$\text{(XXX)} \left\{ \begin{aligned} &\frac{(y-\lambda x)^{2-h}(y-\lambda' x)^{2-h'}(y-\lambda'' x)^{2-h''}}{xy(x^3+y^3+3xyz)} \\ &\quad - \int \frac{(y-\lambda x)^{1-h}(y-\lambda' x)^{1-h'}(y-\lambda'' x)^{1-h''}}{x^2y^2}(x\,dy - y\,dx) = \mathrm{C}, \end{aligned} \right.$$

h, h', h'' étant définis par les formules

$$h = \frac{(\lambda' + \lambda)(\lambda'' + \lambda)}{(\lambda' - \lambda)(\lambda'' - \lambda)},$$

$$h' = \frac{(\lambda'' + \lambda')(\lambda + \lambda')}{(\lambda'' - \lambda')(\lambda - \lambda')},$$

$$h'' = \frac{(\lambda + \lambda'')(\lambda' + \lambda'')}{(\lambda - \lambda'')(\lambda' - \lambda'')},$$

et, d'ailleurs, λ, λ', λ'' étant liés par la relation

$$\lambda\lambda'\lambda'' = 1.$$

Pour obtenir d'autres cas d'intégrabilité, nous allons chercher les points singuliers.

On établira facilement les identités

$$\mathrm{L}(2x - ay) + \mathrm{M}(2z - by) + (1 - c)y\mathrm{N} = 0,$$
$$\mathrm{L}(2z + ax) + \mathrm{M}(2y + bx) + (c + 1)x\mathrm{N} = 0,$$

qui résultent, d'ailleurs, de ce qu'on peut écrire ainsi les valeurs de L, M, N :

$$2\mathrm{L} = (c+1)x(2z - by) + (c-1)y(2y + bx),$$
$$2\mathrm{M} = (1-c)y(2z + ax) - (c+1)x(2x - ay),$$
$$2\mathrm{N} = (2x - ay)(2y + bx) - (2z + ax)(2z - by).$$

Il suit de là que l'on aura un premier groupe de trois points singuliers, pour lesquels L, M, N seront nuls, et qui seront définis par les équations

$$\frac{2x - ay}{2z + ax} = \frac{2z - by}{2y + bx} = \frac{(1 - c)y}{(1 + c)x} = \mu,$$

d'où l'on déduit

$$x = 1 - c,$$
$$y = \mu(1 + c),$$
$$z = b\mu + \mu^2(c + 1),$$

μ satisfaisant à l'équation

$$\mu^3(c + 1) + b\mu^2 + a\mu + c - 1 = 0.$$

Pour les autres points, L, M, N ne seront pas nuls, mais ils seront proportionnels à x, y, z; en remplaçant donc L, M, N par x, y, z dans les identités écrites plus haut, on aura

$$2x^2 + 3yz - y(ax + by + cz) = 0,$$
$$2y^2 + 3xz + x(ax + by + cz) = 0.$$

Les quatre points communs à ces deux coniques et qui appartiennent, comme cela doit être, à la cubique, seront les quatre points restants. Il y aura d'abord le point

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1,$$

pour lequel le rapport $\lambda = \frac{L}{x} = -2$, et trois autres points dont les coordonnées seront

$$x = 3\nu, \quad y = 3\nu^2, \quad z = -1 - \nu^3,$$

ν satisfaisant à l'équation

$$(80) \qquad (c - 3)\nu^3 - 3b\nu^2 - 3a\nu + c + 3 = 0.$$

Pour ces points, le rapport $\lambda = \frac{L}{x}$ aura pour valeur

$$\lambda = ax\frac{1 - c}{2} - by\frac{1 + c}{2} + \frac{5 - c^2}{2}z.$$

Nous allons profiter de cette détermination des points singuliers, pour indiquer quelques cas dans lesquels des droites satisfont à l'équation différentielle.

Nous avons vu (art. VII) que, si un point d'inflexion de l'une des courbes satisfaisant à l'équation différentielle est un point singulier de cette équation, la tangente à la courbe en ce point sera une nouvelle solution particulière. Nous serons donc sûrs d'avoir des intégrales rectilignes, si nous exprimons que quelques-uns des points singuliers qui se trouvent sur la cubique sont des points d'inflexion.

Les points d'inflexion de la cubique sont sur la droite $z = 0$, et correspondent, dans les formules écrites plus haut, aux valeurs de ν qui satisfont à l'équation

$$\nu^3 + 1 = 0. \tag{81}$$

Il suffira donc d'exprimer qu'une ou plusieurs de ces valeurs sont racines de l'équation (80). Supposons d'abord qu'il y en ait une seule, et prenons

$$\nu = -1;$$

alors on aura la condition

$$b = a + 2, \tag{82}$$

et l'on trouvera

$$\Delta(x + y - z) = (x + y - z)[(c + a - 1)y - (c + a + 3)x - 2z].$$

On reconnaîtra aisément qu'avec cette nouvelle droite seule et la cubique on ne peut jamais former un facteur.

