BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 361-376

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_361_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

REULEAUX (F.). — CINÉMATIQUE. PRINCIPES FONDAMENTAUX D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE DES MACHINES. Traduit de l'allemand par A. DEBIZE. 1 vol. in-8°, avec Atlas de 8 pl. 651 p. Paris, 1877.

Le Livre de M. Reuleaux a une portée philosophique exceptionnelle : on pourrait y louer la richesse des détails techniques, l'élégance des démonstrations et des constructions géométriques; mais, sous ce rapport, on ne pouvait pas moins attendre de l'auteur. Nous ne nous arrêterons pas, d'ailleurs, à analyser la partie technique de l'Ouvrage; nous laisserons de côté les nombreux mécanismes qui y sont décrits et qui viennent, en quelque sorte, *illustrer* les idées de l'auteur; nous passerons aussi sous silence la partie géométrique où se trouvent traitées rapidement la théorie du mouvement d'un corps solide et diverses questions appartenant à la *Cinématique pure*, comme on dit quelquefois en France, à la *Phoronomie*, pour conserver le langage de M. Reuleaux. Quant à la critique des idées de M. Reuleaux (si justes qu'elles nous paraissent) sur le rôle de la machine, au point de vue social, sur les questions, parfois brûlantes, qu'a fait naître le développement de l'industrie, elle sortirait du cadre du *Bulletin*. Mais nous voudrions appeler l'attention sur deux conceptions fondamentales, qui appartiennent en propre à M. Reuleaux, qui permettent de pénétrer plus avant qu'on ne l'avait fait dans la nature intime des machines et de les classer d'une façon plus scientifique. La tentative hardie faite par M. Reuleaux pour désigner les mécanismes au moyen de formules condensées, le système de notations abstraites qu'il propose, système dont l'avenir jugera la valeur pratique, mais qui, à coup sûr, met en évidence des relations étroites entre certains mécanismes dont la différence de forme cachait la parenté, ne doivent pas non plus être négligés.

Chaque élément d'une machine est assujetti à ne prendre qu'un mouvement déterminé : le mouvement d'un élément commande, en quelque sorte, le mouvement de tous les autres; pour parler le langage de la Mécanique rationnelle, une machine est un système à liaisons complètes : c'est généralement en vertu de la nature rigide des éléments que ces liaisons peuvent être réalisées; écartons, pour le moment, les autres cas sur lesquels nous reviendrons plus tard brièvement.

Concevons donc un corps solide que, pour fixer les idées, nous regarderons comme plein : comment l'obligerons-nous à se mouvoir d'une façon déterminée?

Imaginons qu'on réalise ce mouvement et que l'on détermine la surface enveloppe des diverses positions de la surface du corps, ou plutôt (s'il y a lieu de distinguer) une portion de cette surface enveloppe, celle qu'on obtiendrait en faisant mouvoir le corps solide dans un milieu malléable, qui ne se déformerait plus après le passage du corps; regardons maintenant la surface enveloppe ainsi obtenue comme la surface intérieure d'un corps solide creux; solidifions, si l'on veut, le milieu malléable dont nous venons de parler, après le passage du corps; il est clair que, en général, le mouvement de notre corps solide dans le canal creux que nous venons de définir sera déterminé; ce sera le mouvement que l'on a supposé *a priori*. Inversement, si l'on fixe le corps plein, le mouvement du corps creux, glissant autour de lui, sera en général déterminé. C'est donc au moyen de *deux* corps solides, dont l'un est la forme enveloppe de l'autre qu'on parvient, en fixant l'un d'eux, à obliger l'autre à ne prendre qu'un mouvement déterminé. Plus généralement, on peut dire que le mouvement relatif de l'un des éléments par rapport à l'autre est déterminé, le mouvement relatif devenant le mouvement absolu, si le second élément est rendu fixe. « *Les machines se composent précisément de corps accouplés ainsi deux à deux;* ces corps constituent les véritables *éléments cinématiques* des machines. Comme exemples de *couples* d'éléments de ce genre, on peut citer le tourillon et le coussinet, la vis et l'écrou, etc. Les éléments cinématiques ne se rencontrent jamais isolés dans les machines, et sont toujours accouplés; la machine ne se compose pas d'éléments isolés, mais de *couples d'éléments*. Cette particularité de la composition de la machine est fondamentale et permet de la distinguer très-nettement de tous les autres objets qui peuvent être considérés comme formant un tout. »

