Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 7-17

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_7_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Bernhard RIEMANN's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber. Leipzig, Teubner, 1876. — 1 vol. in-8°. Prix : 16 Mk. (¹).

L'édition complète des Œuvres de Riemann, qui paraît aujourd'hui pour la première fois, se compose de trois Sections, dont la première contient les Mémoires publiés par Riemann lui-même, la deuxième les travaux déjà imprimés après sa mort dans divers Recueils, et la troisième enfin tout ce qui, dans ses manuscrits posthumes, a paru susceptible d'être livré à la publicité.

Il serait superflu de s'étendre ici sur le contenu des deux premières Sections, qui est devenu depuis un temps plus ou moins long le patrimoine des géomètres. Ces Mémoires ont été réimprimés sans aucun changement; on a seulement corrigé quelques légères inexactitudes qui sont parvenues à la connaissance de l'éditeur et

(¹) Analyse publiée par M. H. Weber dans le *Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik*, edité par MM. *Konigsberger* et *Zeuner*. Traduit de l'allemand.

qui pouvaient être regardées comme certaines. Quelques additions, rédigées d'après des remarques manuscrites de Riemann, et des éclaircissements nécessaires ont trouvé place dans des Notes finales. Parmi ces additions et ces éclaircissements, je citerai particulièrement ce qui se rapporte à la dissertation intitulée : « Fondements d'une théorie générale des fonctions d'une variable complexe », et au Mémoire « Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique ». Le seul Mémoire qui ait subi des changements un peu considérables est le Mémoire « Sur la surface d'aire minimum limitée par un contour donné », dont il n'existe aucun manuscrit complet de la main de Riemann, et dont l'éditeur, M. Hattendorff, a dû remanier la rédaction.

Le lecteur attachera plus d'intérêt à une courte Notice sur le contenu des Mémoires posthumes, publiés ici pour la première fois, et qui forment la troisième Section du volume. On sait qu'une exposition écrite et méthodique de ses recherches a toujours été pour Riemann une tâche pénible, et que ses découvertes ont été toujours fort en avance sur sa rédaction; on sait de plus que, dans les dernières années de sa vie, son état de santé lui a très-souvent interdit tout travail soutenu. Cela explique la nature de la majeure partie de ses écrits posthumes, qui ne contiennent, outre les formules, qu'extrêmement peu d'indications pour en retrouver la liaison. Ainsi beaucoup de passages, écrits sous une forme très-fragmentaire, ont dû être rétablis aussi bien qu'on a pu, et beaucoup d'autres sont encore enfouis dans les papiers, faute d'avoir pu être déchiffrés.

Passons maintenant à l'analyse des divers Mémoires de la troisième Section.

Le premier de ces Mémoires, intitulé : « Essai d'une conception générale de l'intégration et de la différentiation », est un travail du début de Riemann, au temps de ses études, et part de points de vue difficiles à admettre et que l'auteur lui-même n'a pas, sans doute, tardé à abandonner. Aussi a-t-on d'abord hésité pour savoir s'il convenait de livrer à l'impression ce travail qui, certainement, n'était pas destiné à la publicité. Mais, en l'étudiant de plus près, je me suis convaincu que les méthodes, ainsi que les résultats, présentaient un intérêt suffisant pour en justifier l'impression, toutes réserves faites, et qu'en tous cas ces recherches caractérisent la marche progressive des idées de Riemann. Pour parvenir à une définition générale des fonctions dérivées, il se sert du développement d'une fonction en une série ascendante et descendante suivant les puissances fractionnaires de la variable, développement qui est toujours divergent d'un côté ou de l'autre, et auquel Riemann attribue malgré cela une signification propre. Mais, quand ces développements ne sont employés qu'au point de vue de la forme, il n'y a pas dans ce cas grand' chose à objecter contre leur emploi ni contre les résultats qu'on en tirera, bien qu'il n'y ait plus lieu alors d'en espérer une grande fécondité. La définition de la $\nu^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction z par rapport à la variable x, à laquelle on est conduit par ces considérations, est la suivante :

$$\partial_x^\nu z = \int_k^x (x-t)^{-\nu-1} z_{(t)}\, dt + \sum_{n=\infty}^{n=1} k_n \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-n-\nu)},$$

k et k_n étant des constantes arbitraires. Cette définition s'applique d'abord au cas de ν négatif. Pour les dérivées d'indice positif ou nul, leur expression se tire du théorème

$$\frac{d^m \partial_x^\nu z}{dx^m} = \partial_x^{\nu+m} z,$$

qui s'applique à toute valeur positive et entière de m.