Combinons la relation (82) avec la précédente (79) : supposons, par exemple,

$$c = 0;$$

alors on aura un cas particulier de l'intégrale (30) : ce cas particulier est assez remarquable.

Une des valeurs λ, λ', λ'' est égale à -1, et l'intégrale prend la forme

$$\frac{(y - \lambda x)^{\frac{(1+\lambda)^2}{1+\lambda^2}} (x + \lambda y)^{\frac{(1-\lambda)^2}{1+\lambda^2}} (x + y - z)}{x^3 + y^3 + 3xyz} = \text{C}. \tag{XXXI}$$

On peut aussi combiner la relation (82) avec l'une des hypothèses

$$c = \pm 1,$$

qui se ramènent l'une à l'autre quand on échange x et y. Prenons donc seulement

$$c = 1;$$

on aura alors, en même temps que la cubique, les deux droites

$$x = 0, \quad x + y - z = 0.$$

Si l'on exprime que le facteur peut se former avec ces trois solutions, on trouvera

$$a = -4, \quad b = -2, \quad c = 1,$$

et l'équation sera définie par les valeurs

$$\begin{aligned}
L &= 2xz + 2xy,\\
M &= -4xy - 2x^2,\\
N &= -2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 2yz + 4xz + 2xy.
\end{aligned}$$

Le multiplicateur est

$$\frac{x^2(x+y-z)}{(x^3+y^3+3xyz)^{\frac{7}{3}}},$$

et, si l'on effectue l'intégration en commençant par z, on obtient le résultat suivant :

$$(\text{XXXII}) \qquad \frac{[(x^2-y^2)^2 + 4xz(y^2-x^2) + 2x^2z^2 + 2x^2(x+y)^2]^3}{(x^3+y^3+3xyz)^4} = \text{C}.$$

Les courbes qui forment l'intégrale générale sont du douzième degré.

Nous allons maintenant rechercher s'il peut y avoir, comme solutions particulières, plusieurs droites tangentes à la courbe en des points d'inflexion. Si les tangentes aux trois points d'inflexion donnaient des solutions particulières, la droite qui joint ces trois points serait une quatrième solution : on retrouverait donc le cas, déjà examiné, où il y a quatre droites au nombre des solutions particulières. Nous pouvons donc nous contenter d'examiner le cas où deux points d'inflexion seulement de la cubique sont des points singuliers de l'équation différentielle; il faut, pour cela, que l'équation (80) en ν admette deux racines de l'équation

$$\nu^3 + 1 = 0.$$

Nous pouvons, pour plus de symétrie, supposer que ces deux racines communes soient les racines imaginaires

$$\nu = -\alpha, \quad \nu = -\alpha^2,$$

α étant une racine cubique de l'unité.

On trouve alors que l'on doit avoir

$$a = 2, \quad b = -2,$$

et, dans ce cas, on a, en effet,

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha x + \alpha^2 y - z) &= (\alpha x + \alpha^2 y - z) \\
&\quad \times [c(\alpha^2 y - \alpha x) + x(2\alpha^2 - \alpha) + y(2\alpha - \alpha^2) - 2z], \\
\Delta(\alpha^2 x + \alpha y - z) &= (\alpha^2 x + \alpha y - z) \\
&\quad \times [c(\alpha y - \alpha^2 x) + x(2\alpha - \alpha^2) + y(2\alpha^2 - \alpha) - 2z].
\end{aligned}$$

Nous ferons une seule application de ce résultat : supposons $c = 1$; l'équation sera définie par les valeurs

$$\begin{aligned}
L &= 2xz + 2xy, \\
M &= -2x^2 + 2xy, \\
N &= -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 2yz - 2xz + 2xy.
\end{aligned}$$

Le multiplicateur sera

$$x^{-1}(\alpha x + \alpha^2 y - z)^{-1}(\alpha^2 x + \alpha y - z)^{-1}(x^3 + y^3 + 3xyz)^{-\frac{1}{3}},$$

et, en choisissant comme nouvelles variables

$$x + \alpha y = x', \quad x + \alpha^2 y = y', \quad x^3 + y^3 + 3xyz = u^3,$$

l'intégration pourra se faire et conduira au résultat suivant :

$$\text{(XXXIII)} \qquad \frac{u - x'}{u - y'}\left(\frac{u - \alpha x'}{u - \alpha y'}\right)^{\alpha^2}\left(\frac{u - \alpha^2 x'}{u - \alpha^2 y'}\right)^{\alpha} = C.$$

Nous nous contenterons des exemples précédents, sans traiter d'une manière complète la recherche des solutions linéaires.

