Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

G. Darboux

Mémoire sur les équations différentielles algébriques du second ordre et du premier degré

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 123-144

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_123_1>

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES DU SECOND ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ;

PAR M. G. DARBOUX.

(Suite.)

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATION DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES AU CAS OU L, M, N SONT DU SECOND DEGRÉ.

VII.

Des points singuliers.

Dans le cas où L, M, N sont du second degré, les points singuliers sont au nombre de sept. Il résulte des théorèmes de l'article V que quatre d'entre eux ne peuvent être en ligne droite, que six de ces points ne peuvent être sur une conique. Enfin, si trois d'entre eux sont en ligne droite, la droite qui les réunit sera une solution particulière de l'équation différentielle.

Supposons que l'on ait transporté l'origine des coordonnées en un de ces points singuliers. Les valeurs correspondantes de L, M, N pourront s'écrire, en supposant $z = 1$,

$$(59)\qquad \begin{cases} L = ax + by + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2, \\ M = a'x + b'y + \alpha' x^2 + \beta' xy + \gamma' y^2, \\ N = Ax^2 + Bxy + Cy^2, \end{cases}$$

et l'équation sera

$$(60)\qquad -L\frac{dy}{dx} + M + N\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0.$$

Si la nature du point singulier est telle que les quatre coefficients a, b, a', b' soient nuls, il est aisé de reconnaître que l'équation sera intégrable. En effet, si nous rétablissons la 3ième coordonnée z, l'équation deviendra

$$\begin{aligned} &(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)(y\,dz - z\,dy) \\ &+ (\alpha' x^2 + \beta' xy + \gamma' y^2)(z\,dx - x\,dz) \\ &+ (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(x\,dy - y\,dx) = 0, \end{aligned}$$

et elle sera une équation linéaire par rapport à z. L'intégration n'offre donc aucune difficulté, et elle nous conduit à une intégrale de la forme

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{ \begin{aligned} &z(y - ax)^{\alpha}(y - bx)^{\beta}(y - cx)^{\gamma} \\ &+ \int \frac{(Ax^2 + Bxy + Cy^2)(y\,dx - x\,dy)}{(y - ax)^{1-\alpha}(y - bx)^{1-\beta}(y - cx)^{1-\gamma}} = C. \end{aligned} \right.$$

où l'on a

$$\alpha + \beta + \gamma = -1.$$

Cherchons maintenant combien il peut passer par un point singulier de courbes pour lesquelles y soit une fonction développable de x. Si nous exprimons que la courbe dont l'équation est

$$y = Cx + C'x^2 + \ldots$$

satisfait à l'équation différentielle, nous aurons pour déterminer C l'équation

$$bC^2 + (b' - a)C + a' = 0.$$

Il y a donc, en général, seulement deux courbes de cette nature passant par chaque point singulier. Il résulte, d'ailleurs, des principes exposés dans le beau Mémoire de MM. Briot et Bouquet, sur l'intégration des équations différentielles (*Journal de l'École Polytechnique* (XXXVI^e Cahier), que ces deux courbes existent réellement, tant que l'équation précédente en C a ses racines inégales.

Si l'on veut qu'il passe, par un point singulier, plus de deux courbes à tangentes distinctes, il faudra que l'équation qui détermine C ait lieu identiquement, c'est-à-dire que l'on ait

$$b = a' = 0, \quad b' = a.$$

Alors les valeurs de L, M, N pourront s'écrire

$$\begin{aligned} L &= xz + u_2, \\ M &= yz + v_2, \\ N &= w_2, \end{aligned}$$

u_2, v_2, w_2 désignant, pour abréger, des polynômes homogènes en x, y seulement. Dans ce cas, l'équation différentielle peut s'écrire

$$\begin{aligned} dz(u_2 y - v_2 x) &+ w_2(x\,dy - y\,dx) \\ &+ (v_2\,dx - u_2\,dy)\,z + z^2(x\,dy - y\,dx) = 0. \end{aligned}$$

Elle admet comme solutions particulières les trois droites représentées par l'équation

$$u_2 y - v_2 x = 0,$$

et, du reste, si l'on fait $y = 1$, ou, ce qui revient au même, si l'on prend comme variables $\frac{z}{y}, \frac{x}{y}$, elle prend la forme

$$A\frac{dz}{dx} + B + Cz + Dz^2 = 0,$$

équation que l'on saura intégrer dès que l'on connaîtra une solution particulière.

Supposons, par exemple, qu'il y ait deux points pareils et que l'on ait choisi le triangle de référence de telle manière que les coordonnées de ces deux points soient $x = 0$, $y = 0$ pour l'un, $y = 0$, $z = 0$ pour l'autre. Les valeurs de L, M, N seront

$$\begin{aligned} L &= xz + Ay^2 + 2Bxy, \\ M &= yz + 2Kxy, \\ N &= 2Kzx + \alpha y^2 + 2Byz. \end{aligned}$$

Nous allons voir que l'on a cinq droites comme solutions particulières.

