BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

M.-G. SABININE

Développements analytiques, pour servir à compléter la discussion de la variation seconde des intégrales définies multiples

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 100-123

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_100_1>

© Gauthier-Villars, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉLANGES.

DÉVELOPPEMENTS ANALYTIQUES, POUR SERVIR A COMPLÉTER LA DISCUSSION DE LA VARIATION SECONDE DES INTÉGRALES DÉFINIES MULTIPLES;

PAR M. M.-G. SABININE,
Professeur a l'Universite d'Odessa.

1. La discussion de la variation seconde d'une intégrale définie multiple, que nous désignerons par V, présente un cas qui n'a pas été résolu jusqu'ici. C'est, comme l'on sait, celui où il s'agit de la discussion de la partie intégrable de $\delta^2 V$, ou bien celui où les variations tronquées ω des fonctions y, qui rendent l'intégrale V maximum ou minimum, ne sont pas nulles aux limites des intégrations. Dans notre Note insérée au *Bulletin de l'Académie Im-*

périale des Sciences de Saint-Pétersbourg, t. XV, p. 70-86, nous avons obtenu les mêmes résultats qu'a donnés M. Clebsch dans son Mémoire *Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale* (1), résultats qui n'ont pas la forme définitive sous laquelle il conviendrait de les présenter. Cela ne provient que des réductions que, d'après M. Clebsch, nous avons fait subir à l'expression ρ (2); en vertu de ces réductions, nos résultats contiennent un terme ε (3) qui entre dans la partie intégrable de $\delta^2 V$, et qui renferme les dérivées partielles de quantités arbitraires t. Dans la présente Note, nous allons démontrer que l'expression ρ se réduit *identiquement* à zéro, et nous indiquerons le moyen de discuter les deux parties de $\delta^2 V$, la partie non intégrable et celle qui se rapporte aux limites des intégrations.

Nous ferons entrer plusieurs parties de notre Note (*Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XV) dans celle-ci, afin de la présenter en entier, et en même temps afin d'éviter au lecteur l'inconvénient d'avoir recours aux citations.

Dans notre discussion de la variation $\delta^2 V$, nous supposons que les limites de l'intégrale définie multiple sont données et restent invariables. Cette supposition, étant admise uniquement pour exposer de la manière la plus simple la théorie compliquée, est toujours permise sans que la présente Note manque de la généralité qui est nécessaire pour la discussion de la variation $\delta^2 V$. En effet, au cas contraire, c'est-à-dire si l'intégrale multiple V est prise par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_i$, dont les valeurs extrêmes subissent des variations, la discussion de la variation $\delta^2 V$, par le changement de variables dans les intégrales définies, peut être toujours ramenée à la discussion de la variation seconde de l'intégrale V', prise par rapport aux nouvelles variables indépendantes $x'_1, x'_2, \ldots, x'_i$, dans laquelle les variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$ doivent être regardées comme des fonctions inconnues de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_i$. Ainsi le moyen que nous allons proposer sert à compléter la discussion de la variation seconde d'une intégrale définie multiple, lors même qu'il y a la supposition admise par nous,

(1) *Journal de Crelle*, t. 56, p. 122.
(2) P. 79, formule (40).
(3) P. 80, formule (47).

c'est-à-dire la supposition que les limites d'une intégrale définie multiple sont données et restent invariables.

2. Nous exposerons d'abord les préliminaires qu'il est nécessaire de faire voir pour les transformations de la variation seconde d'une intégrale définie multiple, et nous indiquerons ensuite ces transformations.

Soit proposé de trouver le maximum ou le minimum de l'intégrale multiple

$$(1) \qquad W = \int w\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i,$$

prise par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_i$, dont les valeurs extrêmes ou les limites des intégrations successives sont données par l'équation

$$(2) \qquad u = 0,$$

u étant une fonction donnée de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nous désignerons par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_i$ les limites inférieures des variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$, et par $x''_1, x''_2, \ldots, x''_i$ leurs limites supérieures; nous supposerons que les limites de chacune des variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$ sont des fonctions des variables qui la suivent, de sorte que les limites x''_i et x'_i sont indépendantes de toutes les variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$, tandis que les limites x''_{i-1} et x'_{i-1} pourront être fonctions de x_i; celles des x_{i-2}, savoir x''_{i-2} et x'_{i-2}, des fonctions de x_i et x_{i-1}, et ainsi de suite jusqu'à la variable x_1, dont les limites x''_1 et x'_1 seront en général des fonctions de $x_2, x_3, \ldots, x_i$.

La fonction w, qui se trouve sous le signe $\int$, contient explicitement les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_i$, des fonctions inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_s$ de ces variables, et les dérivées partielles du premier ordre de ces fonctions par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_i$. Ces dérivées seront désignées dans la suite par

$$p_{1,1}, p_{1,2}, \ldots, p_{1,i}, \ldots, p_{s,1}, p_{s,2}, \ldots, p_{s,i},$$

et en général

$$p_{s,i} = \frac{\partial y_s}{\partial x_i},$$

i étant un des nombres $1, 2, \ldots, i$, et s un des nombres $1, 2, \ldots, s$.

Nous admettrons encore que les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_s$ sont liées à leurs dérivées partielles $p_{s,i}$ et aux variables indépendantes x_i par les équations

$$(3) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_k = 0.$$

Les variations tronquées $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ et leurs dérivées partielles $\frac{\partial \omega_s}{\partial x_i}$, qui sont en même temps les variations des dérivées partielles $p_{s,i}$, doivent satisfaire aux équations

$$(4) \qquad \delta\varphi_1 = 0, \quad \delta\varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \delta\varphi_k = 0,$$

dont la forme générale est

$$(5) \qquad \sum_s \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_s} \omega_s + \sum_s \sum_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_{s,i}} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i} = 0,$$

le signe Σ_s désignant une somme relative aux indices 1, 2, ..., s, et Σ_i une somme relative aux indices 1, 2, ..., i.

