BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 93-116

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_93_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CAYLEY (A.). — AN ELEMENTARY TREATISE ON ELLIPTIC FUNCTIONS. — Cambridge, 1876. 1 vol. in-8°, 384 p.

« Le présent Traité », dit au début de sa préface l'éminent géomètre, « est fondé sur le *Traité des fonctions elliptiques* de Legendre et sur les *Fundamenta nova* de Jacobi, ainsi que sur ses Mémoires du *Journal de Crelle* : je n'ai fait comparativement qu'un faible usage des recherches d'Abel et de celles des autres auteurs. »

Le livre de M. Cayley débute par un résumé général de la théorie des fonctions elliptiques, résumé qui va depuis la définition de ces fonctions jusqu'à la théorie de la transformation : c'est, en quelque sorte, une Table des théorèmes, qui permet au lecteur de se retrouver dans toute la théorie et de saisir le lien qui en réunit les diverses parties.

Le théorème sur l'addition remplit le Chapitre suivant : l'auteur en donne six démonstrations distinctes ; en particulier, une démonstration géométrique, due à Jacobi et fondée sur la relation différentielle qui existe entre deux arcs comptés, à partir d'un même point, sur un même cercle et terminés aux points d'intersection de ce cercle et d'une tangente mobile à un autre cercle, conduit, par une généralisation naturelle, au théorème de Landen.

Le troisième Chapitre contient des mélanges sur les arcs d'ellipse et d'hyperbole qui représentent les intégrales elliptiques ; sur la variation de ces intégrales avec l'argument et le module, sur les équations différentielles linéaires qui relient les intégrales complètes et le module, enfin sur les fonctions S introduites par Gudermann, fonctions qui ne diffèrent pas de la tangente et de la sécante hyperbolique de l'argument u et qui s'introduisent naturellement comme limites de $\sin \operatorname{am} u$ et de $\cos \operatorname{am} u$, lorsque le module tend vers l'unité.

Le quatrième Chapitre commence par le tableau des formules relatives à l'addition et à la soustraction : ces formules conduisent immédiatement à la double périodicité, si l'on connaît les valeurs des fonctions sn, cn, dn (M. Cayley emploie la notation de Gudermann) pour les valeurs o, K, $K + iK'$ de l'argument ; l'existence de la deuxième période se déduit encore des formules de transformation qui relient $\operatorname{sn}(iu, K)$, $\operatorname{cn}(iu, K')$, $\operatorname{dn}(iu, K)$ et $\operatorname{sn}(u, K')$; vient ensuite naturellement le tableau des valeurs des trois fonctions pour les valeurs de l'argument comprises dans la formule

$$u + (0, 1, 2, 3)K + (0, 1, 2, 3)iK'.$$

Un autre tableau donne les valeurs de $\operatorname{sn} nu$, $\operatorname{cn} nu$, $\operatorname{dn} nu$, pour $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$; quelques considérations générales sur le problème de la multiplication trouvent ensuite leur place, entre autres, les expressions sous formes de produits de facteurs de $\operatorname{sn} nu$, $\operatorname{cn} nu$, $\operatorname{dn} nu$, expressions qui conduisent aux produits d'un nombre infini de facteurs par lesquels on peut représenter les fonctions elliptiques.

Le cinquième Chapitre, relatif aux intégrales de seconde et de troisième espèce, $Z(u)$ et $\Pi(u, a)$, débute par les formules qui donnent $Z(u + v)$, $\Pi(u + v, a)$. L'intégrale de troisième espèce est ensuite l'objet d'une étude particulière, dont le point de départ est la relation identique

$$\frac{d\varpi}{1 + \rho\varpi^2} = \frac{d\varphi}{\Delta}\left[\frac{1}{\zeta} + \frac{A}{1 + n\sin^2\varphi} + \frac{A'}{1 + n'\sin^2\varphi} + \frac{B}{1 + m\sin^4\varphi}\right],$$

où $\varpi = \dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1 + \zeta\sin^2\varphi)\Delta}$, et où les constantes ont les valeurs convenables; on en déduit, en intégrant, la relation fondamentale

$$A\Pi n + A'\Pi n' + B\Pi m + \frac{1}{\zeta}F = \int\frac{d\varpi}{1 + \rho\varpi^2},$$

d'où se tire en particulier le théorème sur l'addition des paramètres. L'étude de l'interversion de l'argument et du paramètre termine le Chapitre.

Dans le Chapitre sixième, la fonction $\Theta(u)$ étant définie par l'égalité

$$\Theta(u) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\, e^{\int_0^u Z(u)\,du},$$

on donne les expressions des intégrales $Z(u)$, $\Pi(u, a)$ au moyen de la fonction Θ, expressions qui deviennent le point de départ de l'étude des fonctions Θ, H.

Les deux Chapitres suivants sont relatifs à la théorie de la transformation, d'après Jacobi : la théorie générale est d'abord résumée ; les calculs sont ensuite développés pour les ordres 2, 3, 5, 7 de transformation ; le problème est étudié dans sa connexion avec celui de la multiplication. L'équation modulaire, l'équation différentielle qui relie le multiplicateur au module, celle qui relie le nouveau module et l'ancien trouvent là leur place naturelle.

Le neuvième Chapitre concerne les équations aux dérivées partielles données par Jacobi, auxquelles satisfont les fonctions Θ, H, ainsi que les numérateurs et les dénominateurs dans la multiplication et la transformation des fonctions elliptiques.

La transformation d'ordre impair n est ensuite traitée dans son rapport avec la division des périodes par n. — En particulier, la formule à laquelle on est ainsi amené, et qui donne $\operatorname{sn}(nu, k)$ sous forme d'un produit fini de fractions, conduit, en remplaçant u par $\frac{u}{n}$ et en faisant n infini, à l'expression de $\operatorname{sn}(u, k)$ sous la forme d'un produit infini ; de même pour cn et dn : l'identification des produits trouvés avec les quotients de fonctions Θ qui représentent les fonctions elliptiques conduit ensuite à l'expression des fonctions Θ, décomposées en un nombre infini de facteurs.

Les Chapitres XII, XIII et XIV concernent respectivement la réduction à la forme normale de la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, la transformation du second degré pour les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce, et la moyenne arithmético-géométrique. L'intégration directe de l'équation différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$, par le procédé d'intégration bien connu, consistant dans l'identification de cette équation différentielle avec celle qu'on obtient en différentiant l'équation

$$A + 2Bx + Cx^2 = A' + 2B'y + C'y^2 = 0,$$

où A, B, C sont des fonctions du second degré de y, et A', B', C' les mêmes fonctions de x, est traitée avec des détails intéressants.