En effet, on a d'abord la droite $y = 0$, donnant lieu à l'équation

$$\Delta y = 0,$$

puis deux autres droites passant par le point $x = 0$, $y = 0$,

$$y + \lambda' x = 0, \quad y + \lambda'' x = 0,$$

pourvu que λ', λ'' soient les racines de l'équation

$$A\lambda^2 - 2B\lambda - 2K = 0,$$

et, de même, deux autres droites passant par le point $y = 0$, $z = 0$,

$$y + \mu' z = 0, \quad y + \mu'' z = 0,$$

μ', μ'' étant les racines de l'équation

$$\alpha\mu^2 - 2\beta\mu - 1 = 0.$$

Au moyen des cinq solutions ainsi obtenues, nous allons obtenir l'intégrale générale en appliquant la méthode de l'article IV. On a

$$\begin{aligned} \Delta y &= (z + 2Kx).y, \\ \Delta(y + \lambda' x) &= (A\lambda' y + z)(y + \lambda' x), \\ \Delta(y + \lambda'' x) &= (A\lambda'' y + z)(y + \lambda'' x), \\ \Delta(y + \mu' z) &= (2Kx + \alpha\mu' y)(y + \mu' z), \\ \Delta(y + \mu'' z) &= (2Kx + \alpha\mu'' y)(y + \mu'' z), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\Delta \left(\frac{y + \lambda' x}{y + \lambda'' x}\right)^n \left(\frac{y + \mu' z}{y + \mu'' z}\right)^p = 0,$$

pourvu que le rapport $\frac{n}{p}$ satisfasse à l'équation

$$An(\lambda' - \lambda'') + \alpha p(\mu' - \mu'') = 0.$$

L'intégrale générale sera donc

$$\left(\frac{y+\lambda' x}{y+\lambda'' x}\right)^n = C\left(\frac{y+\mu'' z}{y+\mu' z}\right)^p,$$

ou, en l'écrivant indépendamment de tout système d'axes,

$$\text{(II)} \qquad \frac{p}{q} = C\left(\frac{r}{s}\right)^\alpha,$$

p, q, r, s désignant des polynômes du premier degré.

Enfin, si l'on voulait qu'il y eût plus de deux points singuliers de l'espèce indiquée, on obtiendrait le cas particulier suivant de l'intégrale précédente,

$$\text{(III)} \qquad ps = Cqr,$$

qui représente des coniques passant par quatre points fixes. On voit que ces quatre points fixes sont des points singuliers de l'espèce indiquée.

Considérons maintenant les points singuliers par lesquels peuvent passer deux courbes qui soient tangentes sans être osculatrices. On peut alors démontrer le théorème suivant, qui nous sera utile dans la suite :

Toutes les fois que deux courbes, satisfaisant à l'équation, sont tangentes en un de leurs points communs sans y être osculatrices, la tangente commune au point de contact sera une solution particulière de l'équation différentielle.

Prenons, en effet, l'origine des coordonnées en ce point, qui sera nécessairement un point singulier, et supposons que la tangente commune ait été prise pour axe des x. Les valeurs de L, M, N sont données par les formules (59). Si l'on écrit que l'équation est satisfaite par une valeur de y de la forme

$$y = Cx^2 + C'x^3 + \ldots,$$

on aura, en ordonnant,

$$0 = -a'x + [C(2a - b') - \alpha']x^2 + \ldots;$$

on devra donc avoir

$$a' = 0, \quad C(2a - b') - \alpha' = 0, \quad \ldots.$$

Si donc il y a deux courbes satisfaisant à l'équation, et simplement tangentes, il sera nécessaire que l'équation

$$C(2a - b') - \alpha' = 0 \tag{61}$$

soit vérifiée par deux valeurs de C, ce qui ne peut avoir lieu que si l'on a

$$\alpha' = 0, \quad 2a - b' = 0.$$

Or, si α' est nul, l'équation admettra la solution $y = 0$, et par conséquent le théorème est démontré.

Le même calcul conduit à une autre proposition. Supposons qu'il y ait seulement une courbe passant par le point singulier tangentiellement à une droite donnée, mais que ce point soit un point d'inflexion pour la courbe. Alors le développement de y commencera seulement au terme en y^3 ou à des termes d'ordre supérieur. C sera nul, et l'équation (61) nous donnera

$$\alpha' = 0.$$

Ainsi :

Si un des points singuliers de l'équation différentielle est point d'inflexion pour une des courbes qui y passent, la tangente à cette courbe au point d'inflexion sera une solution particulière de l'équation différentielle.

Après avoir indiqué cette proposition, revenons à l'étude du cas où il y a des points singuliers par lesquels passent des courbes simplement tangentes les unes aux autres.