Outre les équations (3) et (4), nous admettrons que les valeurs limites des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_s$ sont liées à leurs dérivées partielles et aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$ par les relations données, et nous supposerons qu'il n'y a qu'une relation donnée,

$$(6) \qquad \Big/^{x''_1} F(x_1, x_2, \ldots, x_i, y_1, y_2, \ldots, y_s, q_{1,2}, q_{1,3}, \ldots q_{1,i}, \ldots q_{s,2}, \ldots, q_{s,i}) = 0,$$

$\Big/^{x''_1}$ étant le signe de substitution, et

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{llll} q_{1,2} = p_{1,2} + p_{1,1} \frac{\partial x''_1}{\partial x_2}, & q_{1,3} = p_{1,3} + p_{1,1} \frac{\partial x''_1}{\partial x_3}, & \ldots, & q_{1,i} = p_{1,i} + p_{1,1} \frac{\partial x''_1}{\partial x_i}, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots & \ldots\ldots, \\ q_{s,2} = p_{s,2} + p_{s,1} \frac{\partial x''_1}{\partial x_2}, & q_{s,3} = p_{s,3} + p_{s,1} \frac{\partial x''_1}{\partial x_3}, & \ldots, & q_{s,i} = p_{s,i} + p_{s,1} \frac{\partial x''_1}{\partial x_i}. \end{array} \right.$$

Cette supposition, étant admise uniquement pour abréger, n'a pas d'influence sur la généralité de la discussion de la variation $\delta^2 W$; car, au cas que l'on donne un nombre quelconque d'équations analogues à (6), les transformations de la variation de $\delta^2 W$ seront au fond les mêmes qu'il est nécessaire de faire dans le cas pris par nous. En posant

$$\int^{x''_1} F(x_1, x_2, \ldots, x_i, y_1, y_2, \ldots, y_s, q_{1,2}, \ldots, q_{1,i}, \ldots, q_{s,2}, \ldots, q_{s,i})$$
$$= \psi(x_2, \ldots, x_i, y_s, \ldots, q_{s,i}),$$

l'équation (6) se représentera par celle-ci :

$$(8) \qquad \psi(x_2, \ldots, x_i, y_s, \ldots, q_{s,i}) = 0,$$

i étant, dans cette équation, un des nombres 2, 3, ..., i.

Les variations tronquées ω, relatives aux limites des intégrations, et leurs dérivées partielles $\frac{\partial \omega_s}{\partial x_i}$, qui sont en même temps les variations des dérivées partielles $q_{s,i}$, doivent satisfaire à l'équation

$$(9) \qquad \delta\psi = 0,$$

dont la forme générale est

$$(10) \qquad \sum_s \frac{\partial \psi}{\partial y_s}\omega_s + \sum_s \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial q_{s,i}} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i} = 0.$$

Il est à remarquer que nous supposons que dans les équations (6) et (9) entrent les $q_{s,i}$, mais non pas les $p_{s,i}$; cette supposition est permise sans restreindre la généralité de la discussion de la variation $\delta^2 W$. En effet, au cas où l'on donne l'équation de condition contenant $p_{s,i}$ sous la forme

$$\int^{x''_1} f(x_1, x_2, \ldots, y_s, \ldots, p_{s,i}) = 0,$$

et en même temps

$$\int^{x''_1} \delta f(x_1, x_2, \ldots, y_s, \ldots, p_{s,i}) = 0,$$

cette équation $\int^{x''_1} \delta f(x_1, x_2, \ldots, y_s, \ldots, p_{s,i}) = 0$ entraîne $s+1$ équations, dont une est celle à laquelle doivent satisfaire les valeurs limites des ω_s, et les s autres, les équations qui donnent les s relations entre x_i, y_s et $p_{s,i}$; ces s relations et les $s(i-1)$ équations (7) déterminent les $p_{s,i}$ en fonctions de x_i, y_s et $q_{s,i}$; en portant ces valeurs des $p_{s,i}$ dans l'équation $\int^{x''_1} f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, y_s, \ldots, p_{s,i}) = 0$, on aura l'équation de condition qui ne renferme plus d'autres dérivées partielles de y_s que les $q_{s,i}$.

La question proposée du maximum ou du minimum relatif peut être ramenée, comme on sait, à la question du maximum ou du minimum absolu de cette autre intégrale

$$(11)\quad V = V_1 + V_2, \quad \text{où} \quad V_1 = \int v_1\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i, \quad V_2 = \int v_2\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_i,$$

dans lesquelles

$$(12)\qquad v_1 = w + \sum_k \lambda_k \varphi_k, \quad v_2 = l\psi,$$

les λ_k et l représentant des fonctions inconnues des x_i, qu'il faut déterminer, ainsi que les fonctions y_s, au moyen des équations (2) et (8) et d'autres équations qui dérivent de la condition $\delta V = 0$.

Les limites de l'intégrale V étant supposées invariables, la variation δV ne sera autre chose que l'intégrale des différentielles de v_1 et v_2 dues aux accroissements ω_s des y_s et aux accroissements $\frac{\partial \omega_s}{\partial x_i}$ des $p_{s,i}$. Nous pouvons donc représenter cette variation δV par

$$(13)\quad \delta V = \delta V_1 + \delta V_2 = \int \delta v_1\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i + \int \delta v_2\, dx_2 \ldots dx_i,$$

en posant, pour abréger,

$$N_s = \frac{\partial v_1}{\partial y_s}, \quad P_{s,i} = \frac{\partial v_1}{\partial p_{s,i}}, \quad M_s = \frac{\partial v_2}{\partial y_s}, \quad Q_{s,i} = \frac{\partial v_2}{\partial q_{s,i}},$$

l'indice i qui affecte les $Q_{s,i}$ étant un des nombres 2, 3, ..., i, et

$$(14)\qquad \delta v_1 = \sum_s N_s\, \omega_s + \sum_s \sum_i P_{s,i} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i},$$

$$(15)\qquad \delta v_2 = \sum_s M_s\, \omega_s + \sum_s \sum_i Q_{s,i} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i},$$

ou

$$(16)\qquad \delta v_1 = \sum_s \sum_i \frac{\partial (P_{s,i}\, \omega_s)}{\partial x_i} + \sum_s \omega_s \left(N_s - \sum_i \frac{\partial P_{s,i}}{\partial x_i} \right),$$

$$(17)\qquad \delta v_2 = \sum_s \sum_i \frac{\partial (Q_{s,i}\, \omega_s)}{\partial x_i} + \sum_s \omega_s \left(M_s - \sum_i \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial x_i} \right).$$

Nous aurons donc

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta V = & \int \sum_s \sum_i \frac{\partial (Q_{s,i}\,\omega_s)}{\partial x_i}\, dx_2 \ldots dx_i \\
& + \int \sum_s \left(M_s - \sum_i \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial x_i} \right) \omega_s\, dx_2 \ldots dx_i \\
& + \int \sum_s \sum_i \frac{\partial (P_{s,i}\,\omega_s)}{\partial x_i}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i \\
& + \int \sum_s \left(N_s - \sum_i \frac{\partial P_{s,i}}{\partial x_i} \right) \omega_s\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i.
\end{aligned}\right.$$

En égalant à zéro le quatrième terme de cette expression, on obtient les s équations aux dérivées partielles du second ordre

$$(19)\qquad N_1 = \sum_i \frac{\partial P_{1,i}}{\partial x_i}, \quad N_2 = \sum_i \frac{\partial P_{2,i}}{\partial x_i}, \quad \ldots, \quad N_s = \sum_i \frac{\partial P_{s,i}}{\partial x_i},$$

auxquelles il faut adjoindre les k équations (3). Ces équations (19) et (3) serviront à déterminer les fonctions inconnues y_s et λ_k. Les valeurs générales des y_s et des λ_k, obtenues par l'intégration des équations (19) et (3), contiendront des fonctions arbitraires α_1, α_2, ...