Le Chapitre XV se rapporte aux courbes dont l'arc s'exprime par une intégrale elliptique de première espèce, et le Chapitre XVI à la réduction des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{P}},$$

où

$$P = x(1-x)(1+\varkappa x)(1+\lambda x)(1-\varkappa\lambda x).$$

Enfin le seizième et dernier Chapitre contient quelques détails intéressants relatifs à la transformation linéaire, à la transformation du second ordre, à la combinaison de deux transformations qui sont toutes deux linéaires ou l'une linéaire, l'autre du second ordre ou toutes deux du second ordre.

Il ne nous appartient en aucune façon de dire l'intérêt qui, particulièrement au point de vue de l'Algèbre, s'attache au Livre de M. Cayley. J. T.

HARNACK (Axel). — UEBER DIE VERWERTHUNG DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN FÜR DIE GEOMETRIE DER CURVEN DRITTEN GRADES (¹). — ZUR THEORIE DER TERNÄREN CUBISCHEN FORMEN (²).

Dans le premier de ces deux Mémoires, M. Harnack fonde la Géométrie des courbes du troisième degré sur l'expression des coordonnées de leurs points en fonctions elliptiques d'un paramètre unique. Les éléments imaginaires d'une courbe sont représentés, d'après la méthode donnée pour la première fois par M. Klein (*Mathem. Annalen*, t. VII), par leurs *supports* (*Träger*) réels, en sorte que le domaine binaire de la courbe est remplacé par un domaine ternaire réel. De cette façon aussi, la valeur imaginaire de l'intégrale elliptique se trouve représentée par un élément réel du plan. *L'interprétation géométrique d'une relation linéaire quelconque entre deux valeurs du paramètre constitue l'essence des recherches de M. Harnack*. Elles embrassent la théorie des transformations algébriques uniformes et multiformes de la courbe en elle-même et parviennent à la solution d'un problème de Calcul intégral, lié

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX, 1875, p. 1.
(²) *Ibid.*, p. 318.

étroitement à la théorie des formes cubiques ternaires. L'étude algébrique de ce dernier problème est faite dans le second Mémoire, qui contient en même temps de nouvelles relations relatives à un système de formes cubiques ternaires.

La relation la plus simple entre deux valeurs du paramètre, relatives à deux points de la courbe, s'obtient en supposant qu'elles diffèrent d'une demi-période de l'intégrale elliptique : cette relation coïncide avec la propriété géométrique des *couples de points correspondants*. Elle donne un critérium qui permet de séparer les trois espèces de systèmes de rayons en involution, au moyen desquels on peut décrire une courbe du troisième ordre, et relie étroitement les trois espèces de *transformations quadratiques* d'une intégrale elliptique avec le passage des trois courbes tangentielles (courbes de Cayley) conjuguées à une courbe ponctuelle (courbe de Hesse) donnée.

En supposant que les deux arguments v et u relatifs à deux éléments de la courbe sont liés par la relation $v = \pm u + C$, où C est une constante arbitraire contenue dans le parallélogramme des périodes, on obtient tous les groupes de transformations algébriques uniformes de la courbe en elle-même, transformations qui se trouvent séparées en deux suites distinctes, selon que l'on choisit le signe $+$ ou le signe $-$. Par ces transformations uniformes, les éléments réels peuvent généralement être transformés en éléments imaginaires, dont les supports réels sont situés sur une courbe algébrique de sixième classe et de douzième ordre : inversement, un groupe de ces éléments imaginaires, dont les supports sont donnés par les tangentes à l'une de ces courbes, se change dans le système réel.

Les relations covariantes de ce faisceau de courbes de sixième classe avec la courbe fondamentale sont contenues dans les deux théorèmes suivants :

1° Parmi les six tangentes que l'on peut mener d'un point quelconque de la courbe du troisième ordre à l'une quelconque de ces courbes, on peut toujours en trouver quatre, telles que leur rapport anharmonique soit le même pour tous les points de la courbe fondamentale.

2° Les trois courbes des faisceaux, tangentes à une droite quelconque du plan, y déterminent trois points, tels que chacun soit, par rapport aux deux autres, conjugué harmonique de l'un des trois points où la droite rencontre la courbe fondamentale.

La première proposition permet d'obtenir, au moyen d'une élimination, l'équation algébrique du faisceau de courbes; la deuxième conduit à l'équation différentielle de ce faisceau, sous la forme d'un connexe covariant par rapport à la courbe fondamentale : cette équation s'intègre au moyen d'une élimination algébrique.

La relation entre deux points d'une courbe du troisième ordre, dont les paramètres u et v satisfont à l'équation $v = \rho u + C$, ne conduit à des courbes algébriques que si ρ est un nombre commensurable. A chaque valeur de ρ correspond un faisceau de courbes dont six touchent une droite arbitraire du plan; ces groupes de six points constituent des formes covariantes par rapport aux trois points fondamentaux où la courbe du troisième ordre coupe la droite. Les équations différentielles de tous ces faisceaux de courbes sont par suite contenues comme *connexes* dans le système de formes ternaires cubiques.

On obtient l'équation de ces connexes, dont les *coïncidences principales* (*Hauptcoincidenzen*) sont ainsi intégrées, en formant l'équation cubique par laquelle sont représentées les valeurs fondamentales des différentielles elliptiques toujours finies aux points d'intersection d'une droite et de la courbe. Cette équation embrasse tous les théorèmes qui précèdent et peut être regardée comme fondamentale dans la représentation des courbes du troisième ordre au moyen d'un paramètre.

ЖУКОВСКІЙ (Н.-Е.). — Кинематика жидкаго тѣла. — Москва, 1876 (¹).

Ce Mémoire est précédé d'une étude consciencieuse et détaillée des nombreux travaux en rapport avec le sujet que l'auteur se propose de traiter. Il espère que le rapprochement de l'Hydrodynamique avec la Cinématique des systèmes variables permettra de réaliser dans la marche de l'Hydrodynamique des progrès considérables.

(¹) JOUKOVSKY (N.-E.), *Cinématique d'un corps liquide;* 1876, 153 p. grand in-8°. (Extrait du *Математическій Сборникъ*, t. VIII, fasc. 1 et 2.)