Supposons, par exemple, qu'il y ait trois points de cette nature, par chacun desquels il puisse passer deux courbes qui soient tangentes sans être osculatrices, et que les trois tangentes en ces points forment un triangle. Si nous prenons ce triangle pour triangle de référence, les valeurs de L, M, N devront être divisibles par x, y, z respectivement, puisque les trois côtés du triangle donnent trois solutions de l'équation. Les valeurs de L, M, N prendront les formes

$$\begin{aligned} L &= x(a'y + bz), \\ M &= y(a''z + b'x), \\ N &= z(ax + b''y). \end{aligned}$$

On verra, en effet, que, parmi les formes en nombre infini que l'on peut donner à L, M, N, il y en a toujours une pour laquelle L ne contient pas le terme en x^2, M le terme en y^2 et N le terme en z^2. Les trois points singuliers qui, en dehors des sommets, sont sur les côtés du triangle se déterminent aisément. Leurs coordonnées sont

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad a''z = b''y, \\ y &= 0, \quad bz = ax, \\ z &= 0, \quad a'y = b'x. \end{aligned}$$

En exprimant qu'il y a au moins deux courbes, passant en chacun de ces points et tangentes au côté correspondant du triangle, on trouve les équations de condition

$$\begin{aligned} aa'' + bb' + ab &= 0, \\ a'a + b'b'' + a'b' &= 0, \\ a''a' + bb'' + a''b'' &= 0. \end{aligned}$$

On peut, d'ailleurs, toujours disposer des paramètres de référence de telle manière que l'on ait

$$a = b, \quad a' = b'.$$

Alors les équations précédentes se réduisent aux deux suivantes :

$$a'' = b'', \quad a + a' + a'' = 0,$$

et les valeurs de L, M, N peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} L &= x[(\gamma - \beta)y + (\beta - \alpha)z], \\ M &= y[(\alpha - \gamma)z + (\gamma - \beta)x], \\ N &= z[(\beta - \alpha)x + (\alpha - \gamma)y]. \end{aligned}$$

Nous intégrerons plus loin (art. XV) l'équation définie par ces valeurs.

Considérons encore l'équation définie par les valeurs

$$\begin{aligned} L &= x(y + 2z), \\ M &= y(z + 2x), \\ N &= z(x + 2y), \end{aligned}$$

qui présente des propriétés analogues pour les trois points singuliers, sommets du triangle de référence, et cela de telle manière qu'au point $z = 0$, $y = 0$, il passe au moins deux courbes tangentes à la droite $y = 0$; qu'au point $x = 0$, $z = 0$, il y ait de même au moins deux courbes tangentes à la droite $z = 0$, et, enfin, qu'au point $y = 0$, $x = 0$, il y en ait deux au moins, tangentes à la droite $x = 0$.

Aux trois solutions particulières $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on peut ajouter la suivante :

$$xz^2 + yx^2 + zy^2 - 3xyz = 0,$$

qui représente une courbe du troisième degré, à la fois inscrite et circonscrite au triangle de référence. Avec quatre solutions, on pourra former le multiplicateur. On a

$$\begin{aligned} \Delta x &= (y + 2z)\,x, \\ \Delta y &= (z + 2x)\,y, \\ \Delta z &= (x + 2y)\,z, \end{aligned}$$

et en posant, pour abréger,

$$v = xz^2 + yx^2 + zy^2 - 3xyz,$$

on trouve

$$\Delta v = (2x + 2y + 2z)\,v.$$

Le multiplicateur sera de la forme

$$\mu = x^\alpha y^\beta z^\gamma v^\delta,$$

α, β, γ, δ étant définis par les équations (art. V)

$$\alpha + \beta + \gamma + 3\delta = -4,$$

$$\alpha\frac{\Delta x}{x} + \beta\frac{\Delta y}{y} + \gamma\frac{\Delta z}{z} + \delta\frac{\Delta v}{v} + \mathrm{H} = 0,$$

qui donnent

$$\alpha = \beta = \gamma = -\tfrac{1}{3}, \quad \delta = -1.$$

On a donc

$$\mu = (xyz)^{-\frac{1}{3}}(xz^2 + yz^2 + zy^2 - 3yxz)^{-1}.$$

Mais, au lieu d'effectuer l'intégration, il est préférable de faire un changement de variables et de substituer à x, y, z les variables

$$\lambda = (xz^2)^{\frac{1}{3}}, \quad \mu = (yx^2)^{\frac{1}{3}}, \quad \nu = (zy^2)^{\frac{1}{3}}.$$

On a

$$\begin{aligned} L' &= \Delta\lambda = \lambda\,(\lambda\nu^2 + \mu^2\lambda - 2\mu\nu^2),\\ M' &= \Delta\mu = \mu\,(\mu^2\lambda + \nu^2\mu - 2\nu\lambda^2),\\ N' &= \Delta\nu = \nu\,(\nu^2\mu + \lambda\,\nu - 2\mu^2\lambda), \end{aligned}$$

et, en appliquant les formules de l'article VI, la nouvelle équation en λ, μ, ν sera

$$L'(\mu\,d\nu - \nu\,d\mu) + M'(\nu\,d\lambda - \lambda\,d\nu) + N'(\lambda\,d\mu - \mu\,d\lambda) = 0.$$