L'étude des couples d'éléments tels, que l'un d'eux contraigne l'autre, lorsqu'il y a mouvement, à décrire, par ses différents points, des trajectoires déterminées, formera donc une partie importante du Livre de M. Reuleaux. Une première classe, la plus simple, est constituée par les *couples d'emboîtement*, dont l'un, au lieu d'envelopper simplement l'autre, l'emboîte complétement, se trouve en être la forme en creux. Les deux corps qui constituent un tel couple coïncident complétement sur toute l'étendue des surfaces en contact, de telle sorte qu'il est possible de tracer sur ces surfaces une infinité de courbes qui se recouvrent entièrement deux à deux; parmi ces courbes, il convient de distinguer celles qui se trouvent avoir précisément la direction suivant laquelle se produit le seul mouvement possible, et qui, par cela même, doivent glisser l'une sur l'autre, et sont par conséquent des hélices, ou, comme cas particulier, des cercles ou des droites. Les vis ordinaires, avec leurs écrous, deux corps de révolution, ou deux prismes s'emboîtant l'un dans l'autre constituent les trois seuls couples d'emboîtement qui existent. Une propriété fondamentale de ces couples, évidente d'ailleurs, consiste en ce que, par la permutation de l'élément fixe avec l'élément mobile, en d'autres termes par l'*inversion du couple,* il ne se produit aucune modification dans le mouvement absolu engendré.

Dans un couple, toute la surface de l'un des corps n'est pas nécessaire pour guider l'autre : il suffit d'en réaliser une partie et de supprimer le reste; il y a donc lieu d'étudier avec soin la partie qu'il faut conserver pour déterminer le mouvement; c'est ce que fait M. Reuleaux dans plusieurs paragraphes consacrés aux *appuis contre la translation et contre la rotation*. Cette étude le conduit à s'occuper de divers couples intéressants au point de vue géométrique : le plus simple dérive d'une figure biconvexe, formée de deux arcs de cercle égaux, inscrite dans un triangle équilatéral; cette figure, en se déplaçant dans le triangle de manière à rester enveloppée par lui, prend un mouvement bien connu. Enfin la recherche générale des profils d'éléments pour une loi de mouvement donnée, et en particulier des profils d'engrenage, termine le Chapitre spécialement consacré aux *couples*.

Un couple n'est pas toujours *fermé* par lui-même, c'est-à-dire que les surfaces en contact qui permettent au mouvement que l'on veut obtenir de se produire permettraient aussi d'autres mouvements; mais la nature des forces qui entrent en jeu dans la machine peut interdire ces derniers mouvements : on dit alors que le couple est *fermé par clôture de force*. On en trouvera un exemple simple dans les tourillons et les supports de la plupart des roues hydrauliques : le poids considérable de la roue est presque toujours suffisant pour empêcher que le tourillon ne se soulève verticalement et ne se sépare de son support dépourvu de chapeau. On devra évidemment faire rentrer dans cette catégorie les couples dont l'un des éléments est ductile, que cet élément soit, par exemple, une courroie ou un fluide, les forces qui agissent sur ces éléments devant agir d'une façon déterminée, par traction dans le premier cas, par compression dans le second. Enfin la *clôture* des couples peut s'obtenir par *chaîne cinématique* et résulter de la liaison de leurs éléments avec les éléments d'autres couples; mais, sans nous arrêter davantage à ce mode de clôture, dont les roues d'engrenage fournissent un exemple simple, il convient maintenant d'insister sur cette autre notion fondamentale, la *chaîne cinématique*, introduite par M. Reuleaux dans la science des machines.