Tous les travaux relatifs à ce sujet peuvent être divisés, d'après l'auteur, en deux catégories : 1° dans les uns on étudie le mouvement des systèmes variables les plus simples ; 2° dans les autres on se borne à des considérations générales sur le mouvement d'un corps variable d'une manière continue : ces derniers, du reste, se trouvent, dans la plupart des cas, renfermés dans les Ouvrages relatifs à l'Hydrodynamique ou à la théorie de l'élasticité.

Voici un bref aperçu historique des travaux de ces deux catégories :

En 1830, M. Chasles (1) a découvert les principales propriétés des déplacements finis d'une figure semblable à elle-même, en démontrant l'existence d'un point et d'un plan fixes. En 1860 et 1861, parurent les travaux de Dirichlet (2) et de Brioschi (3) sur le mouvement d'un ellipsoïde liquide, dans lesquels on indique certaines propriétés d'une figure variable qui se déplace de manière que ses nouvelles coordonnées soient des fonctions linéaires des anciennes.

Depuis 1861 jusqu'en 1868, Schönemann (4), Petersen (5), Durrande (6), Wiener (7), Affolter (8) publièrent une série de Mémoires sur le mouvement d'une figure plane qui reste semblable à elle-même. En 1867, Thomson et Tait publient leur *Treatise on natural Philosophy* qui contient une étude circonstanciée des déplacements finis des corps homographiques; ils appellent ainsi les figures variables, dont les nouvelles coordonnées sont des fonctions linéaires des anciennes. Dans le courant de la même année,

---

(1) Chasles, *Note sur les propriétés générales de deux corps semblables entre eux et placés d'une manière quelconque dans l'espace*, etc. (*Bulletin des Sciences mathématiques de Férussac*, année 1830).

(2) Dirichlet, *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik* (*Journal de Borchardt*, t. 58).

(3) Brioschi, *Développements relatifs aux recherches de Dirichlet* (*Journ. de Borchardt*, t. 59).

(4) Schönemann, *Ueber die Bewegung veränderlicher ebener Figuren*, etc. (*Programm des Gymnasiums zu Brandenburg für* 1861-1862).

(5) Petersen, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. V.

(6) Durrande, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VI.

(7) Wiener, *Sul moto di una figura piana che, mantenendosi simile a se stessa*, etc. (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 2e série, t. I).

(8) Affolter, *Grunert's Archiv der Mathematik*, 55. Theil.

Picart ([1]), en prenant pour point de départ les idées générales sur les systèmes homographiques, est parvenu à établir les propriétés connues du mouvement d'un système invariable. En 1871 et 1872, Durrande ([2]) a présenté à l'Académie de Paris trois études approfondies sur les vitesses et les accélérations d'un système homographique. Enfin, en 1873 et 1874, paraissent les travaux de Liguine ([3]) et de Burmester ([4]) sur le déplacement d'une figure plane collinéairement variable. En partant des notions générales sur ces figures, Liguine arrive aux figures semblables; Burmester suit une méthode inverse et des figures semblables passe aux figures homographiques et collinéaires.

Les travaux de la deuxième catégorie ont commencé à paraître simultanément avec ceux de la première. Depuis 1827 jusqu'en 1841, Cauchy ([5]) a inséré dans ses *Exercices* une série d'études sur la condensation, la dilatation et la rotation d'un point matériel d'un corps variable. En 1858, Helmholtz ([6]) publia son Mémoire *Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen*, dans lequel les idées de Cauchy sur la rotation d'un point matériel furent largement appliquées et développées en une théorie nouvelle, celle des tourbillons.

Cette théorie a servi de base à de nouveaux travaux parus en 1861, 1862, 1867 et 1868, dont les auteurs sont Hankel ([7]),

---

([1]) PICART, *Nouvelle théorie de déplacement continu d'un corps solide*. (*Nouv. Ann. de Mathématiques*, 2e série, t. VI).

([2]) DURRANDE, (*a*) *Extrait d'une théorie de déplacement d'une figure qui se déforme* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIII). — (*b*) *Propriétés générales d'une figure qui se déforme*. (*Ibid.*, t. LXXIV). — (*c*) *De l'accélération dans le déplacement d'un système de points qui reste homographique à lui-même*. (*Ibid.*, t. LXXV).

([3]) LIGUINE, *Nouv. Ann. de Mathématiques*, 1873.

([4]) BURMESTER, *Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung affinveränderlicher ebener Systeme*. (*Zeitschrift von Schlömilch*, 19. J., 6. Heft).

([5]) CAUCHY, (*a*) *Sur la condensation et la dilatation des corps solides*. (*Exercices de Mathématiques*, 2e année). — (*b*) *Sur quelques théorèmes relatifs à la condensation ou à la dilatation des corps solides*. (*Ibid.*, 3e année). — (*c*) *Sur les corps solides ou fluides dans lesquels la condensation ou la dilatation linéaire est la même en tout sens autour de chaque point*. (*Ibid.*, 4e année). — (*d*) *Mémoire sur les dilatations, les condensations et les rotations produites par un changement de forme dans un système de points matériels*. (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II).

([6]) HELMHOLTZ, *Journal de Borchardt*, t. 55.

([7]) HANKEL, *Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten*. Göttingen, 1861.

Roch (¹), Lipschitz (²), Thomson (³). Tous ces ouvrages complètent et développent les considérations analytiques dont Helmholtz s'était servi pour l'établissement de ses théorèmes de Cinématique. En 1868, Bertrand (⁴) a découvert, pour le cas d'un point matériel, le théorème des plans de direction constante, trouvé déjà, un an auparavant, par Thomson et Tait pour le cas d'un système homographique. La polémique connue entre Bertrand et Helmholtz, provoquée par quelques remarques insérées dans le Mémoire cité, a considérablement contribué à l'éclaircissement du problème de la rotation d'un point matériel. En 1870, à propos d'un problème d'Hydrodynamique, résolu par Kirchhoff, Boltzmann (⁵) publia un Mémoire dont le commencement contient une étude du mouvement sans rotation, qui serait possible dans un liquide incompressible remplissant un espace multiplement connexe. En 1871, parut le bel ouvrage de Beltrami (⁶) *Dell' Idrodinamica razionale*, dont les deux premiers Chapitres sont consacrés à la cinématique des liquides, exposée par une méthode rigoureusement analytique. Enfin la *Physique* de Kirchhoff (⁷), parue en 1874, renferme plusieurs considérations intéressantes sur le mouvement des liquides, sans compression et sans rotation. L'auteur trouve que l'Ouvrage de Beltrami ne laisse rien à désirer au point de vue de l'élaboration du sujet et de la profondeur des idées; il regrette seulement que le savant italien n'ait pas inséré dans la Cinématique le Chapitre sur les accélérations, dont l'étude géométrique peut, d'après l'auteur, éclaircir le mieux les difficiles problèmes de l'Hydrodynamique.