Cette définition a la propriété, dans le cas de ν entier, nul ou négatif, de donner, pour le $\nu^{\text{ième}}$ quotient différentiel, la fonction z elle-même ou son intégrale d'ordre $-\nu$. Le nombre des constantes est infini, sauf le cas où ν est entier. Pour ν entier et négatif, ce nombre est fini $(=-\nu)$; pour ν positif entier ou nul, toutes ces constantes disparaissent. En outre, les théorèmes fondamentaux sur les dérivées d'indice entier subsistent aussi pour ces fonctions dérivées générales.

Le Mémoire suivant : « Nouvelle théorie du résidu dans les condensateurs électriques », contient un développement et une application des idées que Riemann avait déjà esquissées dans sa Communication au Congrès des Naturalistes à Göttingue (n° II de la première Section). Ce Mémoire était, dès l'année 1854, destiné à la publication dans les *Annales de Poggendorff*; mais cette publication n'eut pas lieu, probablement parce que Riemann ne voulut pas consentir à un changement qu'on lui proposait de faire. La pensée fondamentale sur laquelle Riemann s'appuie dans la théorie des phénomènes en question est étroitement liée à ses idées sur la Philosophie naturelle, qui formaient précisément, comme nous l'apprenons par une de ses lettres, le point de départ de ses considérations. Il admet, outre les forces ordinaires d'attraction et de répulsion agissant suivant la loi de Coulomb, une autre force (antélectrique), avec laquelle la matière pondérable résiste à l'état électrique, force qui est très-faible dans les bons conducteurs, très-grande dans les corps dits *non conducteurs*, et qui se manifeste comme une résistance du corps contre l'introduction de l'électricité de tension. Les composantes de cette partie de la force électromotrice sont proportionnelles aux dérivées partielles des épaisseurs électriques, prises par rapport aux coordonnées. De ces hypothèses résulte un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre pour la détermination de la tension et de l'épaisseur, et l'intégration de ces équations dans quelques-uns des cas les plus simples fait l'objet du reste du Mémoire. Les résultats de la théorie, autant qu'une comparaison a été possible, sont en accord satisfaisant avec l'expérience.

Du troisième Mémoire de cette Section : « Deux théorèmes généraux sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques », il existe un manuscrit complétement achevé pour la première Partie, datant de l'année 1857, c'est-à-dire de la même année où a été publié le Mémoire sur les Fonctions abéliennes. Il semble exister aussi entre les deux recherches une liaison intime, sur laquelle malheureusement nous ne possédons que des indications insuffisantes. Ce Mémoire renferme une généralisation des études que l'auteur avait déjà entreprises sur la fonction F de Gauss (Mémoire IV de la première Section). Ici un système de n fonctions d'une seule variable indépendante est défini par un nombre arbitraire de points de ramification donnés et par la nature de ses valeurs dans le voisinage de ces points, et en outre par la condition que, par une révolution autour d'un point de ramification, les fonctions du système se changent en des combinaisons linéaires de ces mêmes fonctions. L'auteur y montre ensuite que, si les points de ramification, les exposants de discontinuité et les substitutions au moyen desquelles les diverses branches du système de fonctions sont reliées entre elles autour des points de ramification sont donnés arbitrairement, avec certaines restrictions commandées par la nature du problème, les n fonctions du système pourront être considérées comme des solutions particulières d'une équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre à coefficients rationnels, dans le cas où la somme des exposants de discontinuité, qui doit être un nombre entier, n'est pas plus grande que $n-1$. Si cette somme est moindre que $n-1$, il reste dans l'équation différentielle un nombre correspondant de constantes indéterminées, et ce cas peut se ramener sans intégration à celui où la somme en question atteint sa valeur limite $n-1$; on en rencontre un exemple dans le Mémoire « Sur la surface d'aire minimum limitée par un contour donné ». Bien que les équations différentielles linéaires à coefficients constants aient été, dans ces derniers temps, à plusieurs reprises, l'objet d'études approfondies, cette belle généralisation de la théorie de la série hypergéométrique n'avait encore, à ma connaissance, été établie nulle part.