XX.

Étude du cas où l'équation admet, comme solution, une cubique à point de rebroussement.

L'équation d'une telle courbe peut toujours être ramenée à la forme

$$y^3 + 3x^2 z = 0.$$

On devra avoir

$$2Lxz + My^2 + Nx^2 = 0.$$

Cette équation est très-facile à résoudre; elle nous donne les valeurs suivantes de L, M, N :

$$(83)\qquad \begin{cases} L = ax^2 + bxy - hy^2 + cxz, \\ M = kx^2 + 2hxz, \\ N = -ky^2 - 2axz - 2byz - 2cz^2, \\ H = -by - 3cz. \end{cases}$$

Les points singuliers se détermineront comme il suit : il y a d'abord le point de rebroussement de la cubique

$$(1)\qquad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 1,$$

pour lequel $\lambda = \frac{L}{x} = -2c$; il y a deux points pour lesquels L, M, N sont nuls,

$$(2, 3)\qquad x = 2h,\quad z = -k,\quad y^2 - 2by + 2ck - 4ah = 0;$$

enfin, pour les quatre autres points, le rapport $\lambda = \frac{L}{x}$ n'est pas nul, et ils se trouvent, par conséquent, sur la cubique

$$(4, 5, 6, 7)\qquad x = 3,\quad y = -3\mu,\quad z = \mu^3,$$

μ étant déterminé par l'équation

$$c\mu^4 - h\mu^3 - 3b\mu^2 + 3a\mu + 3k = 0,$$

et le rapport $\lambda = \frac{L}{x}$ ayant pour valeur

$$\lambda = -\frac{3k + 2h\mu^3}{\mu}.$$

Je signalerai quelques cas évidents d'intégrabilité.

1° Si h et c sont nuls, on a trois droites passant par le point $x = 0, y = 0$. L'intégrale se forme au moyen de la cubique et de ces droites : elle est de la forme

$$(\text{XXXIV})\qquad (x + \alpha y)^\alpha (x - \beta y)^\beta (y^3 + 3x^2 z)^\gamma = C,$$

où l'on a

$$\alpha + \beta + 3\gamma = 0.$$

2° Si $h = 0$, la droite $x = 0$ est solution; on a

$$\Delta x = x(ax + by + cz);$$

pour que, jointe à la cubique, elle donne un facteur, il faut que l'on ait

$$\alpha(ax+by+cz)-by-3cz=0,$$

ce qui entraîne les deux systèmes $a=0$, $c=0$, qui donne un cas particulier de l'intégrale précédente et $a=0$, $b=0$; dans ce dernier cas, le facteur est

$$\frac{x^3}{(y^3+3x^2z)^{\frac{7}{3}}},$$

et il conduit à l'intégrale

$$\text{(XXXV)} \qquad (y^4+4x^2yz+ax^4)^3=C(y^3+3x^2z)^4.$$

Il est à remarquer que la droite $y=0$ n'est jamais solution; car, si k et h sont nuls, L, M sont divisibles par $ax+by+cz$, et l'équation se réduit à une équation de Jacobi dont l'intégrale est

$$y^3=Cx^2z.$$

3° Si $k=0$, la droite $z=0$ est solution, et l'on a

$$\Delta z=-2z(ax+by+cz)$$

Jointe à la cubique, elle ne peut donner un facteur que dans les deux cas suivants : $a=0$, $b=0$, et $a=0$, $c=0$.

Pour $a=0$, $b=0$, le facteur est

$$z^{-\frac{3}{2}}(y^3+3x^2z)^{-\frac{5}{6}}.$$

Si l'on substitue à la variable z la quantité u définie par l'équation

$$u^3=y^3+3x^2z,$$

l'intégration s'effectue sans difficulté, et l'on trouve

$$\text{(XXXVI)} \qquad \frac{2hxu^{\frac{1}{2}}}{(u^3-y^3)^{\frac{1}{2}}}+\int\frac{y\,du-u\,dy}{u^{\frac{1}{2}}(u^3-y^3)^{\frac{1}{2}}}=C.$$

L'intégration dépend des fonctions elliptiques.

De même, pour $a=0$, $c=0$, on est conduit à l'intégrale

$$\text{(XXXVII)} \qquad \frac{-2h(u^3-y^3)^{\frac{1}{2}}}{xu^{\frac{1}{2}}}+\int\frac{y(y\,du-u\,dy)}{u^{\frac{3}{2}}(u^3-y^3)^{\frac{1}{2}}}=C,$$

qui dépend également des fonctions elliptiques.