Dans son Mémoire, M. Joukovsky se propose de donner un

---

(1) Roch, *Anwendung der Potentialausdrücke auf die Theorie der molekular-physikalischen Fernewirkungen.* (*Journ. de Borchardt*, t. 61).

(2) Lipschitz, *Beitrag zur Theorie der linearen partialen Differentialgleichungen.* (*Ibid.*, t. 69).

(3) Thomson, *On vortex motion.* (*Trans. de la Société d'Édimbourg*, t. XXV).

(4) Bertrand, *Théorème relatif au mouvement le plus général d'un fluide.* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVI.)

(5) Boltzmann, *Ueber die Druckkräfte, welche auf Ringe wirksam sind, die in bewegte Flüssigkeit tauchen.* (*Journal de Borchardt*, t. 78.)

(6) Beltrami, *Dell' Idrodinamica razionale.* (*Memorie della Accademia di Bologna*, 3e série, t. I et II).

(7) Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik.* Leipzig, 1874.

aperçu de la théorie des vitesses et des accélérations d'un système variable, pouvant servir d'introduction à l'Hydrodynamique; de sorte que son travail offre des matériaux pour la théorie générale de la Cinématique d'un corps continu. Il est divisé en quatre Chapitres :

Dans le Chapitre I, l'auteur examine le mouvement d'un point matériel liquide, en s'appuyant sur les travaux de Cauchy, de Helmholtz, de Bertrand, de Beltrami et de Durrande. L'exposition du sujet est particulièrement remarquable, parce qu'on étudie d'abord le mouvement d'un point sans rotation et l'on examine ensuite la modification du mouvement dès que la rotation du point a lieu.

Le Chapitre II contient la théorie d'un filet infiniment mince, coïncidant avec les travaux de Kummer et de Mannheim sur les faisceaux de rayons infiniment minces; l'exposition des propriétés fondamentales des surfaces de tourbillon, et l'étude du mouvement d'un liquide incompressible dont les éléments ne sont animés d'aucun mouvement de rotation. L'auteur profite ici des travaux de Kleitz (1), de Thomson et de Haton de la Goupillière (2). Il donne en outre plusieurs démonstrations géométriques de théorèmes sur les lignes isothermes, trouvés par Haton de la Goupillière à l'aide de la théorie des quantités complexes.

Le Chapitre III, ayant pour titre *Décomposition de l'écoulement des liquides,* contient une exposition succincte des travaux de Helmholtz, de Roch, de Lipschitz, de Boltzmann et de Beltrami, relatifs au problème de la détermination des vitesses à l'intérieur d'une masse liquide, lorsqu'on connaît les vitesses à la surface, et les coefficients de la dilatation cubique et de la rotation des points à l'intérieur. L'auteur essaye ici de remplacer les analogies magnétiques et électriques par des représentations cinématiques à l'aide de deux types de mouvement, qu'il désigne sous les noms de *mouvements de tourbillon* et *d'écoulement.*

Le Chapitre IV est consacré à l'étude des accélérations. Après avoir examiné certaines propriétés des accélérations des points

(1) Kleitz, *Étude sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement, et application à l'Hydrodynamique.* Paris, 1873.

(2) Haton de la Goupillière, *Mémoire sur la théorie du potentiel cylindrique.*

liquides, indiquées par Helmholtz, Thomson et Lipschitz, l'auteur applique à leur détermination les principes exposés dans le troisième Chapitre. Cette application, indiquée, d'après l'auteur, par Lipschitz, Bobylef et Preobrajensky, conduit au résultat suivant : « Si les accélérations complètes des points d'un liquide admettent une fonction potentielle, et si l'on connaît les vitesses dans toute la masse et les valeurs de cette fonction pour les surfaces libres, les accélérations dans l'intérieur du liquide sont complétement déterminées. »

Le quatrième Chapitre se termine par une étude du mouvement permanent d'un liquide incompressible, dans l'hypothèse de l'existence de la fonction de forces. Comme cette étude contient principalement la partie originale du travail que nous analysons, nous allons en exposer brièvement les principaux résultats.

Voici les notations employées par l'auteur :

(s_1) famille de trajectoires d'un mouvement permanent;

(s_2), (s_3) deux familles de lignes tracées sur les surfaces de trajectoires, orthogonalement à (s); on admet en outre qu'au point considéré les lignes s_2 et s_3 sont mutuellement perpendiculaires;

$\frac{1}{R_p^q}$ projection de la mesure de courbure de la ligne s_p sur la tangente à la ligne s_q;

$\frac{1}{h_p^q}$ mesure de la torsion géodésique de la ligne s_p sur la surface (s_p, s_q);

$\frac{1}{k}$ et $\frac{2\pi}{H}$ deux quantités, dont la première mesure l'élargissement du filet, et la dernière sa détorsion; ces quantités sont déterminées par les formules

$$\frac{4}{k} = -\left(\frac{1}{R_2^1} + \frac{1}{R_3^1}\right), \quad \frac{4\pi}{H} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_1^3},$$

où s_2 et s_3 sont supposées mutuellement perpendiculaires;

v vitesse d'un point liquide;

p, q, r vitesses angulaires de la rotation d'un point liquide autour de la tangente à s_1 et des normales aux surfaces $(s_1 s_3)$ et $(s_1 s_2)$;

g accélération d'un point liquide;

g_1, g_2, g_3 projections de g sur les tangentes à s_1, s_2, s_3;

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ valeurs particulières de p, q, r dans le cas où les projections des vitesses sur les tangentes à s_1, s_2, s_3 seraient respectivement

$$-\frac{1}{k}, \quad \frac{1}{R_1^2}, \quad \frac{1}{R_1^3};$$

d_1, d_2, d_3 signes de différentiation dans le déplacement suivant les arcs ds_1, ds_2, ds_3.