Considérons deux couples ab, cd; imaginons qu'on relie l'élément a du premier couple à l'élément c du second; relions de même les deux seconds éléments b et d, on obtiendra ainsi un nouveau couple formé de deux éléments rigides $a - b$ d'une part, $c - d$ de l'autre; il est clair qu'en général le nouveau couple ainsi obtenu sera différent des deux premiers, c'est-à-dire que le mouvement relatif que l'élément $c - d$ peut prendre par rapport à l'élément $a - b$ sera, par exemple, différent du mouvement relatif que l'élément b peut prendre par rapport à l'élément a.

Allons maintenant plus loin, et procédons à la liaison de trois ou quatre couples d'éléments : soient donnés les quatre couples ab, cd, ef, gh; relions b à c, d à e, f à g, h à a, de façon à former une sorte de *chaîne* retournant sur elle-même, chaîne dont chaque membre sera l'ensemble solide de deux éléments de deux couples consécutifs; l'ordre dans lequel on les réunit peut d'ailleurs être différent de celui que nous avons supposé, pourvu que la chaîne se ferme; M. Reuleaux donne le nom de *chaîne cinématique* au corps ainsi formé. A peine est-il utile de dire qu'une chaîne cinématique peut être composée d'un nombre quelconque d'éléments. Toute obscurité disparaîtra dans cette conception abstraite en l'appliquant à un cas particulier, en regardant, par exemple, a, d, e, h comme des tourillons parallèles et b, c, f, g comme des douilles enveloppant respectivement ces tourillons; on obtiendra ainsi une chaîne cinématique des plus simples, conduisant à une série de mécanismes que M. Reuleaux étudie en détail.

« Dans une chaîne, deux membres consécutifs ont un mouvement relatif déterminé, lequel est précisément celui du couple qui les relie; mais deux membres qui se trouvent séparés par un troisième ne possèdent pas nécessairement, l'un par rapport à l'autre, des mouvements relatifs déterminés. De tels mouvements se produisent seulement dans les chaînes constituées de telle manière que *tout changement de position d'un membre, par rapport à celui qui le suit immédiatement, entraine un changement de position de tous les autres membres par rapport au premier.*

» Dans une chaîne cinématique jouissant de cette propriété, un membre quelconque ne possède qu'un seul mouvement relatif par rapport à chacun des autres; par conséquent, lorsqu'on produit dans la chaîne un mouvement relatif, tous les membres se trouvent *astreints* à accomplir des mouvements relatifs déterminés. Une semblable chaîne cinématique, à *mouvements forcés,* constitue ce que nous appellerons une *chaîne fermée desmodromique,* ou, plus simplement, une *chaîne fermée.* »

Si maintenant on rend fixe un des membres d'une chaîne cinématique fermée, on obtiendra un *mécanisme :* une chaîne fermée peut donc être transformée en mécanisme d'autant de manières différentes qu'elle renferme de membres.

Enfin « un mécanisme entre en mouvement lorsque l'un de ses membres mobiles vient à être sollicité par une force mécanique susceptible de le faire changer de position. *La force accomplit, dans ce cas, un travail mécanique qui se produit avec des mouvements déterminés ; l'ensemble constitue alors une machine.*

« D'après les considérations qui précèdent, la machine se compose d'un ou de plusieurs mécanismes, dont chacun peut se ramener à une chaîne cinématique formée elle-même de couples d'éléments. Cette *décomposition* constitue l'*analyse* de la machine, c'est-à-dire la détermination de son contenu cinématique en mécanismes, chaînes et couples d'éléments. L'opération inverse, la *synthèse,* consiste dans la recherche des éléments cinématiques, chaînes et mécanismes, dont on doit composer une machine pour obtenir un effet déterminé. »

Nous ne suivrons pas M. Reuleaux dans l'application de ses idées à l'analyse des mécanismes particuliers, ni dans l'histoire qu'il trace du développement des machines; nous voulons nous borner à exposer rapidement les critiques qu'il dirige avec raison contre les idées généralement reçues depuis Poncelet, dans la classification des organes d'une machine complète, et la façon dont lui-même entend cette classification.