Quant à la partie restante de $\delta^2 V$, l'intégrale

$$\int \sum_s \sum_i \frac{\partial (P_{s,i}\,\omega_s)}{\partial x_i}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

se réduira, au moyen des transformations connues, à deux intégrales de l'ordre $i-1$, dont l'une, celle dans laquelle x_1 reçoit la valeur limite x'_1, donne les s équations

$$(20)\qquad \Big|^{x'_1} \sum_i P_{1,i} \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}} = 0, \quad \ldots, \quad \Big|^{x'_1} \sum_i P_{s,i} \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}} = 0;$$

l'autre, celle dans laquelle x_1 reçoit la valeur limite x''_1, étant égalée à zéro, avec l'intégrale $\int \sum_s \left(M_s - \sum_i \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial x_i} \right) \omega_s\, dx_2 \ldots dx_i$, donne encore les s équations

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int^{x''_1}\sum_t P_{1,t}\frac{\frac{\partial u}{\partial x_t}}{\frac{\partial u}{\partial x_1}}+M_1-\sum_t\frac{\partial Q_{1,t}}{\partial x_t}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \displaystyle\int^{x''_1}\sum_t P_{s,t}\frac{\frac{\partial u}{\partial x_t}}{\frac{\partial u}{\partial x_1}}+M_s-\sum_t\frac{\partial Q_{s,t}}{\partial x_t}=0. \end{array}\right.$$

L'intégrale

$$\int\sum_s\sum_t\frac{\partial(Q_{s,t}\,\omega_s)}{\partial x_t}\,dx_2\,dx_3\dots dx_i$$

se réduira, au moyen de transformations connues, à deux intégrales qui, étant égalées à zéro, donnent les $2s$ équations

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int^{x''_2}\sum_t Q_{1,t}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_t}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}=0, & \dots,\quad \displaystyle\int^{x''_2}\sum_t Q_{s,t}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_t}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}=0, \\ \displaystyle\int^{x'_2}\sum_t Q_{1,t}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_t}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}=0, & \dots,\quad \displaystyle\int^{x'_1}\sum_t Q_{s,t}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_t}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}=0, \end{array}\right.$$

u_1 étant le résultat de l'élimination de la variable x_1 entre $u=0$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1}=0$.

Aux équations (20), (21) et (22) il faut adjoindre les équations (7) et (8). Ces équations (20), (21), (22), (7) et (8), relatives aux limites des intégrations, serviront à déterminer les fonctions l et α_1, α_2, ...

La variation seconde $\delta^2 V$, en vertu de la formule (13), se réduit à

$$(23)\quad \delta^2 V=\delta^2 V_1+\delta^2 V_2=\int\delta^2 v_1\,dx_1\,dx_2\dots dx_i+\int\delta^2 v_2\,dx_2\,dx_3\dots dx_i,$$

où

$$\delta^2 v_1=\sum_s\frac{\partial\delta v_1}{\partial y_s}\omega_s+\sum_s\sum_t\frac{\partial\delta v_1}{\partial p_{s,t}}\frac{\partial\omega_s}{\partial x_t},$$

$$\delta^2 v_2=\sum_s\frac{\partial\delta v_2}{\partial y_s}\omega_s+\sum_s\sum_t\frac{\partial\delta v_2}{\partial q_{s,t}}\frac{\partial\omega_s}{\partial x_t}.$$

Or on peut mettre ces deux dernières expressions sous la forme

$$\delta^2 v_1 = \sum_s \sum_i \frac{\partial\left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial p_{s,i}}\omega_s\right)}{\partial x_i} + \sum_s \left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial y_s} - \sum_i \frac{\partial \cdot \frac{\partial \delta v_1}{\partial p_{s,i}}}{\partial x_i}\right)\omega_s,$$

$$\delta^2 v_2 = \sum_s \sum_i \frac{\partial\left(\frac{\partial \delta v_2}{\partial q_{s,i}}\omega_s\right)}{\partial x_i} + \sum_s \left(\frac{\partial \delta v_2}{\partial y_s} - \sum_i \frac{\partial \cdot \frac{\partial \delta v_2}{\partial q_{s,i}}}{\partial x_i}\right)\omega_s,$$

par conséquent

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2 V_1 &= \int \sum_s \sum_i \frac{\partial\left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial p_{s,i}}\omega_s\right)}{\partial x_i} dx_1\, dx_2 \ldots dx_i \\ &+ \int \sum_s \left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial y_s} - \sum_i \frac{\partial \cdot \frac{\partial \delta v_1}{\partial p_{s,i}}}{\partial x_i}\right)\omega_s\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i, \end{aligned}\right.$$

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2 V_2 &= \int \sum_s \sum_i \frac{\partial\left(\frac{\partial \delta v_2}{\partial q_{s,i}}\omega_s\right)}{\partial x_i} dx_2\, dx_3 \ldots dx_i \\ &+ \int \sum_s \left(\frac{\partial \delta v_2}{\partial y_s} - \sum_i \frac{\partial \cdot \frac{\partial \delta v_2}{\partial q_{s,i}}}{\partial x_i}\right)\omega_s\, dx_2 \ldots dx_i, \end{aligned}\right.$$

où, sous le signe $\int$, il faut aussi substituer à δv_1 et δv_2 leurs expressions (14) et (15). La sommation relative à chacun des indices s et i devant être faite deux fois, nous remplacerons d'abord, dans les formules (14) et (15), les indices s et i respectivement par σ et j, et nous porterons ensuite ces expressions dans (24) et (25), sans changer les indices s et i relatifs aux secondes sommations. Observant que

$$\frac{\partial N_\sigma}{\partial p_{s,i}} = \frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}, \quad \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial p_{s,i}} = \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}, \quad \frac{\partial N_\sigma}{\partial y_s} = \frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma}, \quad \sum_j \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial y_s}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial M_\sigma}{\partial q_{s,i}} = \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}, \quad \frac{\partial Q_{\sigma,j}}{\partial q_{s,i}} = \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}, \quad \frac{\partial M_\sigma}{\partial y_s} = \frac{\partial M_s}{\partial y_\sigma}, \quad \sum_j \frac{\partial Q_{\sigma,j}}{\partial y_s}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial q_{\sigma,i}}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_i},$$