L'étude géométrique du problème du mouvement permanent d'un liquide incompressible conduit facilement aux formules suivantes (1) et (2) :

$$(1) \qquad \frac{d_1 v}{ds_1} = -\frac{v}{k}, \quad \frac{d_2 v}{ds_2} = \frac{v}{R_1^2} - 2r, \quad \frac{d_3 v}{ds_3} = \frac{v}{R_1^3} + 2q,$$

$$(2) \qquad g_1 = -\frac{v^2}{k}, \quad g_2 = \frac{v^2}{R_1^2}, \quad g_3 = \frac{v^2}{R_1^3}.$$

Dans l'hypothèse où g admet une fonction potentielle, on tire des équations (2) trois conditions, qui, par suite de la position mutuellement orthogonale des éléments ds_1, ds_2, ds_3, peuvent se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Omega_1 + \frac{1}{R_1^3}\frac{d_2 \log v}{ds_2} - \frac{1}{R_1^2}\frac{d_3 \log v}{ds_3} = 0, \\ &\Omega_2 - \frac{1}{k}\frac{d_3 \log v}{ds_3} - \frac{1}{R_1^3}\frac{d_1 \log v}{ds_1} = 0, \\ &\Omega_3 + \frac{1}{R_1^3}\frac{d_1 \log v}{ds_1} - \frac{1}{k}\frac{d_2 \log v}{ds_2} = 0. \end{aligned} \right.$$

En combinant les équations (3) et (1), on obtient les équations

$$(4) \qquad \frac{\Omega_1}{k} + \frac{\Omega_2}{R_2^1} + \frac{\Omega_3}{R_3^1} = 0,$$

et

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d_1 \log v}{ds_1} = -\dfrac{1}{k}, \\ \dfrac{d_2 \log v}{ds} = \dfrac{1}{R_1^2} - \Omega_3 : \dfrac{1}{k}, \\ \dfrac{d_3 \log v}{ds_3} = \dfrac{1}{R_1^3} + \Omega_3 : \dfrac{1}{k}. \end{cases}$$

L'équation (4) est indépendante de v, elle limite donc le choix de la famille s. En outre, les conditions d'intégrabilité des équations (5) conduisent aux trois nouvelles conditions limitant s. L'auteur donne à ces conditions la signification cinématique suivante : lorsqu'un liquide se meut de façon que les projections des vitesses sur les tangentes à s_1, s_2, s_3 soient respectivement

$$-\frac{1}{k},\quad \frac{1}{R_1^2} - \Omega_3 : \frac{1}{k},\quad \frac{1}{R_1^3} + \Omega_2 : \frac{1}{k},$$

les molécules de ce liquide ne sont animées d'aucun mouvement de rotation.

Étant donnée une famille s, satisfaisant aux conditions énoncées, la valeur de v sera déterminée par l'intégrale de la différentielle complète

$$(6)\quad d\log v = -\frac{1}{k}ds_1 + \left(\frac{1}{R_1^2} - \Omega_3 : \frac{1}{k}\right) ds_2 + \left(\frac{1}{R_1^3} + \Omega_2 : \frac{1}{k}\right) ds_3,$$

où ds_1, ds_2, ds_3 doivent être exprimés en fonctions des coordonnées du point.

Quant aux valeurs de p, q, r, on peut les déterminer directement en fonction de v d'après les formules

$$(7)\qquad p = \frac{2\pi}{H}v,\quad q = \frac{\Omega_2 v}{2} : \frac{1}{k},\quad r = \frac{\Omega_3 v}{2} : \frac{1}{k}.$$

Dans le cas particulier où l'on a une famille de surfaces

$$\rho = \text{const.}$$

orthogonales à (s), on obtient

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{2\pi}{H} = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \dfrac{h}{2}\dfrac{d_3}{ds_3}\left(\dfrac{\Delta_2\rho}{h^2}\right), \\ \Omega_3 = \dfrac{h}{2}\dfrac{d_2}{ds_2}\left(\dfrac{\Delta_2\rho}{h^2}\right) \end{cases}$$

où h et $\Delta_2\rho$ sont le premier et le second paramètre de la fonction ρ.

On distingue dans l'hypothèse ci-dessus deux cas :

1° Si $\Omega_2 = \Omega_3 = 0$, surfaces isothermes orthogonales. Le mouvement permanent a lieu sans rotation de molécules.

2° Si Ω_2 et Ω_3 sont différents de zéro, les points liquides sont animés de mouvements de rotation autour de certaines lignes de tourbillon (6), lesquelles, d'après les formules (7), (8) et (4), sont perpendiculaires aux plans osculateurs de lignes (s). En vertu du théorème de Helmholtz relatif aux tourbillons, les lignes (6) sont situées sur les surfaces des trajectoires dont les lignes s sont, d'après ce qui a été dit plus haut, des courbes géodésiques. Ensuite, d'après les formules (5) et (8), on peut conclure que les valeurs de

$$v \quad \text{et} \quad \frac{\Delta_2 s}{h^2}$$

sont constantes pour chacune des lignes σ.

Il reste à remarquer que l'auteur exclut le cas où $\frac{1}{k} = 0$.

N. Bougaïef.

D'OVIDIO (Enrico). — Le proprietà fondamentali delle curve di second' ordine, studiate sulla equazione generale di secondo grado in coordinate cartesiane. Lezioni date nella Regia Università di Torino. — Roma-Torino-Firenze, E. Loescher, 1876. 1 vol. in-8°, 144 p.

L'auteur, en rédigeant ce travail, a eu pour but de montrer comment les méthodes classiques fondées sur l'emploi des coordonnées cartésiennes peuvent se prêter à l'introduction des procédés de l'Analyse moderne, et d'initier ainsi de bonne heure les élèves à la pratique des méthodes de la nouvelle Géométrie analytique. La discussion générale de l'équation du second degré entre deux variables est faite avec plus de symétrie qu'on n'en met ordinairement; M. d'Ovidio a pris à tâche d'y faire pénétrer systématiquement la notion des invariants, sans sortir du programme d'un cours élémentaire et du système cartésien; il a donné aussi quelques indications sur les coordonnées tangentielles.

Deux droites, formant avec les deux tangentes (réelles ou imaginaires) issues de leur point de concours un faisceau harmonique, sont dites *conjuguées* par rapport à la courbe du second degré. Par un point quelconque on peut mener, en général, un couple et un seul de droites conjuguées rectangulaires. Il existe quatre points du plan par chacun desquels on peut mener une infinité de ces couples : ce sont les *foyers* de la courbe. De cette définition l'auteur tire facilement la détermination et les propriétés des foyers, sans être obligé de particulariser la forme de l'équation.