On est habitué, dans une machine, à distinguer trois parties : le *récepteur*, la *transmission* et l'*opérateur* ou *outil*. Les parties à classer sous le récepteur sont généralement considérées comme constituant, par elles-mêmes, un groupe spécial qu'on peut comprendre sous le nom de *machines motrices* ou de *moteurs*. Par une limitation analogue on peut former un groupe de machines dans lesquelles toutes les parties se relient plus ou moins à l'opérateur, pour le mettre dans les meilleures conditions d'emploi; ce groupe est celui des *machines-outils* (tour, machine à raboter, etc.). Dans l'ancienne classification, les machines comprises dans l'un ou l'autre de ces groupes, machines qui peuvent travailler dans une même usine, où un seul moteur peut mettre en mouvement un nombre considérable de machines-outils, ne seraient point des machines complètes, puisque les premières, le plus souvent, ne comportent pas d'outils; les secondes, de moteur. Or cela semble en contradiction avec le langage ordinaire.

En outre si, par exemple, nous « considérons un métier à filer, dans lequel le fil effectue, pour s'étendre, se tordre, se dérouler, etc., une série de mouvements qu'il ne pourrait pas exécuter s'il ne fonctionnait pas lui-même comme organe de transmission de mouvement, dans ce cas, le fil doit-il être considéré seulement comme corps à travailler, ou comme *communicateur*, ou comme *outil?* Où commence et où finit chacun de ces trois rôles? Des incertitudes de même genre existent dans toutes les machines analogues. »

Occupons-nous en particulier de chacune des trois parties énumérées plus haut, en commençant par l'*outil*, sur lequel d'ailleurs nous nous étendrons davantage. On remarquera d'abord que cet *outil* est impossible à déterminer dans toutes les machines qui servent à effectuer des déplacements ou des transports. Où est l'outil d'une locomotive? Ce sont, dit-on, les crochets qui servent à l'accrocher au tender; mais, s'il n'y a pas de tender, la locomotive portant avec elle son charbon, et, si l'on veut, des marchandises ou des voyageurs, placés dans un bâti approprié, faisant corps avec elle? Ainsi constituée, en travaillera-t-elle moins? Mieux encore, l'outil d'un bateau à vapeur? « *L'outil n'est donc pas un élément essentiel de la machine, mais seulement un élément éventuel, et sa notion ne peut pas servir de base pour la compréhension de la machine complète* ». L'outil n'existe que dans les machines qui servent à effectuer des changements de forme, dans les « *machines de transformation* ». Tels sont : le tour, la machine à raboter, la scie à rubans, les laminoirs, les moulins; là, évidemment, le ciseau, le burin, la scie, les cylindres qui font avancer la pièce métallique à travailler en même temps qu'ils en modifient la forme; les meules, qui réduisent les grains en poudre et conduisent à leur périphérie la farine produite, sont des *outils*, dans le sens ordinaire du mot. Encore voit-on que la distinction que nous venons d'établir entre les diverses sortes de machines n'est pas absolue : dans notre dernier exemple, dans le moulin, la transformation et le transport se trouvent avoir sensiblement une égale importance; en général, le défaut d'une limite précise entre les deux classes tient à ce que plusieurs transformations se trouvent nécessairement liées à un changement de position. Quelle est maintenant la signification cinématique de l'outil dans les machines où il existe? Commençons par examiner le mode d'action de l'outil dans une machine déterminée. « Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de tourner une barre de fer cylindrique sur un tour parallèle ordinaire. Le ciseau, serré dans les mâchoires du support, possède un mouvement de translation, parallèle à l'axe du tour, tandis que la pièce à tourner possède le même mouvement de rotation que l'arbre de ce tour, sur lequel elle est fixée, mouvement qui a pour résultat d'amener contre le tranchant de l'outil les parties du contour de la pièce qui se trouvent en regard de cet outil. Le mouvement relatif du ciseau, par rapport à la barre, est un mouvement hélicoïdal, comme si l'outil était une portion d'un écrou ordinaire, dont la barre à tourner serait le filet correspondant. Ce couple n'existe pas d'ailleurs au commencement du travail; mais, comme le ciseau est formé d'une matière plus dure que la pièce à tourner, il enlève, dans son mouvement progressif, les petites parties du contour de la barre qui se trouvent en dehors de la surface d'emboîtement qu'il décrit par rapport à cette barre. » Cette dernière prend ainsi peu à peu la forme conjuguée de la forme écrou que le couteau possède dès le début de l'opération. Cela est visible dans l'opération du dégrossissement, pour laquelle on donne au tranchant de l'outil la forme d'une pointe. « Dans la seconde passe, destinée à terminer la pièce, le ciseau a comme profil une portion de ligne droite, parallèle à l'axe, de telle sorte que le corps tourné finit par présenter la forme d'un cylindre; mais, au point de vue de son accouplement avec le ciseau, il n'en doit pas moins être considéré comme un filet de vis. » L'analyse d'autres outils conduirait à des résultats analogues; on voit déjà, sur l'exemple précédent, apparaître la conclusion de M. Reuleaux, conclusion qu'il formule dans la loi suivante: *Dans les machines de transformation, la pièce d'œuvre se présente comme une partie d'un membre de chaîne ou comme un membre complet; elle forme, avec l'outil, un accouplement ou un enchaînement cinématique, dans lequel, en raison de la disposition donnée à la matière constituant cet outil, sa forme primitive se trouve remplacée par la forme enveloppe correspondant à ce mode de liaison.*