Enfin, sans étudier d'une manière complète les solutions linéaires, je signalerai, en terminant, le cas où il y a au nombre des solutions la droite $z=0$, une autre droite passant par le point $y=0$, $z=0$ et une droite passant par le point de rebroussement de la cubique. On a alors

$$k=0,\quad c=1,\quad a=\frac{4h^3}{3},\quad b=\frac{4h^2}{3}.$$

Le facteur est

$$\frac{z(2hx-y)^2}{\left(z+\frac{4h^2}{3}y\right)^{\frac{3}{2}}\left(y^3+3x^2z\right)^{\frac{4}{2}}}.$$

L'intégration commencée par rapport à x donne

$$\text{(XXXVIII)}\qquad \frac{[4h^3x^3+9hy^2z+9xz^2+4h^3(3x^2z+y^3)]^2}{(3z+4h^2y)^3\,(y^3+3x^2z)}=\mathrm{C}.$$

Ce cas est remarquable, parce qu'au nombre des solutions particulières se trouve en évidence une nouvelle cubique. On peut encore donner à l'intégrale la forme

$$\frac{(y-2hx)^3z^2(3z+3h^2y+2h^3x)}{(3z+4h^2y)^2\,(y^3+3x^2z)}=\frac{1-\mathrm{C}}{9}.$$

XXI.

Indication d'une méthode synthétique qui permet de vérifier quelques-unes des intégrales précédentes et d'en trouver de nouvelles.

Il résulte des recherches des articles précédents que l'intégrale générale de l'équation différentielle du premier ordre, dans le cas où L, M, N sont du second degré, peut revêtir un très-grand nombre de formes différentes. Sans doute, toutes les intégrales que nous avons trouvées ne sont pas essentiellement distinctes, et, du reste, nous ne nous sommes nullement attaché à les réduire au moindre nombre possible, et à montrer comment quelques-unes d'entre elles sont des cas particuliers des plus générales; il résulte néanmoins, de l'étude qui vient d'être faite, des conséquences qui nous paraissent dignes d'être signalées. Pendant que l'équation de Jacobi admet en définitive une seule forme d'intégrale dont toutes les autres sont des cas limites, l'équation différentielle la plus simple après elle peut être intégrée de plusieurs manières différentes, et il est possible de donner pour chaque degré plusieurs faisceaux de courbes algébriques appartenant à des types différents et dont l'équation différentielle sera précisément celle que nous avons étudiée. Nous allons indiquer une méthode qui permet de vérifier plusieurs des intégrales précédentes quand elles sont algébriques, et même d'en trouver de nouvelles.

Supposons que l'intégrale d'une équation différentielle soit algébrique. Elle sera alors de la forme

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p} = \mathrm{C}, \tag{84}$$

$u_1, u_2, \ldots, u_p$ étant des fonctions algébriques entières que nous pouvons supposer être indécomposables, et dont nous désignerons les degrés par $h_1, h_2, \ldots, h_p$. On devra avoir

$$h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \ldots + h_p\alpha_p = 0; \tag{85}$$

si l'on forme directement l'équation différentielle des courbes (84), on trouvera

$$\left(\alpha_1 \frac{du_1}{u_1} + \alpha_2 \frac{du_2}{u_2} + \ldots + \alpha_p \frac{du_p}{u_p}\right) u_1 u_2 \ldots u_p = 0, \tag{86}$$

et cette équation se présentera sous la forme

$$\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz = 0, \tag{87}$$

où P, Q, R seront des fonctions entières de degré

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_p - 1.$$

On sait que l'équation précédente peut toujours être ramenée à la forme

$$\mathrm{L}(y\,dz - z\,dy) + \mathrm{M}(z\,dx - x\,dz) + \mathrm{N}(x\,dy - y\,dx) = 0, \tag{88}$$

où L, M, N sont d'un degré inférieur d'une unité à celui de P, Q, R, et par conséquent, si nous désignons toujours ce degré par m, on aura

$$m = h_1 + h_2 + \ldots + h_p - 2. \tag{89}$$

Il suit de là que toute équation algébrique de la forme (88) pourra admettre des intégrales de la forme (84), les degrés $h_1, \ldots, h_p$ étant liés par la seule relation (88), et les exposants $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ par la seule équation (85).