Si l'on substitue à L', M', N' les valeurs

$$\begin{aligned} &L' - \lambda\,(\lambda^2\nu + \mu^2\lambda + \mu\nu^2),\\ &M' - \mu\,(\lambda^2\nu + \mu^2\lambda + \mu\nu^2),\\ &N' - \nu\,(\lambda^2\nu + \mu^2\lambda + \mu\nu^2), \end{aligned}$$

ce qui ne change pas l'équation, le facteur $\lambda\mu\nu$ sera en évidence, et, après sa suppression, on aura

$$\nu\,(\mu\,d\nu - \nu\,d\mu) + \lambda\,(\nu\,d\lambda - \lambda\,d\nu) + \mu(\lambda\,d\mu - \mu\,d\lambda) = 0,$$

ce qui est une équation de Jacobi. On a, pour cette équation,

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda + \mu + \nu) &= \lambda + \mu + \nu,\\ \Delta(\lambda + \alpha\,\mu + \alpha^2\nu) &= \alpha\,(\lambda + \alpha\,\mu + \alpha^2\nu),\\ \Delta(\lambda + \alpha^2\mu + \alpha\,\nu) &= \alpha^2\,(\lambda + \alpha^2\mu + \alpha\,\nu), \end{aligned}$$

α étant une racine cubique imaginaire de l'unité, et, par conséquent, l'intégrale est

$$(\lambda + \mu + \nu)\,(\lambda + \alpha\mu + \alpha^2\nu)^\alpha(\lambda + \alpha^2\mu + \alpha\nu)\,\alpha^2 = C,$$

ou, en revenant aux notations primitives,

$$\text{(IV)}\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(x^{\frac13} z^{\frac23} + y^{\frac13} x^{\frac23} + z^{\frac13} y^{\frac13}\right)\left(x^{\frac13} z^{\frac23} + \alpha\,y^{\frac13} z^{\frac23} + \alpha^2 z^{\frac13} y^{\frac23}\right)^{\alpha}\\ &\qquad\qquad \times\left(x^{\frac13} z^{\frac23} + \alpha^2 y^{\frac13} z^{\frac23} + \alpha z^{\frac13} y^{\frac23}\right)^{\alpha^2} = C. \end{aligned}\right.$$

L'intégrale générale n'est donc pas algébrique.

Je terminerai ce que j'ai à dire sur les points singuliers en remarquant que, si l'on considère trois points singuliers, non en ligne droite, on peut toujours, en substituant à L, M, N les valeurs $L - Ax$, $M - Ay$, $N - Az$, disposer des trois constantes contenues dans le polynôme du premier degré A, de telle manière que les nouvelles valeurs de L, M, N s'annulent pour les trois points singuliers. Alors, si l'on prend le triangle de ces trois points pour triangle de référence, on aura

$$(62)\qquad \begin{cases} L = A\,yz + B''xz + C'xy, \\ M = C''yz + A'xz + B\,xy, \\ N = B'yz + C\,xz + A''xy. \end{cases}$$

Après ces remarques préliminaires sur les points singuliers, nous allons intégrer l'équation différentielle, en supposant qu'il y ait des solutions particulières du premier, du second ou du troisième degré, en nombre suffisant pour donner soit le multiplicateur, soit l'intégrale générale.

VIII.

Intégration de l'équation proposée dans le cas où le facteur est une puissance d'un polynôme du premier degré.

Dans ce cas, il y aura, comme solution particulière, la droite que l'on obtient en égalant ce polynôme à zéro. Supposons que l'on ait choisi le triangle de référence de telle manière que l'équation de cette droite soit

$$z = 0.$$

Alors l'équation différentielle pourra être ramenée à la forme

$$L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) = 0,$$

où N est nul. L'expression $\dfrac{L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz)}{z^4}$ devra être une différentielle exacte. Si l'on fait $z = 1$, elle se réduit à

$$-L\,dy + M\,dx.$$

Il faudra donc que l'on ait

$$\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y} = 0,$$

d'où il suit que l'on peut poser

$$L = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad M = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

v désignant un polynôme du troisième degré en x, y. L'intégrale générale sera donc

$$v = C,$$

ou, si l'on rétablit l'homogénéité,

$$V = Cz^3,$$

V désignant un polynôme homogène quelconque du troisième degré en x, y, z. Si l'on écrit cette équation indépendamment de tout choix particulier d'axes, elle devient

$$v = Cp^3, \tag{V}$$

p étant un polynôme quelconque du premier degré. Réciproquement, on reconnaîtra sans peine que l'équation différentielle des courbes représentées par l'équation précédente se ramène, quels que soient v et p, au type que nous étudions.