nous obtiendrons les deux formules

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2 V_1 = {} & \int \left[\sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial \left(\dfrac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}\, \omega_s\, \omega_\sigma \right)}{\partial x_i} \right] dx_1\, dx_2 \ldots dx_i \\
& + \int \left[\sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial \left(\sum_j \dfrac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\, \dfrac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j}\, \omega_s \right)}{\partial x_i} \right] dx_1\, dx_2 \ldots dx_i \\
& + \int \Bigg\{ \sum_s \sum_\sigma \Bigg[\frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma}\, \omega_\sigma + \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}}\, \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_i} \\
& \qquad - \sum_i \frac{\partial \left(\dfrac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}\, \omega_\sigma \right)}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial \left(\sum_s \dfrac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\, \dfrac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i} \Bigg] \omega_s \Bigg\} dx_1\, dx_2 \ldots dx_i,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2 V_2 = {} & \int \left[\sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial \left(\dfrac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}\, \omega_s\, \omega_\sigma \right)}{\partial x_i} \right] dx_2\, dx_3 \ldots dx_i \\
& + \int \left[\sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial \left(\sum_j \dfrac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\, \dfrac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j}\, \omega_s \right)}{\partial x_i} \right] dx_2\, dx_3 \ldots dx_i \\
& + \int \Bigg\{ \sum_s \sum_\sigma \Bigg[\frac{\partial M_s}{\partial y_\sigma}\, \omega_\sigma + \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial q_{\sigma,i}}\, \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_i} \\
& \qquad - \sum_i \frac{\partial \left(\dfrac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}\, \omega_\sigma \right)}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial \left(\sum_s \dfrac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\, \dfrac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i} \Bigg] \omega_s \Bigg\} dx_2\, dx_3 \ldots dx_i.
\end{aligned}
\right.
$$

3. Pour obtenir une expression de $\delta^2 V$ qui puisse servir à la distinction du maximum ou du minimum de l'intégrale V, nous transformerons les expressions (26) et (27) en substituant aux variations tronquées ω_s des fonctions linéaires de nouvelles variables, dont les coefficients se déterminent de la manière suivante.

Désignons par a_m une constante indéterminée, indépendante de $x_1, x_2, \ldots, x_i$, qui n'entre dans les fonctions y, λ et l que par suite de l'intégration des équations (3), (13), (20), (21), (22) et (8); le nombre des fonctions y_s étant égal à s, prenons s quelconques de ces constantes a_m, et formons les expressions

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{lll} R_{1,1}=\sum_m b_{1,m}\frac{\partial y_1}{\partial a_m}, & \ldots, & R_{1,n}=\sum_m b_{n,m}\frac{\partial y_1}{\partial a_m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_{s,1}=\sum_m b_{1,m}\frac{\partial y_s}{\partial a_m}, & \ldots, & R_{s,n}=\sum_m b_{n,m}\frac{\partial y_s}{\partial a_m}, \end{array}\right.$$

dans lesquelles $b_{1,1}$, ..., $b_{1,m}$, ..., $b_{n,1}$, ..., $b_{n,m}$ sont des constantes indéterminées, indépendantes de x_1, x_2, ..., x_i, qui sont assujetties à la seule condition d'être des quantités réelles et positives, et qui n'entrent ni dans les fonctions y, λ et l, ni dans les équations (2), (13), ni dans les équations aux limites (3), (20), (21) et (22); la somme $\sum_m$ s'étendant aux constantes a_m, et n, ainsi que m, désignant tous les nombres entiers positifs depuis 1 jusqu'à s.

Nous représenterons encore ces mêmes valeurs par

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{lll} R_{1,1}=\sum_\mu b_{1,\mu}\frac{\partial y_1}{\partial a_\mu}, & \ldots, & R_{1,\nu}=\sum_\mu b_{\nu,\mu}\frac{\partial y_1}{\partial a_\mu}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_{\sigma,1}=\sum_\mu b_{1,\mu}\frac{\partial y_\sigma}{\partial a_\mu}, & \ldots, & R_{\sigma,\nu}=\sum_\mu b_{\nu,\mu}\frac{\partial y_\sigma}{\partial a_\mu}, \end{array}\right.$$

en changeant les indices s, n, m respectivement en σ, ν, μ.

Les valeurs des y_s, considérées comme fonctions des a_m, étant indépendantes entre elles, et les constantes $b_{n,m}$ parfaitement arbitraires, on peut toujours attribuer à ces dernières des valeurs pour lesquelles le déterminant D des s^2 quantités (28) ne sera pas égal à zéro. Cela posé, formons encore les $s(k+1)$ expressions

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{lll} A_{1,1}=\sum_m b_{1,m}\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_m}, & \ldots, & A_{1,n}=\sum_m b_{n,m}\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{k,1}=\sum_m b_{1,m}\frac{\partial \lambda_k}{\partial a_m}, & \ldots, & A_{k,n}=\sum_m b_{n,m}\frac{\partial \lambda_k}{\partial a_m}, \end{array}\right.$$

$$(31)\quad L_1=\sum_m b_{1,m}\frac{\partial l}{\partial a_m}, \quad \ldots, \quad L_n=\sum_m b_{n,m}\frac{\partial l}{\partial a_m},$$

ou, en changeant les indices n, m respectivement en ν, μ,

$$(32)\quad \begin{cases} A_{1,1}=\sum_\mu b_{1,\mu}\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial a_\mu}, & \ldots, \quad A_{1,\nu}=\sum_\mu b_{\nu,\mu}\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial a_\mu}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{k,1}=\sum_\mu b_{1,\mu}\dfrac{\partial\lambda_k}{\partial a_\mu}, & \ldots, \quad A_{k,\nu}=\sum_\mu b_{\nu,\mu}\dfrac{\partial\lambda_k}{\partial a_\mu}, \end{cases}$$

$$(33)\quad L_1=\sum_\mu b_{1,\mu}\frac{\partial l}{\partial a_\mu}, \quad \ldots, \quad L_\nu=\sum_\mu b_{\nu,\mu}\frac{\partial l}{\partial a_\mu},$$

qui nous seront utiles dans la suite.

En prenant les dérivées de quelques-unes des équations (19), (3), (20), (21), (22) et (8), par rapport aux constantes a_μ, multipliant ensuite ces dérivées par les constantes $b_{\nu,\mu}$, et faisant la somme des produits, nous obtiendrons des équations différentielles linéaires par rapport aux expressions (23), (32) et (33), de la forme

$$(34)\quad h_{s,\nu}=0,$$

où

$$(35)\quad \begin{cases} h_{s,\nu}=\sum_\sigma \dfrac{\partial N_s}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_k \dfrac{\partial N_s}{\partial \lambda_k}A_{k,\nu}+\sum_i\sum_\sigma \dfrac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}}\dfrac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i} \\ \quad -\sum_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_\sigma \dfrac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_k \dfrac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k}A_{k,\nu}+\sum_\sigma\sum_j \dfrac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\dfrac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right), \end{cases}$$

$$(36)\quad \sum_\sigma \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_i\sum_\sigma \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_{\sigma,i}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i}=0,$$

$$(37)\quad \int^{x''_1}\sum_i\sum_\sigma \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i}+\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k}A_{k,\nu}\right)+g_{s,\nu}=0,$$

où

$$(38)\quad \begin{cases} g_{s,\nu}=\sum_\sigma \dfrac{\partial M_s}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\dfrac{\partial M_s}{\partial l}L_\nu+\sum_i\sum_\sigma \dfrac{\partial M_s}{\partial q_{s,i}}\dfrac{\partial R_{s,\nu}}{\partial x_i} \\ \quad -\sum_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_\sigma \dfrac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\dfrac{\partial Q_{s,i}}{\partial l}L_\nu+\sum_\sigma\sum_j \dfrac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\dfrac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right), \end{cases}$$