Le Mémoire suivant, écrit en langue latine, contient la réponse à une question de prix proposée par l'Académie de Paris et que Riemann avait envoyée en 1861. Grâce à l'obligeance du Secrétaire perpétuel de cette Académie, la publication a pu être faite sur le manuscrit original. La question consiste à déterminer tous les cas où, dans un milieu homogène illimité, la température peut être exprimée en fonction du temps et de deux variables seulement, en sorte qu'un système de courbes isothermes conserve la propriété de l'isothermie pendant toute la durée du mouvement de la chaleur. Riemann traite le problème en cherchant d'abord d'une manière tout à fait générale les propriétés d'un milieu, même non homogène, et de l'état initial, qui satisfont à la condition exigée; puis il distingue les cas où le milieu devient homogène.

Par la première recherche, on obtient certaines formes d'une équation linéaire aux dérivées partielles à coefficients variables, et il s'agit ensuite de déterminer les cas où cette équation différentielle peut se transformer par l'introduction de nouvelles variables, de manière que ses coefficients deviennent constants et qu'elle prenne ainsi la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Ce problème peut se réduire à la question de savoir dans quels cas une expression différentielle homogène du second ordre à coefficients variables $\sum_{i,i'} h_{i,i'} ds_i ds_{i'}$ peut se réduire à la forme $\sum_i dx_i^2$, et ainsi la recherche est ramenée dans une voie que Riemann s'était déjà frayée par ses recherches sur les hypothèses de la Géométrie (Mémoire XIII de la deuxième Section). Elle se rattache à la théorie de la mesure de la courbure des *variétés* en général, théorie dont les fondements ont été posés dans le Mémoire en question. Malheureusement ces voies ne sont qu'indiquées, et à l'aide du petit nombre de feuilles manuscrites encore existantes on n'a jusqu'ici réussi qu'en partie à rétablir les calculs très-compliqués, qui sont encore nécessaires pour conduire au résultat final. Les remarques sur ce Mémoire contiennent, d'une part, des éclaircissements relatifs aux théorèmes généraux sur la mesure de la courbure invoqués par l'auteur, et d'autre part, autant qu'on a pu y parvenir, le développement des calculs inachevés.

Le fragment : *Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua* a été remanié par M. H.-A. Schwarz, de Göttingue. Pour le commencement seul, on a un manuscrit développé, écrit en langue italienne. Le reste a dû être complété à l'aide de quelques formules et de quelques figures. Riemann y étudie, par ses méthodes, la convergence du développement, établi par Gauss, du quotient de deux séries hypergéométriques sous forme de fraction continue infinie, et il parvient à ce résultat, que cette convergence a toujours lieu, excepté pour les arguments réels et plus grands que l'unité, résultat qui a été trouvé d'une autre manière par M. L.-W. Thomé (*Journal de Borchardt*, t. 67).

Le petit article : « Sur le potentiel d'un anneau » a pour objet le problème de l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

dans l'hypothèse où la fonction V est donnée sur la surface d'un anneau engendré par la révolution d'un cercle autour d'un axe ne coupant pas la circonférence. Après avoir donné quelques aperçus généraux sur les séries qui se rencontrent dans l'intégration de cette équation différentielle, l'auteur introduit d'abord les variables appropriées au cas actuel et rendant la séparation possible; puis il effectue l'intégration au moyen d'une classe particulière de séries hypergéométriques, qui peuvent s'exprimer à l'aide d'intégrales elliptiques complètes. Le même problème a été, comme on sait, l'objet d'une étude approfondie de M. C. Neumann, indépendante de celle de Riemann.

Le Mémoire suivant : « Équilibre de l'électricité sur des cylindres de section droite circulaire et d'axes parallèles » a été rédigé d'après quelques notes qui semblent avoir été écrites pour la préparation d'une leçon. Ce Mémoire est particulièrement intéressant en ce qu'on y reconnaît l'ingénieuse méthode dont Riemann se servait pour la solution des problèmes de représentation, et qui est toujours applicable quand l'aire à représenter est limitée par des droites ou par des arcs de cercle, que cette aire soit simplement ou multiplement connexe. En outre, ce petit fragment facilite beaucoup l'intelligence du Mémoire « Sur la surface d'aire minimum limitée par un contour donné ».