A l'examen de ce premier cas d'intégrabilité se rattache un théorème qui nous sera utile dans la suite. *Ce cas est le seul dans lequel l'équation proposée puisse admettre comme solution particulière une cubique sans point double.*

En effet, supposons que l'équation proposée admette comme solution une telle cubique, représentée par l'équation

$$v = 0;$$

on devra prendre pour L, M, N (art. III) les valeurs

$$L = b\frac{\partial v}{\partial z} - c\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$M = c\frac{\partial v}{\partial x} - a\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$N = a\frac{\partial v}{\partial y} - b\frac{\partial v}{\partial x},$$

où a, b, c seront nécessairement des constantes, puisque L, M, N doivent être du second degré, comme les dérivées de v. L'équation pourra donc s'écrire (art. III)

$$3v(a\,dx + b\,dy + c\,dz) - dv(ax + by + cz) = 0,$$

et, en intégrant, on aura

$$v = C(ax + by + cz)^3.$$

IX.

Examen du cas où le facteur est de la forme $p^\alpha q^\beta$, p et q étant du premier degré.

Dans ce cas, l'équation devra admettre comme solutions les deux droites représentées par les équations

$$p = 0, \quad q = 0;$$

si l'on prend le triangle de référence de telle manière que les équations de ces deux droites deviennent

$$x = 0, \quad y = 0,$$

l'équation différentielle pourra s'écrire

$$x\mathrm{A}(y\,dz - z\,dy) + \mathrm{N}(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

A étant un polynôme du premier degré. Le facteur sera $x^\alpha y^\beta$, et l'on aura d'abord

$$\alpha + \beta = -4.$$

Il faut écrire que l'on a identiquement

$$\alpha\frac{\Delta x}{x} + \beta\frac{\Delta y}{y} + \mathrm{H} = 0;$$

or on a

$$\Delta x = x\mathrm{A}, \quad \Delta y = 0, \quad \mathrm{H} = \mathrm{A} + x\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z};$$

on devra donc avoir idéntiquement

$$(\alpha + 1)\mathrm{A} + x\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z} = 0.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{A} = mx + ny + pz,$$

on trouvera que la valeur de N satisfaisant à l'équation précédente est

$$\mathrm{N} = -(\alpha + 1)\left(mxz + nyz + p\frac{z^2}{2}\right) - mxz + ax^2 + bxy + cy^2,$$

et l'équation différentielle pourra s'écrire

$$d\left[x^{\alpha+1}y^{\beta+1}\left(mxz + nyz + \frac{pz^2}{2} + a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2\right)\right] = 0,$$

a_1, b_1, c_1 étant de nouvelles constantes dépendant de a, b, c; d'où résultera pour l'intégrale la forme

$$\text{(VI)} \qquad U^m = Cp^{m'}q^{m''},$$

où U est un polynôme du second degré et p, q des polynômes du premier degré.

On peut aussi démontrer un théorème de la nature de celui que nous avons établi pour le cas précédent. *Toutes les fois que l'équation admettra comme solutions particulières une conique et deux droites, qui ne soient pas tangentes à la conique, et ne se coupent pas sur cette conique, son intégrale sera de la forme* (VI).

Prenons, en effet, pour triangle de référence le triangle formé par les deux droites et par la polaire de leur point de concours relativement à la conique. L'équation de cette conique pourra, si l'on choisit convenablement les paramètres de référence, être mise sous la forme

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2bxy = 0,$$

et les valeurs correspondantes de L, M, N seront (art. III)

$$L = Qz - R(y + bx),$$
$$M = R(x + by) - Pz,$$
$$N = P(bx + y) - Q(x + by),$$

P, Q, R étant des polynômes du premier degré. On aura

$$\Delta u = 0.$$

D'autre part, les droites $x = 0$, $y = 0$ devant être solutions particulières, il faudra que L, M soient divisibles respectivement par x, y; en exprimant ces conditions, on sera conduit par un calcul facile aux valeurs suivantes de P, Q, R :

$$P = x + Cy, \quad Q = y + Ax, \quad R = z,$$

et par suite aux valeurs suivantes de L, M :

$$L = x(A - b)z, \quad M = y(b - C)z;$$

on aura donc

$$\Delta x = (A - b) zx, \quad \Delta y = (b - C) zx,$$

et par conséquent

$$\Delta (x^\alpha y^\beta u^\gamma) = 0,$$

pourvu que α, β satisfassent à la relation

$$\alpha (A - b) + \beta (b - C) = 0.$$

Si maintenant on détermine γ par l'équation

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 0,$$

$x^\alpha y^\beta u^\gamma$ sera une fonction homogène de degré zéro, dont le Δ sera nul, et l'intégrale générale sera par conséquent

$$x^\alpha y^\beta u^\gamma = C.$$

C'est le théorème que nous voulions démontrer; mais nous ferons remarquer, et l'on verra plus loin, que ce théorème cesserait d'être exact, si les deux droites se coupaient sur la conique, ou si l'une d'elles était tangente à la conique.