$$(39)\quad \int^{x'_1}\sum_i\sum_\sigma \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}+\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k}A_{k,\nu}\right)=0,$$

$$(40)\left\{\begin{aligned}
&\int^{x''_1}\sum_i\sum_\sigma \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l}L_\nu+\sum_j\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right)=0,\\
&\int^{x'_1}\sum_i\sum_\sigma \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l}L_\nu+\sum_j\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right)=0,
\end{aligned}\right.$$

$$(41)\qquad \sum_\sigma \frac{\partial\psi}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_i\sum_\sigma\frac{\partial\psi}{\partial q_{\sigma,i}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i}=0;$$

d'où l'on doit conclure que les valeurs des R, Λ et L sont les solutions des équations (34), (36), (39), (40) et (41), analogues à celles dont les intégrales sont connues par le théorème de Jacobi (*Journal de Crelle,* t. 17). Le déterminant D des expressions (28) ou (29) n'étant pas égal à zéro, on peut exprimer les s variations tronquées ω_s en fonctions d'autant de variables indépendantes t_n ou t_ν, en prenant les expressions (28) ou (29) pour coefficients de ces variables, savoir

$$(42)\qquad \omega_s=\sum_n R_{s,n}t_n,$$

$$(43')\qquad \omega_\sigma=\sum_\nu R_{\sigma,\nu}t_\nu,$$

où les variables t_n ou t_ν doivent être considérées comme fonctions arbitraires de $x_1, x_2, \ldots, x_i$.

Avant de faire les substitutions de ces expressions des ω_s dans celle de $\delta^2 V$, nous démontrerons deux égalités qui nous seront nécessaires dans la transformation de $\delta^2 V$, que nous avons en vue. La première de ces égalités est

$$(44)\left\{\begin{aligned}
&\sum_\nu\sum_s\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}t_\nu\omega_s\right)\\
&+\sum_n\sum_\nu\sum_s R_{s,n}t_n t_\nu\left[\sum_k\frac{\partial N_s}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}\right)\right]\\
&+\sum_n\sum_\nu\sum_i t_n\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_\sigma\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,n}\right)R_{\sigma,\nu}\right.\\
&\qquad\left.-\sum_s\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}\right)R_{s,n}\right]=0,
\end{aligned}\right.$$

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_\nu\sum_s\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_\nu t_\nu \omega_s\right)\\ &+\sum_n\sum_\nu\sum_s R_{s,n} t_n t_\nu\left[\frac{\partial M_s}{\partial l}L_\nu - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l}L_\nu\right)\right]\\ &+\sum_n\sum_\nu\sum_i t_n\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left(\sum_\sigma \frac{\partial Q_{\sigma,i}}{dl}L_n R_{\sigma,\nu} - \sum_s \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_\nu R_{s,n}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour démontrer la formule (44), multiplions d'abord l'équation (5) par $\Lambda_{k,\nu} t_\nu$; faisons ensuite la sommation par rapport aux indices k et ν, et nous aurons

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = &\sum_\nu\sum_s\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu} t_\nu \omega_s\right)\\ &+\sum_n\sum_\nu\sum_s R_{s,n} t_n t_\nu\left[\sum_k \frac{\partial N_s}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}\right)\right]\\ &-\sum_n\sum_\nu\sum_i t_n\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_s\left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}\right) R_{s,n}\right]. \end{aligned}\right.$$

Les expressions (42) des ω_s étant substituées dans l'équation (5), il en résulte

$$\sum_s\sum_n t_n\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_s}R_{s,n} + \sum_i \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_{s,i}}\frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i}\right) + \sum_i\sum_s\sum_n \frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}R_{s,n}\frac{\partial t_n}{\partial x_i} = 0,$$

ce qui devient, en vertu de l'équation (36),

$$(47)\qquad \sum_i\sum_s\sum_n \frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}R_{s,n}\frac{\partial t_n}{\partial x_i} = 0.$$

Si, après avoir multiplié cette dernière équation par $\Lambda_{k,\nu} t_\nu$, nous faisons les sommations par rapport aux indices k et ν, nous aurons

$$\sum_i\sum_s\sum_n\sum_\nu\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}R_{s,n}\frac{\partial t_n}{\partial x_i}\Lambda_{k,\nu} t_\nu = 0,$$

ou, en remplaçant respectivement s, n, ν par σ, ν, n,

$$\sum_i\sum_n\sum_\nu t_n\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_\sigma\left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,n}\right)R_{\sigma,\nu}\right] = 0.$$

Cette équation, jointe à l'équation (46), donne l'égalité (44).

Nous déduirons de la même manière l'égalité (45) et la suivante :

$$(48)\qquad \sum_i\sum_s\sum_n \frac{\partial\omega_{s,i}}{\partial l}R_{s,n}\frac{\partial t_n}{\partial x_i} = 0.$$

Nous introduirons encore dans le calcul les expressions

$$(49)\qquad \tau_{s,i}=\sum_n R_{s,n}\frac{\partial t_n}{\partial x_i},\qquad \tau_{\sigma,j}=\sum_\nu R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j},$$

que l'on obtiendra en remplaçant, dans les expressions (42) et (43) des ω_s et ω_σ, les variables t_n, t_ν par leurs dérivées respectives $\frac{\partial t_n}{\partial x_i}$, $\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}$.

Il est évident que

$$(50)\qquad \tau_{s,i}=\frac{\partial\omega_s}{\partial x_i}-\sum_n t_n\frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i},\qquad \tau_{\sigma,j}=\frac{\partial\omega_\sigma}{\partial x_j}-\sum_\nu t_\nu\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j},$$

et les équations (42) et (43) donnent

$$t_n=\sum_\sigma\frac{\frac{\partial D}{\partial R_{\sigma,n}}}{D}\omega_\sigma,\qquad t_\nu=\sum_s\frac{\frac{\partial D}{\partial R_{\sigma,\nu}}}{D}\omega_s;$$

par conséquent

$$(51)\qquad \begin{cases} \tau_{s,i}=\dfrac{\partial\omega_s}{\partial x_i}-\sum_n\sum_\sigma\dfrac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i}\dfrac{\frac{\partial D}{\partial R_{\sigma,n}}}{D}\omega_\sigma,\\[2ex] \tau_{\sigma,j}=\dfrac{\partial\omega_\sigma}{\partial x_j}-\sum_\nu\sum_s\dfrac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\dfrac{\frac{\partial D}{\partial R_{s,\nu}}}{D}\omega_s. \end{cases}$$