Au Mémoire, cité en dernier lieu, « Sur la surface d'aire minimum », nous avons pu restituer, d'après quelques indications trouvées dans les manuscrits, deux beaux exemples, dont le premier est relatif à la surface minimum limitée par trois droites dont l'une coupe les deux autres, et le second à la surface minimum (doublement connexe) limitée par deux polygones rectilignes situés dans deux plans parallèles. Dans ce dernier cas, le problème est généralement réductible aux quadratures et n'exige pas l'intégration d'équations différentielles linéaires.

Dans le numéro suivant, nous avons réuni deux fragments traitant la question de savoir ce que deviennent les séries établies par Jacobi dans la théorie des fonctions elliptiques, lorsque le module de la quantité que Jacobi a désignée par q converge vers l'unité. Dans le premier de ces fragments, l'auteur examine à ce point de vue les séries établies au § 40 des *Fundamenta*, et, comme ces séries cessent, pour la plupart, de converger dans le cas limite, il les soumet d'abord à une intégration. Si, dans les séries ainsi obtenues, on passe à la limite, il en résulte des fonctions qui, dans tout intervalle aussi petit que l'on voudra, ont une infinité de solutions de continuité. Il semble que le but principal de cette étude ait été de trouver des exemples de pareilles fonctions pour le Mémoire « Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique » (Mémoire XII de la deuxième Section). Le second fragment est consacré à l'étude, au même point de vue, des séries elles-mêmes qui expriment $\log k$, $\log k'$, $\log \frac{2K}{\pi}$, sans intégration préalable. On y reconnaît que, si le rapport des périodes des fonctions elliptiques tend vers une valeur réelle rationnelle, les parties imaginaires de ces séries tendront vers des valeurs limites finies et déterminées, tandis que, des parties réelles, les unes s'annuleront, les autres deviendront infinies d'une manière déterminée. Cette étude s'est trouvée dans les manuscrits de Riemann, écrite sur une feuille de papier à peine lisible, dont l'importance n'a été reconnue que peu de temps avant l'impression. Il ne nous restait donc plus le temps nécessaire pour vérifier exactement la correction des formules dans les parties réelles. Un commentaire sur ce fragment, par M. R. Dedekind, traite la question par une autre méthode rigoureuse, et donne les formules finales sous une forme différente de celle de Riemann. Il semble que les formules de Riemann, pour les parties réelles (qui deviennent infinies), ne soient pas toutes exactes, tandis que les parties imaginaires sont irréprochables. Le commentaire en question renferme en outre une intéressante application de la méthode appliquée par Riemann à la théorie des formes en nombre infini de la fonction Θ.

Le court fragment sur l'Analyse de situation, qui vient ensuite, ne contient malheureusement que quelques définitions de concepts et un petit nombre d'indications sur ces profondes et importantes recherches ayant pour but une généralisation de la théorie de la connexion, que Riemann a prise pour point de départ de ses considérations sur la théorie des fonctions. Une partie seulement des concepts et des théorèmes établis ici permet encore une intuition dans l'espace à trois dimensions, tandis que les autres doivent être entendus à un point de vue complétement abstrait. Relativement aux *variétés* à plusieurs dimensions, il établit une définition qui est encore intuitive dans les espaces limités :

Si, à l'intérieur d'une variété étendue d'une manière continue, toute variété de n dimensions est limitante à l'aide de m segments de variétés de n dimensions, fixes et non limitants par *eux-mêmes, cette variété a une connexité* $(m+1)$*-uple de* $n^{\text{ième}}$ *dimension. Une variété étendue d'une manière continue est dite simplement connexe, lorsque la connexité de chaque dimension est simple.*