C'est ainsi que, pour le cas de $m = 2$, on obtient immédiatement trois cas possibles d'intégrabilité, qui conduisent, pour l'intégrale générale, aux trois types suivants :

$$v_3 = Cp_1^3,$$
$$u_2 = Cp_1^\alpha q_1^\beta,$$
$$p_1^\alpha q_1^\beta r_1^\gamma s_1^\delta = C,$$

chacun des polynômes p, u, ν étant d'un degré égal à son indice.

Mais cette remarque évidente, et qui a déjà été faite, du reste, par M. Fouret, est loin, comme nous l'avons vu par les exemples que nous avons traités, de faire connaître tous les cas d'intégrabilité de l'équation différentielle considérée. Il peut arriver, en effet, que l'équation différentielle (85), ordonnée suivant dx, dy, dz, se présente sous la forme

$$(90) \qquad \lambda^k \lambda'^{k'} \ldots (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = 0.$$

Alors, en supprimant les facteurs λ^k, $\lambda'^{k'}$, ..., on abaissera le degré de l'équation. Il est possible de reconnaître d'une manière précise dans quel cas ce fait si essentiel se produira.

Remarquons d'abord que jamais ces facteurs λ, λ' ne peuvent être identiques aux fonctions $u, \ldots, u_p$. En effet, dans l'équation (86), tous les termes, sauf $\alpha_1 u_2 u_3 \ldots u_p du_1$, sont divisibles par u_1. Comme nous avons supposé les fonctions u_i indécomposables, il est impossible que le terme précédent soit divisible par u_1.

D'autre part, si nous comparons les équations (90), (86), nous voyons que $\lambda^k \lambda'^{k'} \ldots u_1^{-1} u_2^{-1} \ldots u_p^{-1}$ sera un multiplicateur pour l'équation

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

et par conséquent, d'après une remarque faite à la fin de l'article IV, les équations

$$\lambda = 0, \quad \lambda' = 0, \quad \ldots$$

constituent des solutions particulières de l'équation différentielle proposée. D'après cela, considérons l'une d'elles, λ, que nous pouvons toujours supposer indécomposable, et donnons à la constante C de l'intégrale générale une valeur C_1, telle que la courbe

$$(91)\qquad u_1^{\alpha}\ldots u_p^{\alpha_p} - C_1 = 0$$

passe par un point de la courbe λ, qu'on choisira d'ailleurs d'une manière quelconque, mais en excluant tout point singulier de l'équation différentielle. Alors l'équation (91) sera vérifiée en tous les points de la courbe λ. En effet, cette équation représente une intégrale passant par un point de la courbe λ, et l'on sait que, par un point du plan, pourvu qu'il ne soit pas singulier, ne peuvent jamais passer deux courbes différentes satisfaisant à l'équation différentielle.

Comme on a d'ailleurs identiquement

$$d(u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\ldots u_p^{\alpha_p} - C_1) = u_1^{\alpha_1-1}\ldots u_p^{\alpha_p-1}\lambda^k\lambda'^{k'}\ldots(\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz),$$

il faudra nécessairement que la fonction $u_1^{\alpha_1}\ldots u_p^{\alpha_p} - C_1$, qui contient λ en facteur, le contienne à la puissance $k+1$.

Réciproquement, si, pour une valeur C_1 de C, la fonction $u_1^{\alpha_1}\ldots u_p^{\alpha_p} - C_1$ est divisible par une puissance $k+1$ d'un polynôme indécomposable λ, λ^k sera en facteur dans l'équation différentielle.

Dans tout ce qui précède, et pour plus de netteté, j'ai toujours écrit l'intégrale générale sous la forme

$$u_1^{\alpha_1}\ldots u_p^{\alpha_p} - C = 0,$$

dans laquelle les exposants $\alpha_1\ldots\alpha_p$ ne peuvent être tous de même signe. Tout ce qui précède subsiste évidemment si l'on écrit l'intégrale

$$u_1^{\alpha_1}\ldots u_q^{\alpha_q} = C u_{q+1}^{\alpha_{q+1}}\ldots u_p^{\alpha_p},$$

de manière que les exposants soient tous positifs.

Il résulte des remarques précédentes que, étant donnée l'équation d'un faisceau de courbes algébriques

$$f(x, y, z) = Cf_1(x, y, z),$$

nous avons un moyen précis de déterminer l'ordre des polynômes L, M, N dans l'équation différentielle de ce faisceau. Supposons que, pour une valeur de C, C_1, on ait

$$f - C_1 f_1 = U^p \varphi(x, y, z),$$

U étant indécomposable; nous appellerons U une courbe multiple d'ordre p du faisceau. Plusieurs courbes multiples peuvent se présenter ensemble, si l'on a, par exemple

$$f - C_1 f_1 = U^p V^q W^r \varphi_1(x, y, z);$$

elles peuvent aussi se présenter pour différentes valeurs de C. Mais il est clair que la même courbe ne peut se présenter pour deux valeurs différentes de C. Nous avons alors, comme conséquence des remarques précédentes, le théorème suivant :