X.

Du cas où le facteur est de la forme $p^\alpha q^\beta r^\gamma$, p, q, r étant du premier degré.

Dans ce cas, l'équation devra admettre comme solutions les trois droites

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0;$$

supposons d'abord que ces trois droites forment un triangle, et prenons ce triangle comme triangle de référence.

Alors les valeurs de L, M, N seront

$$L = Ax, \quad M = By, \quad N = Cz;$$

A, B, C étant du premier degré, on pourra même écrire (art. VII)

$$\begin{aligned} L &= x (b'y + c''z), \\ M &= y (b''z + cx), \\ N &= z (bx + c'y); \end{aligned}$$

et l'on trouvera

$$H = (b + c)x + (b' + c')y + (b'' + c'')z = A + B + C.$$

Cela posé, pour que le facteur soit $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, il faut que l'on ait

$$\Delta(x^\alpha y^\beta z^\gamma) + x^\alpha y^\beta z^\gamma H = 0,$$
$$\alpha + \beta + \gamma = -4,$$

ou

$$(\alpha + 1)A + (\beta + 1)B + (\gamma + 1)C = 0.$$

Les trois polynômes A, B, C étant liés par une équation linéaire, il faudra que leur déterminant soit nul, ce qui donne l'équation de condition

$$bb'b'' + cc'c'' = 0. \tag{63}$$

Mais alors, on peut trouver directement l'intégrale générale. Il est aisé de reconnaître qu'il y a une nouvelle droite satisfaisant à l'équation. En effet, on a

$$\Delta(ux + vy + wz) = xy(b'u + cv) + yz(b''v + c'w) + zx(bw + c''u),$$

et, si la condition (63) est vérifiée, on peut trouver des valeurs de u, v, w satisfaisant aux équations

$$b'u + c\,v = 0,$$
$$b''v + c'w = 0,$$
$$bw + c''u = 0.$$

On aura donc, avec ces valeurs,

$$\Delta(ux + vy + wz) = 0.$$

D'autre part, on peut trouver des nombres α', β', γ', tels que

$$\Delta(x^{\alpha'} y^{\beta'} z^{\gamma'}) = 0.$$

Il suffira que α', β', γ' vérifient les équations

$$\alpha' b' + \gamma' c' = 0,$$
$$\beta' b'' + \alpha' c'' = 0,$$
$$\gamma' b + \beta' c = 0,$$

également compatibles en vertu de la relation (63) On aura donc

$$\Delta[x^{\alpha'}y^{\beta'}z^{\gamma'}(ux+vy+wz)^{-\alpha'-\beta'-\gamma'}]=0,$$

et par conséquent l'intégrale générale sera

$$x^{\alpha'}y^{\beta'}z^{\gamma'}=C(ux+vy+wz)^{\alpha'+\beta'+\gamma'}.$$

Elle est de la forme

$$\text{(VII)} \qquad p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\delta}=C,$$

p, q, r, s étant des polynômes du premier degré et la somme $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ étant nulle. Réciproquement, quels que soient p, q, r, s, l'équation différentielle des courbes (VII) appartient au type que nous étudions.

Examinons maintenant le cas où les trois polynômes p, q, r, qui forment le facteur égalé à zéro, représentent trois droites concourantes. Par un choix convenable des axes et des paramètres de référence, on pourra ramener les équations de ces trois droites à être

$$y=0, \quad z=0, \quad y-z=0.$$

On aura ici

$$M=By, \quad N=0,$$

et comme

$$\Delta(y-z)=M-N=By,$$

il faudra que B soit divisible par $y-z$. On aura donc

$$M=y(y-z),$$

et l'équation deviendra

$$\text{(64)} \qquad L(y\,dz-z\,dy)+y(y-z)(z\,dx-x\,dz)=0.$$

On aura

$$H=\frac{\partial L}{\partial x}+2y-z,$$

$$\Delta y=(y-z)y,$$

$$\Delta z=0,$$

$$\Delta(y-z)=y(y-z),$$

et par conséquent

$$\Delta[y^{\alpha}z^{\beta}(y-z)^{\gamma}]=[\alpha(y-z)+\gamma y]y^{\alpha}z^{\beta}(y-z)^{\gamma}.$$

Le multiplicateur devant satisfaire à l'équation

$$\Delta\mu+\mu H=0,$$

il faudra que l'on ait

$$\alpha(y-z)+\gamma y+\frac{\partial L}{\partial x}+2y-z=0.$$

Cette équation détermine pour L la valeur

$$L=(\alpha+1)x(z-y)-(\gamma+1)xy+Ay^2+Byz+A'z^2.$$

L'équation proposée, multipliée par le facteur, prendra la forme

$$\begin{aligned}&d[y^{\alpha+1}z^{\beta+1}(y-z)^{\gamma+1}x]\\&\quad+y^{\alpha}z^{\beta}(y-z)^{\gamma}(Ay^2+Byz+A'z^2)(y\,dz-z\,dy)=0.\end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\alpha+\beta+\gamma=-4.$$