L'Ouvrage se termine par la réduction de l'équation du second degré à des formes plus simples, et par un recueil d'exercices sur les diverses parties de la théorie.

On voit, par ces courtes indications, que l'étude de ce mince volume est une excellente préparation à la lecture des Traités développés, comme ceux de Salmon, et nous souhaitons que M. d'Ovidio y donne bientôt une suite, relative aux surfaces de second degré.

SAINT-GERMAIN (A. DE), professeur à la Faculté des Sciences de Caen, ancien maître de conférences à l'École des Hautes Études de Paris. — RECUEIL D'EXERCICES SUR LA MÉCANIQUE RATIONNELLE. — Paris, Gauthier-Villars, 1876; 1 vol. in-8°, VIII-456 p.

L'auteur s'est proposé de choisir et de développer les questions qu'il traite dans cet Ouvrage, de manière à le rendre spécialement utile aux personnes qui, possédant les éléments de l'Analyse infinitésimale, veulent faire une étude sérieuse de la Mécanique rationnelle. On a pensé qu'en présentant sur un même sujet un trop grand nombre de problèmes résolus on ne ferait qu'embarrasser le choix de l'étudiant et fatiguer son attention; on a préféré développer avec soin un plus petit nombre d'applications, pourvu qu'elles fussent assez importantes et assez variées pour aider à comprendre toutes les parties de la théorie à laquelle elles se rapportent et en montrer toute la portée. On a écarté les questions tout à fait élémentaires, aussi bien que celles qui sont trop difficiles et trop compliquées pour être de simples exercices; aussi a-t-on pu, dans un volume relativement peu étendu, consacrer un Chapitre à toutes les théories enseignées dans les cours ordinaires de Mécanique rationnelle, et l'auteur ose-t-il espérer que l'étudiant aura quelque profit à lire la plus grande partie de son Livre. D'autre part, on sait que le premier objet de celui qui veut résoudre un problème de Mécanique est de le ramener à une question d'Analyse ou, plus rarement, de Géométrie; toutefois, si le philosophe peut estimer qu'on a fait un grand pas en réduisant une question de science appliquée à une question de Mathématiques pures, ce résultat est loin de satisfaire l'esprit de celui qui s'est posé le problème. Il faut chercher à résoudre les équations obtenues, ou à les intégrer quand elles renferment des dérivées, pour se faire une idée le plus précise possible sur la valeur des inconnues du problème, sur la nature du mouvement qu'on y considère, sur la forme des courbes et des surfaces qui s'y rapportent. Les problèmes qui conduiraient à des équations trop compliquées pour qu'on y pût démêler des résultats ayant une signification mécanique ne sauraient être regardés comme résolus, et l'auteur les a proscrits de son livre; il a toujours cherché à résoudre ou à intégrer les équations qu'il obtient, et à en discuter les résultats aussi complétement que possible. Cette préoccupation, tout en rendant les solutions plus complètes au point de vue de la Mécanique, a encore l'avantage de fournir d'utiles exercices d'Analyse. Quand on arrive à des équations qu'on ne sait pas résoudre rigoureusement, à des éliminations ou à des quadratures inexécutables, on ne doit pas toujours désespérer d'obtenir des résultats nets et intéressants au point de vue de la Mécanique; de nombreux exemples mettent en évidence cette importante vérité. Ainsi il est rare qu'on puisse avantageusement résoudre les équations de degré supérieur au deuxième; mais si l'on a bien séparé les racines, si l'on a déterminé les conditions auxquelles elles sont admissibles, ne peut-on regarder ces résultats comme aussi satisfaisants que si l'on avait les valeurs explicites des inconnues, compliquées de radicaux et de transcendantes ? Une équation différentielle où les variables sont séparées peut très-bien faire connaître la loi d'un mouvement, et souvent on n'a pas à regretter de ne pouvoir effectuer l'intégration : qu'on ait, par exemple, entre le temps et la distance d'un mobile à un point fixe une relation de la forme

$$dt = x^m dx \sqrt{(x-a)(b-x)},$$

cette équation n'indique-t-elle pas un mouvement oscillatoire avec plus de clarté que son intégrale ? Enfin on trouvera plusieurs courbes dont la forme est indiquée avec précision, bien qu'on n'ait pas leur équation explicite, mais seulement la valeur des coordonnées d'un quelconque de leurs points en fonction d'un paramètre variable, qu'on s'est gardé d'éliminer, même dans les cas où l'on aurait pu le faire.

Au début de chaque Chapitre sont rappelés très-succinctement les résultats de la théorie sur lesquels on doit s'appuyer pour en faire les applications. Un petit nombre de questions de cours ont été développées quand l'auteur a cru devoir recommander pour elles un certain mode d'exposition, soit qu'il lui fût personnel, soit qu'il ne lui parût pas aussi généralement répandu qu'il mérite de l'être. Une série d'exercices proposés à la fin des Chapitres et quelques résultats énoncés sans démonstration dans les problèmes résolus fourniront au lecteur des matières suffisantes de travail, outre qu'il pourra s'exercer à résoudre lui-même les questions traitées dans l'Ouvrage.

Il n'y a pas lieu, pour un livre de problèmes, de s'inquiéter si l'étude de l'équilibre doit ou non précéder celle du mouvement, et c'est pour suivre l'ordre le plus anciennement adopté qu'on a commencé par la Statique. Il est difficile de séparer les applications qui se rapportent soit à la Cinématique, soit à la Dynamique; on a cependant essayé de donner une série assez importante et presque complétement nouvelle de problèmes relatifs à la Cinématique, qui souvent est enseignée à part; enfin on a relégué dans un dernier Chapitre les équations générales de la Mécanique : l'équation des vitesses virtuelles, le principe de d'Alembert, les équations de Lagrange et les équations canoniques; ces théories sont très-remarquables par leur généralité, mais elles fournissent des solutions moins directes que les méthodes proprement dites de la Mécanique, et sont un peu, par rapport à cette science, ce que fut la méthode de Descartes par rapport à la Géométrie : au reste, on a généralement suivi l'ordre du cours professé à la Faculté de Paris par M. Darboux. On a laissé de côté l'Hydraulique, parce qu'elle ne fait pas véritablement partie de la Mécanique rationnelle, parce qu'on lui emprunte bien rarement des sujets de composition dans les examens de l'Université française, et surtout parce qu'on ne voulait pas trop augmenter l'étendue de l'Ouvrage.