Plus loin, cette définition est encore énoncée autrement, et l'auteur y rattache quelques conséquences relatives au partage des variétés au moyen de sections transverses. Ainsi, par exemple, l'espace d'une sphère est simplement connexe, celui d'une sphère creuse est simplement connexe dans la première dimension, doublement connexe dans la seconde, parce que toute ligne fermée dans l'intérieur de la sphère creuse forme la limite d'une surface s'étendant dans l'intérieur de la sphère, tandis que ce n'est qu'après l'introduction d'une surface fermée déterminée dans cet intérieur que toute autre surface de cette nature forme la limitation complète d'une portion d'espace intérieure. Au contraire, l'espace limité par une surface annulaire est simplement connexe dans la sconde dimension, doublement connexe dans la première. La sphère creuse est transformée en espace simplement connexe par une section transverse d'une seule dimension; l'espace annulaire l'est par une section transverse de deux dimensions. Une section transverse d'une dimension transforme l'espace annulaire en un espace triplement connexe dans la première dimension. Cela pour l'éclaircissement de ce théorème général :

La connexité d'une variété de n dimensions, par toute section transverse simplement connexe formée par une variété de $n-m$ *dimensions, est abaissée d'une unité dans la* $m^{\text{ième}}$ *dimension ou élevée d'une unité dans la* $(m-1)^{\text{ième}}$ *dimension.*

Les deux Mémoires suivants sont extraits d'un cours sur les fonctions abéliennes, professé par Riemann dans les années 1861 et 1862; la rédaction a été faite d'après un cahier de G. Roch. Le premier de ces Mémoires contient une démonstration très-élégante de la convergence des séries thêta p fois infinies, fondée sur un théorème général par lequel l'étude de la convergence d'une série infinie à termes positifs est ramenée à l'étude de la convergence d'une intégrale définie.

Le second Mémoire traite des fonctions que Riemann a désignées sous le nom de *fonctions abéliennes* pour le cas de $p=3$. Ce sont les racines carrées de fonctions φ (*voir* « Théorie des fonctions abéliennes », VI[e] Mémoire de la première Section), telles qu'elles deviennent en $p-1$ points infiniment petites du second ordre, et qui généralement existent en nombre fini. Dans le cas de $p=3$, ce nombre est égal à 28, correspondant aux vingt-huit fonctions thêta impaires (et, géométriquement, correspondant aux vingt-huit tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre). La détermination de ces fonctions dépend d'une équation du vingt-huitième degré; mais, si l'on regarde six d'entre elles comme connues, les autres peuvent se déterminer au moyen d'une équation du quatrième degré. La corrélation de ces fonctions avec les fonctions thêta impaires est d'une importance toute spéciale pour la théorie de l'inversion des intégrales algébriques, et ce problème est l'objet principal du Mémoire en question.

Dans un Appendice, on a rassemblé les fragments qui se rapportent aux spéculations philosophiques de Riemann. Ces recherches ont préoccupé Riemann pendant une grande partie de sa vie, et il leur a consacré une portion considérable de ses méditations. Ce serait ici d'autant moins le lieu d'entrer dans les détails de cette intuition originale et profonde de l'univers, que la rédaction déjà extrêmement serrée et pleine de lacunes ne permettrait guère d'en faire un extrait abrégé, sans encourir le risque de se faire mal comprendre. Tout ce que nous pouvons en dire, c'est que, dans ses recherches sur la Philosophie naturelle, le but principal de Riemann est d'écarter la conception d'une action à distance et de la remplacer par une autre, d'après laquelle la matière n'agirait que sur son voisinage immédiat. Ce but est atteint par l'hypothèse d'une substance remplissant l'espace d'une manière continue et qui serait le siége de la force de gravitation, du mouvement lumineux et thermique, et des actions électriques, mais qui serait essentiellement différente de la matière pondérable. Les atomes corporels sont, d'après la conception de Riemann, des points dans lesquels cette substance hypothétique afflue continuellement et disparaît du monde des phénomènes. La cause de l'action des atomes corporels les uns sur les autres, il la cherche dans la résistance qu'oppose cette substance à un changement de forme.

Le Volume se termine par un tableau, tracé par M. Dedekind, de la vie de Riemann. Cette esquisse biographique, tirée principalement de lettres et d'autres communications de la famille, n'a pas pour but de faire valoir la position et l'importance scientifiques de Riemann; elle offrira à ses admirateurs et à ses amis une image de l'existence et de la personnalité de cet homme si distingué à tous les titres et si prématurément enlevé. C'est l'image d'une vie de savant, calme, simple, soumise bien des fois à la dure étreinte de la fortune adverse, mais admirablement armée par la nature pour fouiller les profondeurs de la Science, et remplie de la plus pure et de la plus sincère ardeur de connaître la vérité.