En intégrant, on trouve

$$(\text{VIII})\quad\left\{\begin{aligned}&y^{\alpha+1}z^{\beta+1}(y-z)^{\gamma+1}x\\&\quad+\int y^{\alpha}z^{\beta}(y-z)^{\gamma}(Ay^2+Byz+A'z^2)(y\,dz-z\,dy)=C.\end{aligned}\right.$$

La quadrature indiquée se ramène, si l'on pose $y=tz$, à la forme

$$-\int t^{\alpha}(t-1)^{\gamma}(At^2+Bt+A')\,dt,$$

qui conduit dans un très-grand nombre de cas à des fonctions algébriques.

Par exemple, pour $\gamma=1$, on obtient l'intégrale

$$(\text{IX})\quad y^{\alpha+1}z^{-\alpha-4}[x(y-z)^2+A'y^3+B'y^2z+C'z^2y+D'z^3]=C,$$

où A', B', C', D' sont liés par l'unique relation

$$(\alpha+4)A'+(\alpha+3)B'+(\alpha+2)C'+(\alpha+1)D'=0,$$

et où C est la constante arbitraire.

XI.

Du cas où il y a au nombre des solutions particulières quatre droites.

Les calculs précédents démontrent que, s'il y a au nombre des solutions particulières quatre droites, dont trois ne soient pas concourantes, l'intégrale générale sera de la forme (VII). Cette forme comprend, comme cas particulier, les formes (II) et (III) déjà trouvées, dans lesquelles le nombre des droites s'élève à cinq et à six. Il nous reste donc seulement à traiter le cas où, sur les quatre droites, trois sont concourantes.

Supposons que les axes aient été choisis de telle manière que les équations des trois premières droites soient

$$y = 0, \quad z = 0, \quad y - z = 0,$$

et celle de la quatrième

$$x = 0.$$

Toute équation qui admet les trois premières comme solutions particulières est, nous l'avons vu à l'article précédent,

$$y(y-z)(z\,dx - x\,dz) + L(y\,dz - z\,dy) = 0,$$

et l'on vérifie sur cette équation qu'il ne peut y avoir une quatrième droite satisfaisant à l'équation et passant par le point de concours des trois premières. Cette équation devant admettre en outre la solution $x = 0$, on aura

$$L = Ax,$$

A étant du premier degré. Comme on a quatre solutions, on pourra, sans difficulté, former le multiplicateur.

Écrivons A comme il suit :

$$A = hx - \beta y - (\alpha + 1)z;$$

le multiplicateur sera

$$y^\alpha z^\beta (y-z)^\gamma x^{-2},$$

γ étant défini par l'équation

$$\alpha + \beta + \gamma + 2 = 0,$$

et l'intégrale de l'équation sera

$$(\mathrm{X}) \qquad -\frac{y^{\alpha+1} z^{\beta+1} (y-z)^{\gamma+1}}{x} + h\int y^\alpha z^\beta (y-z)^\gamma (y\,dz - z\,dy) = C.$$

Cette forme peut donner également une infinité d'intégrales algébriques. Par exemple, pour $\gamma = 1$, on a

$$(\text{XI}) \qquad y^{\alpha+1} z^{-\alpha-2} x^{-1}\left[(y-z)^2 + \frac{hxy}{\alpha+2} - \frac{hxz}{\alpha+1}\right] = \text{C},$$

et pour $\gamma = 2$,

$$(\text{XII}) \quad x^{-1} y^{\alpha+1} z^{-\alpha-3}\left[(y-z)^3 + hx\left(\frac{y^2}{\alpha+3} - \frac{2yz}{\alpha+2} + \frac{z^2}{\alpha+1}\right)\right] = \text{C}.$$

Nous signalons ces formes, parce que dans ce cas il y a, comme solution particulière, soit une conique, soit une cubique.

Nous avons maintenant épuisé l'étude des cas où la solution peut être obtenue en employant les seules droites comme solutions particulières.

XII.

Remarques générales sur le cas où il y a une conique au nombre des solutions particulières.

Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la conique, solution particulière. Les valeurs de L, M, N pourront être prises (art. III) sous la forme

$$(65) \qquad \begin{cases} \text{L} = \text{Q}f'_z - \text{R}f'_y, \\ \text{M} = \text{R}f'_x - \text{P}f'_z, \\ \text{N} = \text{P}f'_y - \text{Q}f'_x, \end{cases}$$