Au moyen de ces formules, les équations (47) et (48) peuvent être mises sous la forme

$$(52)\qquad \sum_i\sum_s\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\tau_{s,i}=0,\quad \text{ou}\quad \sum_j\sum_\sigma\frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial\lambda_k}\tau_{\sigma,j}=0,$$

$$(53)\qquad \sum_i\sum_s\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l}\tau_{s,i}=0,\quad \text{ou}\quad \sum_j\sum_\sigma\frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial l}\tau_{\sigma,j}=0.$$

Les $\tau_{s,i}$ qui se trouvent dans les équations (53) se rapportent aux limites des intégrations; il est évident que les équations (5), et par suite les équations (52), n'ont pas d'influence sur les valeurs limites des ω_s, et par conséquent sur les $\tau_{s,i}$ qui se trouvent dans les équations (53). En effet, si nous désignons par ω'_s la partie de ω_s qui ne résulte que du changement de forme de y_s par rapport aux fonctions arbitraires α_1, α_2, ..., nous aurons

$$\omega_s=\omega'_s+\sum_\alpha\frac{\partial y_s}{\partial\alpha}\delta\alpha.$$

Or l'intégration des équations (19) et (3) donnera la forme de y_s par rapport aux fonctions arbitraires α, et cette forme ainsi déterminée restera invariable, quelles que soient les variations des valeurs limites de y_s; d'où il suit que les ω'_s, aux limites des intégrations, s'annulent, et en vertu de cela les variations tronquées ω_s, aux limites des intégrations, se réduiront à

$$\omega_s = \sum_\alpha \frac{\partial y_s}{\partial \alpha}\,\delta\alpha. \tag{54}$$

Mais ces ω_s donnés par (54) satisfont identiquement à chacune des équations (5).

4. Revenons maintenant à la transformation de la variation $\delta^2 V$.

Si nous ajoutons à la troisième intégrale de l'expression (26) l'intégrale de l'équation (44), nous aurons

$$\delta^2 V_1 = A + B, \tag{55}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} A = &\int \sum_s\sum_\sigma\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}\omega_s\,\omega_\sigma\right)dx_1\ldots dx_i\\ &+\int\sum_s\sum_\sigma\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial\omega_\sigma}{\partial x_j}\omega_s\right)dx_1\ldots dx_i\\ &+\int\sum_s\sum_\nu\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}t_\nu\omega_s\right)dx_1\ldots dx_i,\end{aligned}\right. \tag{56}$$

$$\left\{\begin{aligned} h^{(\nu)}_{s,\sigma} = &\frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}t_\nu + \sum_i\frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}}\frac{\partial(R_{\sigma,\nu}t_\nu)}{\partial x_i}\\ &-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}t_\nu\right)-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial(R_{\sigma,\nu}t_\nu)}{\partial x_j}\right],\end{aligned}\right. \tag{57}$$

$$\left\{\begin{aligned} \beta = &\sum_n\sum_\nu\sum_s\sum_\sigma h^{(\nu)}_{s,\sigma}R_{s,n}t_n\\ &+\sum_n\sum_\nu\sum_s R_{s,n}t_n t_\nu\left[\sum_k\frac{\partial N_s}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}\right)\right]\\ &+\sum_n\sum_\nu\sum_i t_n\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_\sigma\left(\sum_k\frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,n}\right)R_{\sigma,\nu}\right]\\ &-\sum_n\sum_\nu\sum_i t_n\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_s\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}\right)R_{s,n}\right],\end{aligned}\right. \tag{58}$$

$$B = \int\beta\,dx_1\ldots dx_i. \tag{59}$$

8.

De même, si nous ajoutons à la troisième intégrale de l'expression (27) l'intégrale de l'équation (45), nous aurons

$$(60)\qquad \delta^2 V_2 = A_1 + B_1,$$

où

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} A_1 = & \int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}\omega_s\,\omega_\sigma\right) dx_1 \ldots dx_l \\ & + \int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j}\omega_s\right) dx_1 \ldots dx_l \\ & + \int \sum_s \sum_\nu \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_\nu t_\nu \omega_s\right) dx_1 \ldots dx_l, \end{aligned}\right.$$

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} g_{s,\sigma}^{(\nu)} = & \frac{\partial M_s}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} t_\nu + \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial q_{\sigma,i}} \frac{\partial (R_{\sigma,\nu} t_\nu)}{\partial x_i} \\ & - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} t_\nu\right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \frac{\partial (R_{\sigma,\nu} t_\nu)}{\partial x_j}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} \beta_1 = & \sum_n \sum_\nu \sum_s \sum_\sigma g_{s,\sigma}^{(\nu)} R_{s,n} t_n \\ & + \sum_n \sum_\nu \sum_s R_{s,n} t_n t_\nu \left[\frac{\partial M_s}{\partial l} L_\nu - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_\nu\right)\right] \\ & + \sum_n \sum_\nu \sum_i t_n \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_\sigma \frac{\partial Q_{\sigma,i}}{\partial l} L_n R_{\sigma,\nu}\right] \\ & - \sum_n \sum_\nu \sum_i t_n \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_s \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_\nu R_{s,n}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(64)\qquad B_1 = \int \beta_1\, dx_1 \ldots dx_l.$$

Pour la transformation de $\delta^2 V$ que nous avons en vue, on doit faire des réductions d'abord dans l'expression (58) de β, et ensuite dans l'expression (63) de β_1.

Nous allons maintenant démontrer l'égalité suivante :

$$(65)\qquad \beta = \rho + e + f + \sum_n \sum_\nu \sum_s R_{s,n} t_n t_\nu h_{s,\nu},$$

où

$$(66)\quad \rho = \sum_n \sum_\nu \sum_i t_n \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i} \left\{\begin{aligned} & \sum_\sigma \left(\sum_s \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial y_s} R_{s,n} + \sum_k \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,n} + \sum_s \sum_j \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial p_{s,j}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_j}\right) R_{\sigma,\nu} \\ & - \sum_s \left(\sum_\sigma \frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} + \sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,\nu} + \sum_\sigma \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right) R_{s,n} \end{aligned}\right\}$$

$$c = -\sum_n \sum_\nu \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} R_{s,n} t_n\right), \tag{67}$$

$$f = \sum_n \sum_\nu \sum_s \sum_\sigma \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} R_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i}, \tag{68}$$