Remarquons enfin qu'entre les deux grandes classes dans lesquelles nous avons divisé les machines, il existe, relativement à la pièce d'œuvre, un point commun véritablement essentiel. S'il n'y a pas, à proprement parler, d'outil dans les machines de déplacement, dans un bateau à vapeur par exemple, c'est que la pièce d'œuvre (les corps à transporter) fait corps avec la machine; dans les machines de transformation, nous trouvons de même que le corps à transformer doit, lui aussi, être regardé comme faisant partie de la machine complète, machine pour laquelle il tend, dans l'exemple que nous avons analysé, à constituer l'élément d'un couple dont l'outil était l'élément conjugué.

Le *récepteur* est, de la part de M. Reuleaux, l'objet de critiques tout aussi fortes. Pas plus que l'outil, il ne peut, dans un grand nombre de cas, être séparé de la machine complète; mais toujours on aperçoit distinctement que la pièce par laquelle se fait l'introduction de l'effet moteur figure dans la chaîne cinématique qui constitue la machine. Dans la roue hydraulique, par exemple, « les palettes forment avec l'eau un accouplement cinématique, pendant que l'eau, d'un autre côté, se trouve accouplée avec le coursier et la conduite d'amenée ».

Enfin le *communicateur*, pas plus que les autres éléments, « n'est susceptible d'être isolé partout, bien qu'il existe quelques exemples où la transmission pure et simple du mouvement se trouve nettement indiquée comme l'unique fonction d'un groupe d'organes assez complexe. Tous les membres de la chaîne cinématique servent à transmettre un plus ou moins grand nombre d'efforts, d'un point à un autre de la machine; *tous* peuvent être considérés comme des communicateurs entre la force motrice et les résistances.

» Ce qui ressort comme conclusion de toutes nos investigations, ce qui émerge comme principe fondamental de toutes les conceptions, assez obscures, que nous avons examinées, c'est que la *machine complète est une chaîne cinématique fermée.* Le corps moteur et le corps à travailler sont tous les deux des membres ou, au moins, des éléments cinématiques de cette chaîne. Les lois suivant lesquelles le *moteur* accomplit ses mouvements dans la machine sont, en substance, les mêmes que celles auxquelles obéissent la pièce d'œuvre et l'outil, lorsqu'il existe : elles sont, en définitive, les mêmes que celles qui régissent tous les mouvements relatifs entre les éléments cinématiques et les membres de la chaîne dont il vient d'être question ».