Six Chapitres sont consacrés à la Statique : le premier, relatif à l'équilibre d'un point, comprend plusieurs problèmes nouveaux qu'on a essayé de ne pas donner trop simples pour le lecteur auquel ils s'adressent. Dans le Chapitre II (composition des forces parallèles), on indique, entre autres choses, quelques applications de la Statique à la démonstration de théorèmes de Géométrie, et l'on calcule, dans une certaine hypothèse, les charges éprouvées par plusieurs appuis qui supportent une table pesante. Le Chapitre III est consacré à la recherche des centres de gravité dans des cas très-variés. Le Chapitre IV (composition des forces quelconques appliquées à un solide) renferme des théorèmes généraux sur cette question, et des exercices sur l'équilibre d'un ou plusieurs corps, avec ou sans frottement. Dans le Chapitre V (équilibre des fils), signalons un problème relatif aux ponts suspendus, où une application numérique indique la valeur des constantes introduites par l'intégration. Au Chapitre VI, on a calculé directement l'attraction de plusieurs solides; on a essayé d'établir rigoureusement et d'appliquer les propriétés fondamentales du potentiel; mais il était impossible d'aborder les théories si remarquables dont l'étude de cette fonction a enrichi la Physique mathématique.

Trois Chapitres seulement sont consacrés à la Cinématique : le Chapitre VII roule sur les propriétés du mouvement d'un point dont la trajectoire est donnée, la recherche des tangentes et des rayons de courbure, les accélérations des divers ordres, et la méthode de Roberval généralisée. Le Chapitre VIII (mouvement d'une figure dans un plan) contient des exercices sur les roulettes et, en particulier, sur celles qui résultent du roulement d'une ellipse sur une droite. Le Chapitre IX rappelle les propriétés fondamentales du mouvement des solides, et renferme un petit nombre de problèmes; mais, pour ne pas sortir du plan de l'Ouvrage et pour éviter de trop longs développements, on a dû sacrifier les intéressants théorèmes établis par MM. Chasles et Mannheim.

Les problèmes sur la Dynamique forment sept Chapitres. Dans le Chapitre X, on considère le mouvement d'un point libre, auquel peut se rattacher le mouvement d'un corps pesant sur un plan incliné dépoli; on y donne le théorème de M. Bertrand sur la force la plus générale qui peut produire un mouvement toujours périodique. Le Chapitre XI se rapporte au déplacement d'un point sur une courbe polie ou dépolie; on y apprend à déterminer la brachistochrone dans un cas très-étendu et sans le secours du calcul des variations; puis vient le mouvement d'un point sur une surface : étude complète du mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde, lignes géodésiques sur l'ellipsoïde, etc. Le Chapitre XIII traite du mouvement relatif, au point de vue cinématique et dynamique; on y trouve une démonstration remarquable du théorème de Coriolis. Le Chapitre XIV, le plus considérable du Livre, contient sur le mouvement des systèmes matériels une série de problèmes dont la solution est fournie par les principes généraux de la Dynamique : principe des forces vives, théorèmes sur le mouvement du centre de gravité, équation des aires. Le Chapitre XV commence par la recherche des moments d'inertie; on y donne ensuite des exemples du mouvement d'un solide qui a un axe fixe, un point fixe, ou enfin qui est parfaitement libre; signalons une démonstration des équations d'Euler et de M. Resal, un problème sur le mouvement d'un anneau, et quelques questions relatives aux forces instantanées. Dans le XVI^e et dernier Chapitre, on applique à un petit nombre d'exemples le théorème des vitesses virtuelles, le principe de d'Alembert, les équations de Lagrange, qui sont établies par une méthode simple; on a dû s'étendre très-peu sur la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations canoniques; mais l'auteur espère avoir donné sur ce point des renseignements dont lui sauront gré ceux qui doivent aborder ces théories difficiles.

TISSERAND (F.) — RECUEIL COMPLÉMENTAIRE D'EXERCICES SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL. — Paris, Gauthier-Villars; 1877. 1 vol. in-8°, 388 p.

Ce sont les conférences qu'il a faites pendant plusieurs années à l'École des Hautes Études de Paris qui ont donné à M. Tisserand l'occasion de réunir la collection d'exercices qu'il donne aujourd'hui au public; son livre s'ajoute ainsi à celui, d'origine semblable, qu'a publié M. A. de Saint-Germain sur la Mécanique rationnelle.

M. Tisserand donne son *Recueil* comme faisant suite à celui de M. Frenet, dont M. Gauthier-Villars a donné récemment une troisième édition : dans ces matières, l'abondance ne nuirait pas; mais, à coup sûr, les deux livres ne font pas double emploi : aucun exercice ne leur est commun, et le nouveau *Recueil* s'adresse à des lecteurs plus avancés dans l'étude des Sciences mathématiques.

Les problèmes y sont suivis de leurs solutions; l'élégance et les rigueurs de ces solutions, le soin avec lequel les discussions sont développées et achevées feraient regretter qu'il en fût autrement. L'auteur a en outre indiqué un certain nombre d'applications dont les lecteurs studieux feront leur profit.

L'Ouvrage est divisé en trois Parties relatives au *Calcul différentiel*, au *Calcul intégral*, à l'*Application du Calcul intégral à la solution de questions diverses concernant les courbes et les surfaces*.

La première Partie (de la page 1 a la page 126) contient 55 problèmes, sans compter les applications. Les problèmes numérotés de 1 à 9 concernent l'étude de la variation des fonctions et la séparation des racines de diverses équations transcendantes; notons en passant la recherche du nombre de racines imaginaires de l'équation $\tang z = hz$, d'après Cauchy (1er volume des anciens *Exercices de Mathématiques*). Les problèmes 10 à 19 sont relatifs aux dérivées n^{iemes}; puis viennent quelques exercices sur les dérivées des fonctions de plusieurs variables, sur l'application de la formule de Maclaurin, sur les maxima et minima des fonctions de plusieurs variables (20-31), sur des lieux relatifs au contact des divers ordres (32-37), sur les développées, les enveloppes, les caustiques (38-46), sur l'hélice (48-51), sur les rayons de courbure principaux de l'ellipsoïde (52-53); la démonstration de cette proposition : *Toute surface développable qui admet une seule ligne de courbure plane est un hélicoïde développable,* et la recherche des trajectoires des génératrices rectilignes d'un hélicoïde développable terminent cette première Partie.