$h_{s,\nu}$ étant le second membre de l'équation (35). Pour établir la formule (65), observons que

$$\left\{\begin{aligned}
R_{s,n} h^{(\nu)}_{s,\sigma} &= R_{s,n} R_{\sigma,\nu} t_\nu \frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma} + \sum_i R_{s,n} \frac{\partial (R_{\sigma,\nu} t_s)}{\partial x_i} \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}} \\
&\quad - \sum_i R_{s,n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} t_\nu\right) \\
&\quad - \sum_i R_{s,n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial (R_{\sigma,\nu} t_\nu)}{\partial x_j}\right] \\
&= R_{s,n} t_\nu \left[\frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} + \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right)\right] \\
&\quad + \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}} R_{s,n} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{s,n} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i} \\
&\quad - \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i} \\
&\quad - \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\right) R_{s,n} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} \\
&\quad - \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right),
\end{aligned}\right. \tag{69}$$

et, en vertu de

$$\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} = \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial p_{s,i}},$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
&-\sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\right) R_{s,n} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} - \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right) \\
&\quad = -\sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n}\right) R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} \\
&\qquad - \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right) + \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} \\
&\quad = -\sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right) + \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial p_{s,i}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Or, les indices i, j étant les mêmes, on a

$$\sum_i\sum_j \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial p_{s,i}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} = \sum_i\sum_j \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial p_{s,j}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_j} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i};$$

par conséquent,

$$(70)\quad -\sum_i\sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\right) R_{s,n} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} - \sum_i\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right)$$

$$(71)\quad = -\sum_i\sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right) + \sum_i\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_j} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}.$$

Si, dans la formule (69), nous remplaçons l'expression (70), qui s'y trouve, par (71), nous aurons

$$\begin{aligned} R_{s,n} h^{(\nu)}_{s,\sigma} = R_{s,n} t_n \Bigg[& \frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} + \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i} \\ & - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu}\right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right)\Bigg] \\ & - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right) \\ & + \sum_i \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i} \Bigg[\left(\frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial y_s} R_{s,n} + \sum_j \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial p_{s,j}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_j}\right) R_{\sigma,\nu} \\ & \qquad - \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} + \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right) R_{s,n} \Bigg]. \end{aligned}$$

Multipliant cette dernière expression par t_n, faisant ensuite les sommations relatives aux indices s, σ, n, ν, et remplaçant

$$-\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right) t_n$$

par

$$-\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} R_{\sigma,\nu}\, t_n \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right) + \sum_i\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j},$$

nous obtiendrons l'égalité (65).

Or il est aisé de voir que ρ (66), par la substitution aux variables t_n et t_ν des fonctions de nouvelles variables, se réduit identiquement à zéro. En effet, en remettant dans le second membre de l'égalité (66), pour $R_{s,n}$, $\Lambda_{k,n}$, $R_{\sigma,\nu}$, $\Lambda_{k,\nu}$ leurs expressions (28), (29), (30), (32), l'égalité (66) prendra la forme suivante :

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned}\rho = \sum_n\sum_\nu\sum_i t_n \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\Bigg[& \sum_\sigma\sum_m\sum_\mu\left(\frac{\partial \mathrm{P}_{\sigma,i}}{\partial a_m}\,\frac{\partial y_\sigma}{\partial a_\mu}\,b_{n,m}\,b_{\nu,\mu}\right)\\ & -\sum_s\sum_m\sum_\mu\left(\frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial a_\mu}\,\frac{\partial y_s}{\partial a_m}\,b_{n,m}\,b_{\nu,\mu}\right)\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Les constantes $b_{n,\mu}$ ou $b_{\nu,m}$, parfaitement arbitraires, n'étant assujetties qu'à la condition d'être des quantités réelles et positives, on peut toujours leur attribuer des valeurs pour lesquelles le déterminant des s^2 quantités $\sqrt{b_{n,\mu}}$ ou $\sqrt{b_{\nu,m}}$ ne soit pas égal à zéro, et par conséquent on peut exprimer les variables t_n ou t_ν en fonctions d'autant de variables arbitraires et indépendantes t_μ ou t_m, en prenant les radicaux positifs $\sqrt{b_{n,\mu}}$ ou $\sqrt{b_{\nu,m}}$ pour coefficients de ces variables t_μ ou t_m, c'est-à-dire qu'on peut poser

$$(73)\qquad t_n = \sum_\mu t_\mu\sqrt{b_{n,\mu}},\quad t_\nu = \sum_m t_m\sqrt{b_{\nu,m}}.$$

En remplaçant, dans le second membre de l'égalité (72), les variables t_n et t_ν par leurs expressions (73), nous aurons

$$(74)\quad \rho = \sum_m\sum_\mu\sum_i t_\mu\frac{\partial t_m}{\partial x_i}\left\{\begin{aligned} & \sum_\sigma\sum_n\sum_\nu\left(\frac{\partial \mathrm{P}_{\sigma,i}}{\partial a_m}\,\frac{\partial y_\sigma}{\partial a_\mu}\,b_{n,m}\,b_{\nu,\mu}\sqrt{b_{n,\mu}}\sqrt{b_{\nu,m}}\right)\\ & -\sum_s\sum_n\sum_\nu\left(\frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial a_\mu}\,\frac{\partial y_s}{\partial a_m}\,b_{n,m}\,b_{\nu,\mu}\sqrt{b_{n,\mu}}\sqrt{b_{\nu,m}}\right)\end{aligned}\right\}.$$

De même, en posant

$$(75)\qquad t_\mu = \sum_n \mathrm{T}_n\sqrt{b_{n,\mu}},\quad t_m = \sum_\nu \mathrm{T}_\nu\sqrt{b_{\nu,m}},$$

et, en portant ces valeurs (75) de t_μ et t_m dans le second membre de l'égalité (74), l'expression de ρ devient

$$(76)\quad \rho = \sum_n\sum_\nu\sum_i \mathrm{T}_n\frac{\partial \mathrm{T}_\nu}{\partial x_i}\left\{\begin{aligned} & \sum_\sigma\sum_m\sum_\mu\left(\frac{\partial \mathrm{P}_{\sigma,i}}{\partial a_m}\,\frac{\partial y_\sigma}{\partial a_\mu}\,b_{n,m}\,b_{\nu,\mu}\,b_{n,\mu}\,b_{\nu,m}\right)\\ & -\sum_s\sum_m\sum_\mu\left(\frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial a_\mu}\,\frac{\partial y_s}{\partial a_m}\,b_{n,m}\,b_{\nu,\mu}\,b_{n,\mu}\,b_{\nu,m}\right)\end{aligned}\right\}.$$

En changeant, dans le terme $\sum_\sigma\sum_m\sum_\mu \frac{\partial \mathrm{P}_{\sigma,i}}{\partial a_m}\,\frac{\partial y_\sigma}{\partial a_\mu}\,b_{n,m}\,b_{\nu,\mu}\,b_{n,\mu}\,b_{\nu,m}$, les indices m, μ, σ respectivement en μ, m, s, il est évident que le second membre de l'égalité (76) sera égal à zéro, ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi les procédés que nous avons suivis dans la transformation de l'expression (58) de β montrent que cette expression se réduit à la suivante :

$$(77)\qquad \beta = c + f + \sum_n \sum_\nu \sum_s R_{s,n} h_{s,\nu} t_n t_\nu.$$

Les mêmes procédés, étant appliqués, sans aucun changement, à l'expression (63) de β_1, montreront aussi que cette expression se réduit à la suivante :

$$(78)\qquad \beta_1 = c_1 + f_1 + \sum_n \sum_\nu \sum_s R_{s,n} g_{s,\nu} t_n t_\nu,$$

où

$$(79)\qquad c_1 = -\sum_n \sum_\nu \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} R_{s,n} t_n\right),$$

$$(80)\qquad f_1 = \sum_n \sum_\nu \sum_s \sum_\sigma \sum_i \sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} R_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i},$$

$g_{s,\nu}$ étant le second membre de l'équation (38).