Nous avons essayé, dans ce qui précède, de faire comprendre la portée philosophique de cette conception fondamentale de la *chaîne cinématique,* formée de *couples* d'éléments; on devine sans doute la lumière qu'elle apporte dans l'étude détaillée des mécanismes : ici nous renvoyons le lecteur au livre de M. Reuleaux, livre que tous ceux qui enseignent la Mécanique théorique ou pratique devront méditer. Ils sauront gré, sans doute, à M. Debize de leur en avoir rendu la lecture facile; car la tournure philosophique et littéraire de cet Ouvrage ne manquerait pas d'embarrasser ceux qui ne sont pas familiers avec la langue allemande.

Nous terminerons en donnant une idée rapide du système de notation proposé par M. Reuleaux : si cette idée est imparfaite, on nous excusera par la nécessité d'abréger.

Les éléments des couples qui constituent une chaîne cinématique quelconque seront désignés par les lettres majuscules suivantes :

S spirale (vis),	G globe (sphère),
R corps de rotation (rotoïde),	A arc,
P prisme,	Z dent, saillie,

C cylindre,	V vase, récipient,
K cône,	T organe de traction,
H hyperboloïde,	Q organe de pression.

Remarquant maintenant que la surface d'un corps solide sépare l'espace en deux parties dont l'une peut être regardée comme *pleine,* l'autre comme *creuse,* on représentera l'une ou l'autre de ces deux parties par la même lettre affectée du signe + ou — placé en exposant. Ainsi C^+, C^- représenteront un cylindre plein, un tube cylindrique; l'attention étant portée dans le premier cas sur la partie pleine, dans le second sur la partie creuse; S^+ sera une vis, S^- un écrou; V^+ sera le contraire d'un vase, un corps plein, le vase lui-même sera V^-; ainsi V^+ peut servir à représenter un piston, V^- le cylindre correspondant. Le symbole o placé aussi en exposant indiquera une surface plane; le signe ($\tilde{}$) placé au-dessus de la lettre signifie que le profil correspondant est une courbe quelconque : ainsi $\tilde{C}^+$, $\tilde{C}^-$ désignent des cylindres à base quelconque plein ou creux. Les lettres des symboles de noms, employées comme minuscules, placées à droite et en bas des lettres majuscules, conduisent à d'autres symboles de formes. Ainsi C_z^+, C_z^- désignent des roues dentées à denture extérieure ou intérieure, P_z une crémaillère, T_p un organe de traction prismatique, une courroie : T_p^+ sera le brin qui s'enroule, T_p^- celui qui se déroule; etc.

La liaison entre deux éléments qui constituent un *couple* s'exprime au moyen d'une virgule : ainsi C, C désigne deux cylindres roulant l'un sur l'autre; C^+, C^+ désigne le couple de deux cylindres pleins; C^+, C^- le couple d'un cylindre plein dans un cylindre creux.

La liaison entre deux éléments d'un *membre* d'une chaîne cinématique, liaison en vertu de laquelle ces deux éléments ne forment plus qu'un seul corps, s'exprime par plusieurs points : ainsi $C^+ \ldots C^+$ désigne deux cylindres pleins réunis invariablement.

La fixité d'un membre de chaîne s'indique par *un trait plein* soulignant la notation de ce membre. Ainsi $\underline{P^+ \ldots C^+}$ représente un membre d'une chaîne cinématique maintenu fixe et composé d'un prisme plein et d'un cylindre plein.