Les problèmes 1 à 9 de la deuxième Partie concernent les intégrales définies et la recherche des valeurs moyennes de certaines fonctions : on remarquera en particulier les égalités

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{U}_m\,\mathrm{U}_n\,dx = 0\ (m \gtrless n),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{U}_n^2\,dx = 2.4.6\ldots 2n.\sqrt{\pi},$$

relatives aux polynômes U_m, U_n définis par les égalités

$$\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = e^{-x^2}\mathrm{U}_m, \quad \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = e^{-x^2}\,\mathrm{U}_n,$$

et la détermination de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}\,dx,$$

telle que M. Hermite l'a donnée dans le *Bulletin,* t. I, p. 322.

Les problèmes 10 à 18 concernent les déterminations de longueurs d'arcs, d'aires de courbes et de surfaces, de certaines intégrales, entre autres de l'intégrale $\int \frac{d\mathrm{S}}{\mathrm{P}}$ étendue à tous les points de la surface d'un ellipsoïde, $d\mathrm{S}$ désignant l'élément de surface et P la distance du plan tangent à cet élément du centre. Notons ensuite la question suivante : a, b, a', b' désignant des nombres commensurables, dans quels cas l'intégrale générale de l'équation

$$(ax + by)\,dx + (a'x + b'y)\,dy = 0$$

est-elle algébrique ? Les questions 20 à 30 sont relatives aux équations différentielles à une seule variable indépendante et particulièrement aux équations linéaires; l'auteur s'occupe ensuite de la détermination de fonctions d'après certaines conditions (31-33) : par exemple, trouver les fonctions les plus générales f et φ telles que, quels que soient x et y, on ait

$$(x^2-y^2)[f(x+y)+\varphi(x-y)]=\mathrm{F}(x)-\Phi(y),$$

F et Φ désignant de nouvelles fonctions qu'il faudra déterminer, question inspirée par la solution donnée par Jacobi du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes suivant la loi de Newton. Enfin quelques exercices sur les équations aux dérivées partielles (34-41) terminent cette seconde Partie.

Les problèmes 1 à 19 de la troisième Partie conduisent presque tous à des équations différentielles ordinaires entre deux variables; dans les énoncés figurent les rayons de courbure, les angles que les normales ou les tangentes font avec certaines directions, ou les segments qu'elles déterminent sur certaines droites, etc., les derniers concernant la recherche des trajectoires; puis viennent quelques exercices sur les roulettes (10-24), sur les courbes présentant certaines relations avec leurs développées (25-29); notons en particulier la recherche des courbes égales à leurs développées, et le problème suivant : « Trouver une courbe telle qu'un point quelconque de cette courbe, le centre de courbure de la développée ou de la développée seconde, le centre de courbure de la quatrième développée, etc., soient en ligne droite. » Les problèmes (31-34) concernent la recherche d'une courbe d'après certaines relations avec les coniques qui ont avec elle, en chacun de ces points, un contact du quatrième ordre. On trouvera ensuite (35-47) une série de questions relatives aux courbes rapportées en coordonnées polaires. Les problèmes 48 à 59 concernent les courbes dans l'espace et les surfaces, les lignes de courbure, les lignes géodésiques, asymptotiques, les trajectoires. Les exercices (62-70), qui terminent le livre de M. Tisserand, seront particulièrement remarqués : ils conduisent en général à des équations aux dérivées partielles, et touchent à la théorie des surfaces orthogonales; il convient de les citer tous.

« Montrer que la famille des surfaces $\alpha=\dfrac{xy}{z}$ fait partie d'un système triple orthogonal, et trouver les deux autres familles du système; même question :

pour les sphères $\alpha = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x}$,

pour les cônes $\alpha = \dfrac{xy}{z^2}$,

pour les surfaces $\alpha = xyz$. »

« Déterminer les fonctions $X = f(x)$, $Y = \varphi(y)$, $Z = \psi(z)$, de façon que le système de surfaces

$$\frac{X}{\rho - a} + \frac{Y}{\rho - b} + \frac{Z}{\rho - c} = 1,$$

$$\frac{X}{\mu - a} + \frac{Y}{\mu - b} + \frac{Z}{\mu - c} = 1,$$

$$\frac{X}{\nu - a} + \frac{Y}{\nu - b} + \frac{Z}{\nu - c} = 1$$

soit orthogonal. »

« Déterminer la fonction U de x, y, z, de façon que le système

$$\frac{x^2}{\rho - a} + \frac{y^2}{\rho - b} + \frac{z^2}{\rho - c} = U,$$

$$\frac{x^2}{\mu - a} + \frac{y^2}{\mu - b} + \frac{z^2}{\mu - c} = U,$$

$$\frac{x^2}{\nu - a} + \frac{y^2}{\nu - b} + \frac{z^2}{\nu - c} = U$$

soit orthogonal. »

« Déterminer les fonctions φ, ψ de façon que la famille de surfaces représentée par l'équation $\alpha = \varphi(z)\,\psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ fasse partie d'un système orthogonal; trouver deux autres familles du système. »

J. T.

SALMON (George). — LESSONS INTRODUCTORY TO THE MODERN HIGHER ALGEBRA. 3e édition. — Dublin, 1876. 1 vol. in-8°, 318 p.

Nous devons signaler la troisième édition des *Leçons d'Algèbre supérieure*, de M. Salmon, ouvrage dont les éditions antérieures sont devenues classiques et que l'éminent géomètre anglais n'a pas négligé de mettre en rapport avec les progrès récents de la Science.

LETTRES INÉDITES DE JOSEPH-LOUIS LAGRANGE A LÉONARD EULER, tirées des Archives de la Salle des conférences de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, et publiées par B. BONCOMPAGNI. — Saint-Pétersbourg. Expédition pour la confection des papiers de l'État. Atelier héliographique dirigé par G. Scamoni. MDCCCLXXVII. — 52 p. in-4.

Ce Recueil contient la reproduction photohéliographique de onze Lettres de Lagrange à Euler. Dans la première de ces Lettres, Lagrange parle de la formule de Leibnitz, à peu près dans les mêmes termes que dans la célèbre Lettre à Fagnano, postérieure de quelques jours. La seconde Lettre est très-importante pour l'histoire du Calcul des variations. La dernière est datée de Turin, le 14 juin 1762. Cette publication est un nouveau service dont l'histoire des sciences est redevable aux soins éclairés de M. le prince Boncompagni, et dont les géomètres lui seront vivement reconnaissants.