Dans l'équation différentielle des courbes du faisceau

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_q^{\alpha_q} - C u_{q+1}^{\alpha_{q+1}} \ldots u_p^{\alpha_p} = 0,$$

le degré des polynômes L, M, N *est*

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_p - 2 - m'_2 - 2m'_3 - 3m'_4 - \ldots,$$

$h_1, h_2, \ldots, h_p$ *désignant les degrés de* $u_1, \ldots, u_p$; m'_2 *désignant la somme des degrés des courbes doubles, et en général* m'_p *la somme des degrés des courbes multiples d'ordre p du faisceau considéré, autres que les courbes u.*

Il résulte de ce qui précède que l'on peut diviser en deux classes bien distinctes les faisceaux de courbes algébriques. Il y aura d'abord ceux qui sont représentés par l'équation

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p} = C v_1^{\beta_1} v_2^{\beta_2} \ldots v_q^{\beta_q},$$

et qui ne peuvent avoir d'autres courbes multiples que les courbes u, v. Toute courbe de ces faisceaux sera indécomposable, ou se décomposera en courbes qui seront simples.

Il y aura aussi des faisceaux qui comprendront d'autres courbes multiples que les courbes u et v. Alors, pour une valeur au moins de la constante C, on obtiendra une identité de la forme

$$(92) \qquad u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p} - C_1 v_1^{\beta_1} \ldots v_q^{\beta_q} = w_1^{\gamma_1} \ldots w_l^{\gamma_l},$$

où les exposants γ ne seront pas tous égaux à l'unité. Pour de tels faisceaux, le degré de l'équation différentielle s'abaissera conformément à la règle que nous avons donnée.

La théorie des formes algébriques fait connaître un assez grand nombre d'identités de la forme (92). Je vais traiter avec quelque détail un seul exemple, afin de montrer l'usage qu'on peut faire de ces identités, pour reconnaître des formes nouvelles de l'intégrale d'une équation différentielle.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} I &= \gamma^2 - \beta\delta, \\ J &= 2\gamma^3 - 3\beta\gamma\delta + \alpha\delta^2, \\ K &= 4I(\beta^2 - \alpha\gamma) - (\alpha\delta - \beta\gamma)^2, \end{aligned}$$

la théorie des formes binaires cubiques nous conduit à l'identité

$$(93) \qquad 4I^3 - J^2 = \delta^2 K,$$

qu'il est d'ailleurs très-aisé de vérifier.

Supposons que α, β, γ, δ désignent des polynômes homogènes en x, y, z des degrés n, $n+p$, $n+2p$, $n+3p$; les polynômes I et J seront respectivement des degrés $2n+4p$, $3n+6p$. Si nous considérons le faisceau de courbes représenté par l'équation

$$(94) \qquad 4I^3 - CJ^2 = 0,$$

ce faisceau admettra comme courbe double, pour $C = 1$, la courbe $\delta = 0$, et par conséquent, dans l'équation différentielle de ce faisceau, le degré des polynômes L, M, N sera au plus

$$4n + 7p - 2,$$

nombre inférieur de $n + 3p$ unités à celui que l'on aurait obtenu s'il n'y avait pas eu de courbe double δ.

Supposons, par exemple, $n = 1$, $p = 0$. Alors α, β, γ, δ seront des polynômes du premier degré, et l'équation

$$(\gamma^2 - \beta\delta)^3 = C(2\gamma^3 - 3\beta\gamma\delta + \alpha\delta^2)^2$$

représente des courbes du sixième ordre, dont l'équation différentielle appartient au cas où $m = 2$. C'est l'intégrale XIV de l'article XIII. Pour toutes les autres valeurs de n et de p, les polynômes L, M, N seront de degrés supérieurs. Mais nous allons étudier un problème dans lequel nous pourrons faire apparaître de nouvelles courbes multiples.