P, Q, R étant du premier degré, et alors on aura

$$(66) \qquad \begin{cases} \Delta f = 0, \\ \text{H} = f'_x\left(\dfrac{\partial \text{R}}{\partial y} - \dfrac{\partial \text{Q}}{\partial z}\right) + f'_y\left(\dfrac{\partial \text{P}}{\partial z} - \dfrac{\partial \text{R}}{\partial x}\right) + f'_z\left(\dfrac{\partial \text{Q}}{\partial x} - \dfrac{\partial \text{P}}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Si l'équation différentielle admet le facteur f^α ($\alpha = -2$), il faudra que H soit nul; on devra donc avoir

$$\frac{\partial \text{R}}{\partial y} - \frac{\partial \text{Q}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \text{P}}{\partial z} - \frac{\partial \text{R}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \text{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \text{P}}{\partial y} = 0.$$

On pourra donc poser

$$\text{P} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \text{Q} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{R} = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

φ étant une fonction du second degré; on aura

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\left(\frac{f}{\varphi}\right) = 0,$$

et, par conséquent, l'intégrale sera

$$\varphi = Cf.$$

Elle représente des coniques passant par quatre points fixes. Je vais démontrer que ce cas est le seul dans lequel l'équation puisse admettre, comme solutions, deux coniques *indécomposables* se coupant en quatre points distincts, ou, ce qui est plus général, ayant un triangle conjugué commun. Supposons, en effet, que les deux coniques soient rapportées à ce triangle conjugué; leurs équations seront

$$u = x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$
$$v = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

a, b, c n'étant pas nuls. On aura

$$(67)\qquad \begin{cases} L = Qz - Ry, \\ M = Rx - Pz, \\ N = Py - Qx, \end{cases}$$

et

$$\Delta u = 0,$$
$$\Delta v = Qxz(a - c) + Rxy(b - a) + Pyz(c - b).$$

Puisque v est une solution, on devra avoir

$$\Delta v = (a'x + b'y + c'z)(ax^2 + by^2 + cz^2).$$

En égalant dans les deux membres les coefficients de x^3, y^3, z^3, on a

$$aa' = bb' = cc' = 0,$$

et, par conséquent, a, b, c n'étant pas nuls,

$$a' = b' = c' = 0;$$

par suite on aura

$$\Delta v = 0, \quad \Delta\left(\frac{u}{v}\right) = 0,$$

et l'intégrale générale sera

$$u = Cv.$$

Ainsi, en dehors de ce cas particulier, si deux coniques donnent des solutions de l'équation, elles ne peuvent ni se couper en quatre points distincts, ni être doublement tangentes.

Revenons au cas général, où il y a une seule conique comme solution particulière. Il est utile de connaître la disposition des points singuliers, et de savoir combien il y en a sur la conique.

Les points singuliers sont définis par les équations

$$L = \lambda x, \quad M = \lambda y, \quad N = \lambda z,$$

et si l'on substitue ces valeurs de L, M, N dans l'équation identique

$$\Delta f = 0,$$

elle devient

$$2\lambda f = 0.$$

Il y a donc deux espèces de points singuliers : 1° ceux pour lesquels on a

$$\lambda = 0, \quad L = M = N = 0,$$

ou

$$\frac{P}{f'_x} = \frac{Q}{f'_y} = \frac{R}{f'_z};$$

ces points sont au nombre de trois; 2° les quatre autres seront sur la conique, et il résulte des formules (36) qu'ils seront définis par les deux équations

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$Px + Qy + Rz = 0.$$

Supposons, comme cela a lieu généralement, que les trois premiers points forment un triangle, et que l'on choisisse ce triangle pour triangle de référence, l'équation différentielle prendra une forme remarquable.

Soit alors

$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0$$

l'équation de la conique. Si l'on exprime que les valeurs de L, M, N, données par les formules (65), s'annulent pour les trois sommets du triangle, on obtiendra des équations de condition faciles à résoudre, qui donneront pour P, Q, R les valeurs

$$\begin{aligned} P &= A\lambda x + B''\mu y + B'\nu z, \\ Q &= B''\lambda x + A'\mu y + B\nu z, \\ R &= B'\lambda x + B\mu y + A''\nu z, \end{aligned}$$

qui ne diffèrent des dérivées de f que par la substitution de λx, μy, νz à x, y, z. On en déduit

$$(68)\quad \left\{ \begin{aligned} L &= a\,(\nu-\mu)yz + b''(\lambda-\nu)xz + b'(\mu-\lambda)xy, \\ M &= b''(\nu-\mu)yz + a'(\lambda-\nu)xz + b\,(\mu-\lambda)xy, \\ N &= b'(\nu-\mu)yz + b\,(\lambda-\nu)xz + a''(\mu-\lambda)xy, \end{aligned} \right.$$

où a, a', a'', b, b', b'' sont les coefficients de l'équation tangentielle de la conique, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a &= B^2 - A'A'', & b &= AB - B'B'', \\ a' &= B'^2 - AA'', & b' &= A'B' - BB'', \\ a'' &= B''^2 - AA', & b'' &= A''B'' - BB'. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$(69)\qquad H = (\lambda-\mu)\,b''z + (\mu-\nu)\,bx + (\nu-\lambda)\,b'y.$$

(*A suivre.*)