Or, dans l'égalité (77), le coefficient $h_{s,\nu}$ de $R_{s,n} t_n t_\nu$ étant nul en vertu de l'équation (34), il en résulte l'égalité

$$(81)\qquad \beta = c + f.$$

Si, pour abréger, nous faisons

$$(82)\qquad C = \int c\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i,$$

$$(83)\qquad F = \int f\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i,$$

$$(84)\qquad C_1 = \int c_1\, dx_2 \ldots dx_i,$$

$$(85)\qquad F_1 = \int f_1\, dx_2 \ldots dx_i,$$

$$(86)\qquad G = \int \sum_n \sum_\nu \sum_s R_{s,n} g_{s,\nu} t_n t_\nu\, dx_2 \ldots dx_i,$$

en vertu des formules (23), (55), (56), (59), (81), (82), (83), (60), (61), (64), (78), (84), (85) et (86), nous trouverons

$$(87)\qquad \delta^2 V = A + C + G + A_1 + C_1 + F + F_1.$$

Remplaçant, dans l'intégrale (82), la valeur $R_{\sigma,\nu}\dfrac{\partial t_\nu}{\partial x_j}$ par

$$\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j}-t_\nu\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j},$$

on a

$$(88)\left\{\begin{aligned}&C=\int\sum_n\sum_\nu\sum_s\sum_\sigma\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}R_{s,n}t_n t_\nu\right)dx_1\,dx_2\ldots dx_i\\&\quad-\int\sum_s\sum_\sigma\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial\omega_\sigma}{\partial x_j}\,\omega_s\right)dx_1\,dx_2\ldots dx_i.\end{aligned}\right.$$

Nous voyons que les secondes intégrales des expressions (56) A et (88) C disparaissent; d'ailleurs, si, dans la première intégrale de A (56), nous substituons la somme $\sum_\nu R_{\sigma,\nu}t_\nu$ à ω_σ, et si nous ajoutons le résultat à la première intégrale de C (88) et à la troisième de A (56), nous aurons

$$(89)\left\{\begin{aligned}A+C=\int\sum_s\sum_\nu\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Bigg[&\left(\sum_\sigma\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}\right.\\&\left.+\sum_\sigma\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right)t_\nu\,\omega_s\Bigg]dx_1\ldots dx_i.\end{aligned}\right.$$

De la même manière, nous trouverons

$$(90)\left\{\begin{aligned}A_1+C_1=\int\sum_s\sum_\nu\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Bigg[&\left(\sum_\sigma\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l}L_\nu\right.\\&\left.+\sum_\sigma\sum_j\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right)t_\nu\,\omega_s\Bigg]dx_2\ldots dx_i.\end{aligned}\right.$$

L'expression A + C (89) se réduira, au moyen de transformations connues, à deux intégrales de l'ordre $i-1$, et l'expression A_1+C_1 (90) à deux intégrales de l'ordre $i-2$. Chacune des deux intégrales obtenues pour l'expression A_1+C_1 sera égale à zéro, en vertu des équations (40); une des deux intégrales obtenues pour l'expression A + C, savoir, celle dans laquelle x_1 reçoit la valeur limite x'_1 sera seule égale à zéro, en vertu des équations (39), et l'autre, savoir celle dans laquelle x_1 reçoit la valeur limite x''_1, étant jointe à l'intégrale G (86), sera aussi égale à zéro, en vertu des équations (37); donc la formule (87) deviendra

$$(91)\qquad \delta^2V=\int f\,dx_1\,dx_2\ldots dx_i+\int f_1\,dx_2\ldots dx_i.$$

En ayant égard aux formules (68), (80) et (91), et en y remplaçant $R_{s,n}\frac{\partial t_n}{\partial x_i}$ et $R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}$ respectivement par $\tau_{s,i}$ et $\tau_{\sigma,j}$, la formule (91) deviendra

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2 V = & \int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \tau_{s,i} \tau_{\sigma,j}\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_i \\ & + \int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \tau_{s,i} \tau_{\sigma,j}\right) dx_2\, dx_3 \ldots dx_i. \end{aligned}\right.$$

On sait d'ailleurs que la discussion de la variation seconde de l'intégrale définie multiple, qui contient sous le signe $\int$ les dérivées partielles d'ordre quelconque des fonctions inconnues, peut toujours, au moyen des équations de condition, se ramener à la discussion de la variation seconde de l'intégrale définie multiple qui renferme sous le signe $\int$ les dérivées partielles du premier ordre seulement des fonctions inconnues. D'après cela, la formule (92) conduit au théorème suivant :

1° *Dans le cas où il n'y a pas d'équations de condition, telles que* (9), *qui ne se rapportent qu'aux limites des intégrations, la discussion de la variation seconde de l'intégrale définie multiple se ramènera à la discussion d'une seule partie de la variation seconde, savoir, de la partie intégrable.*

2° *Dans le cas où l'on donne des équations de condition, telles que* (9), *qui ne se rapportent qu'aux limites des intégrations, on devra discuter les deux parties de la variation seconde, savoir, la partie non intégrable et celle qui ne se rapporte qu'aux limites des intégrations, et chacune des deux fonctions qui se trouvent l'une dans la première partie et l'autre dans la seconde est l'expression différentielle entière, homogène et du second degré par rapport à des variables arbitraires.*

Pour l'élimination d'une ou de plusieurs des quantités $\tau_{s,i}$ *qui ne se rapportent qu'aux limites des intégrations, on emploiera une ou plusieurs des équations telles que l'équation* (53); *pour l'élimination des k quantités* $\tau_{s,i}$ *qui se trouvent dans la partie non intégrable, on emploiera les k équations* (52). *Cette élimination* *étant faite, la discussion de la variation* $\delta^2 V$ (92) *se ramènera, en général, à celle de deux expressions différentielles entières, homogènes et du second degré par rapport à des variables arbitraires et indépendantes entre elles* $\tau_{s,i}$.

Le théorème énoncé se rapporte à la discussion de la variation seconde de l'intégrale définie multiple qui ne renferme pas explicitement sous le signe $\int$ les dérivées partielles des valeurs limites des fonctions inconnues; mais les procédés exposés, qui servent à déduire le théorème énoncé, montrent la marche à suivre pour discuter la variation seconde de l'intégrale définie multiple qui renferme explicitement sous le signe $\int$ les dérivées partielles des valeurs limites des fonctions inconnues, et, dans ce cas sans doute, la discussion de la variation seconde se ramènera à celle de deux expressions différentielles entières, homogènes et du second degré par rapport à des variables telles que $\tau_{s,i}$.