Supposons que l'on considère un point M, de coordonnées x', y',

z', et une cubique représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0;$$

si l'on pose

$$(95) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= f(x', y', z'), \\ 3\beta &= x f'_{x'} + y f'_{y'} + z f'_{z'}, \\ 3\gamma &= x' f'_x + y' f'_y + z' f'_z, \\ \delta &= f(x, y, z), \end{aligned} \right.$$

les équations

$$I = 0, \quad J = 0, \quad K = 0$$

auront une signification géométrique bien connue. La première représentera le lieu des points qui forment une proportion équianharmonique avec les trois points de la cubique situées sur une sécante quelconque passant par M. La deuxième représente le lieu du point qui forme avec les mêmes points une proportion harmonique. Enfin la troisième est l'équation des tangentes menées du point M à la cubique. Quant à l'équation

$$(96) \qquad I^3 = CJ^2,$$

elle représente une courbe du douzième degré, lieu des points qui forment un rapport anharmonique donné avec les trois points que détermine sur la cubique la sécante variable passant par M. Il suit des remarques précédentes que l'équation différentielle des courbes (96) appartiendra au degré $m = 5$. Nous allons énumérer quelques cas dans lesquels ce degré s'abaisse.

1° Supposons que la cubique ait un point double P, et que le point M vienne se placer à la rencontre d'une des tangentes au point double et d'une tangente en un des points d'inflexion. Alors la tangente au point double devra être comptée pour trois, et deviendra une courbe triple du faisceau; la tangente au point d'inflexion sera double, et le degré m de l'équation différentielle s'abaissera à 2.

Soit

$$x^3 + y^3 + 3xyz = 0$$

l'équation de la cubique. Les coordonnées du point M seront

$$x = 0, \quad y = z = 1,$$

On aura ici

$$\alpha = 1, \quad \beta = x + y, \quad \gamma = y^2 + xz + xy, \quad \delta = x^3 + y^3 + 3xyz.$$

On trouvera

$$I = (x+y-z)(y^2-x^2-xz)x,$$
$$J = (x+y-z)[-2xz^2 - z(6y^2+2x^2-xy) + x^3 + 3y^3 - 2xy^2 - 4yx^2]x^2,$$
$$K = (x+y-z)^2 x^3 (4y-5x-4z).$$

Et si l'on considère les courbes représentées par l'équation

$$\text{(XXXIX)} \quad \left\{ \begin{aligned} &(x+y-z)(y^2-x^2-xz)^2 \\ &\quad = C(y^3+x^3+3xyz)^2(4y-5x-4z), \end{aligned} \right.$$

que l'on peut aussi écrire

$$x[2xz^2 + z(6y^2+2x^2-xy) + 4yx^2 + 2xy^2 - x^3 - 3y^3]^2$$
$$= (4-C)(y^3+x^3+3xyz)^2(4y-5x-4z),$$

on aura une nouvelle intégrale de l'équation différentielle (78) étudiée à l'article XIX, correspondant aux valeurs $a=1$, $b=3$, $c=1$ des constantes de cette équation.

2° Supposons maintenant que la cubique ait un rebroussement; son équation sera

$$y^3 + 3x^2z = 0.$$

Prenons le point M sur la tangente au point de rebroussement. On peut toujours choisir les paramètres de référence de telle manière que les coordonnées de ce point soient

$$x = 0, \quad y = 1 = z.$$

On aura ici

$$\alpha = 1, \quad \beta = y, \quad \gamma = y^2 + x^2, \quad \delta = y^3 + 3x^2z,$$
$$I = x^3(x^2 + 2y^2 - 3yz),$$
$$J = x^2[2(x^2+y^2)(x^2+2y^2-3yz) + (y^3+3x^2z)(3z-y)],$$
$$K = -x^4[4x^2 + 9(y-z)^2].$$

Les courbes représentées par l'équation générale

$$\text{(XL)} \quad Cx^2(x^2+2y^2-3yz)^3 = (y^3+3x^2z)^2[4x^2+9(y-z)^2],$$

ou, ce qui est la même chose, par l'équation

$$(4-C)x^2(x^2+2y^2-3yz)^3$$
$$= [2(x^2+y^2)(x^2+2y^2-3yz) + (y^3+3x^2z)(3z-y)]^2,$$

seront des intégrales de l'équation différentielle (83) de l'article XX, correspondantes aux valeurs

$$a = 0, \quad b = -\frac{5}{4}, \quad c = \frac{3}{4}, \quad h = 0, \quad k = 1.$$

3° Enfin, si l'on prend le point M sur la tangente d'inflexion, les coordonnées seront

$$z = 0, \quad x = y = 1,$$

on aura

$$\alpha = 1, \quad \beta = y + z, \quad \gamma = y^2 + 2xz, \quad \delta = y^3 + 3x^2 z,$$

$$\mathrm{I} = z(4xy^2 - 3yx^2 - y^3 + x^2 z),$$

$$\mathrm{J} = z[-2x^3z^2 + xz(y-x)(-6y^2 + 9xy - 9x^2) - 3y^3(y-x)^2]$$

$$\mathrm{K} = -z^2(y-x)^3(4z + 9y - 9x),$$

et l'équation

$$\text{(XLI)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & Cz(4xy^2 - 3yx^2 - y^3 + x^2z)^3 \\ & \quad = (y - ax)^3(4z + 9y - 9x)(y^3 + 3x^2z)^2, \end{aligned} \right.$$

que l'on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} & (C + 4)z(4xy^2 - 3yx^2 - y^3 + x^2z)^3 \\ & \quad = [-2x^3z^2 + xz(y-x)(-6y^2 + 9xy - 9x^2) - 3y^2(y-x)^2]^2, \end{aligned}$$

représentera une nouvelle forme de l'intégrale de l'équation différentielle (83) de l'article XX correspondant aux valeurs

$$a = -3, \quad b = 4, \quad c = 2, \quad k = 0, \quad h = 1.$$

On obtiendra des résultats analogues en considérant une courbe du quatrième ordre, et en supposant le point M placé sur cette courbe.

Réciproquement, toute intégrale algébrique d'une équation différentielle, qui présentera des courbes multiples pour différentes valeurs de C, conduira à une identité algébrique. Nous avons déjà donné plusieurs exemples en mettant certaines intégrales sous différentes formes. Nous signalerons ici les plus simples.

Nous avons vu que l'équation différentielle (83) peut admettre l'intégrale

$$(97) \qquad (x^4 + y^4 + 4x^2y)^3 = C(y^3 + 3x^2z)^4.$$

Il faut donc nécessairement que le faisceau représenté par l'équation précédente présente une courbe multiple différente de la cubique et de la courbe du quatrième ordre qui ont servi à former l'intégrale. Cette nouvelle courbe est une droite quadruple. On trouve, en effet,

$$(x^4 + 4x^2yz + y^4)^3 - (y^3 + 3x^2z)^4 = x^4\mathrm{D},$$

D étant un polynôme du huitième degré, et inversement, cette identité, étant supposée vérifiée, suffirait à montrer que l'équation différentielle des courbes représentées par l'équation (97) appartient au degré $m = 2$.

Considérons maintenant le faisceau de courbes représenté par l'équation

$$u^\alpha v^\beta w^\gamma = \mathrm{C},$$

où u, v, w sont du second degré. Dans l'équation différentielle de ce faisceau, le degré des polynômes L, M, N sera égal à 4. Mais ce degré pourra s'abaisser à 2 dans les différents cas suivants : s'il y a deux droites doubles, une conique double, ou une droite triple parmi les courbes du faisceau. Cherchons la condition pour qu'il y ait une droite triple, et supposons que les axes aient été choisis de telle manière que l'équation de cette droite soit

$$x = 0.$$

Nous pouvons toujours supposer qu'elle se présente pour la valeur 1 de la constante C. Alors il y aura à exprimer que l'expression

$$u^\alpha v^\beta w^\gamma - 1$$

est divisible par x^3. Ordonnons u, v, w suivant les puissances de x; on aura

$$u = a + a'x + a''x^2,$$
$$v = b + b'x + b''x^2,$$
$$w = c + c'x + c''x^2,$$

a, b, c étant du second degré en y, z; a', b', c' du premier, et a'', b'', c'' étant des constantes. La fonction

$$u^\alpha v^\beta w^\gamma - 1,$$

devant être divisible par x^3, s'annulera pour $x = 0$; on aura donc

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma - 1 = 0.$$

Or cette équation ne peut avoir lieu, α, β, γ étant quelconques et assujettis à la seule condition

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

que si l'on a

$$a = b = c;$$

c'est ce que nous supposerons. Maintenant, pour exprimer d'une manière simple que

$$u^\alpha v^\beta w^\gamma - 1$$

est divisible par x^3, nous écrirons que le développement de

$$\log u^\alpha v^\beta w^\gamma,$$

suivant les puissances de x commence au terme en x^3. On obtient ainsi les deux équations

$$\alpha a' + \beta b' + \gamma c' = 0,$$
$$\alpha a'^2 + \beta b'^2 + \gamma c'^2 + 2a(\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'') = 0.$$

Ces équations peuvent être résolues comme il suit. Posons

$$\alpha a' = q - r,$$
$$\beta b' = r - q,$$
$$\gamma c' = p - q,$$

p, q, r étant trois polynômes linéaires en y, z. La première équation sera satisfaite, et la seconde donnera

$$a = -\frac{(\alpha p + \beta q + \gamma r)^2}{2\alpha\beta\gamma(a''\alpha + b''\beta + c''\gamma)}.$$

La formule qui en résulte est, sauf la différence des notations, l'intégrale XXIII, et il est ainsi démontré qu'elle est la plus générale, toutes les fois que l'on assujettira le faisceau considéré à contenir une droite triple.