Enfin M. Reuleaux emploie encore comme symboles de relations une série de signes identiques ou analogues à ceux dont on se sert en Arithmétique; nous citerons les suivants :

$$=,\quad >,\quad <,\quad |,\quad \|,\quad \perp,\quad \dotplus,\quad \#,\quad \ldots,$$

égal, plus grand, plus petit, coaxial, parallèle, normal, égal et coaxial, égal et parallèle, ... Ces relations peuvent exister entre les éléments d'un couple ou les éléments d'un nombre de chaîne; dans le premier cas, on supprimera la virgule, signe d'accouplement.

D'après cela les trois couples d'emboîtement que nous avons décrits seront représentés par les symboles

$$S^+, S^-;\quad R^+, R^-;\quad P^+, P^-;$$

il est inutile d'écrire, par exemple, $S^+ = S^-$, car l'égalité entre les deux surfaces est une condition de la fermeture du couple vis-écrou, condition que nous supposons essentiellement remplie.

Enfin la chaîne cinématique que nous avons choisie pour exemple, composée des quatre tourillons a, d, e, h, entourés par les douilles cylindriques b, c, f, g et reliés comme il a été expliqué, aura pour symbole :

$$\underbrace{C^-\ldots \| \ldots C^-}_{bc},\ \underbrace{C^+\ldots \| \ldots C^+}_{de},\ \underbrace{C^-\ldots \| \ldots C^-}_{fg},\ \underbrace{C^+\ldots \| \ldots C^+}_{ha} =$$

Nous n'insisterons pas davantage sur ce système de notations qui, consacré par l'usage, peut être appelé à rendre de grands services.

J. Tannery.

LOMMEL (E.). — Ueber eine mit den Bessel'schen verwandte Function [1].

L'intégrale complète de l'équation de Bessel

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0$$

est, comme on sait,

$$y = A J^{\nu}(z) + B J^{-\nu}(z),$$

[1] *Mathematische Annalen*, t. IX; 1876.

où $J^{\nu}(z)$ et $J^{-\nu}(z)$ sont les *fonctions de Bessel de première espèce*, et où A et B sont des constantes. La méthode de la variation des constantes donne l'intégrale de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)y=kz^{\mu-1},$$

sous la forme suivante :

$$y=AJ^{\nu}(z)+BJ^{-\nu}(z)+kS^{\mu,\nu}(z);$$

en faisant

$$S^{\mu,\nu}(z)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[J^{\nu}(z)\int z^{\mu}J^{-\nu}(z)\,dz-J^{-\nu}(z)\int z^{\mu}J^{\nu}(z)\,dz\right].$$

Cette forme ne convient plus quand ν est un entier n, positif ou négatif; on a alors

$$y=AJ^{n}(z)+BY^{n}(z)+KS^{\mu,n}(z),$$

en faisant

$$S^{\mu,n}(z)=Y^{n}(z)\int z^{\mu}J^{n}(z)\,dz-J^{n}(z)\int z^{\mu}Y^{n}(z)\,dz;$$

$Y^{n}(z)$ représente la *fonction de Bessel de seconde espèce*.

M. Lommel se propose d'étudier les fonctions $S^{\mu,\nu}(z)$ au moyen des propriétés des fonctions de Bessel et en particulier de celles qu'il a démontrées précédemment (*Math. Ann.*, t. IV, p. 105) et qui consistent dans les équations

$$J^{\nu}J^{-\nu+1}+J^{-\nu}J^{\nu-1}=\frac{2}{\pi z}\sin\nu\pi,$$

$$Y^{n}J^{n+1}-J^{n}Y^{n-1}=\frac{1}{z}.$$

Dans cette étude, les équations suivantes sont fondamentales :

$$S^{\mu,-\nu}=S^{\mu,\nu},$$

$$S^{\mu+2,\nu}=z^{\mu+1}-(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)S^{\mu,\nu},$$

$$\frac{2\nu}{z}S^{\mu,\nu}=(\mu+\nu-1)S^{\mu-1,\nu-1}-(\mu-\nu-1)S^{\mu-1,\nu-1},$$

$$2\frac{\partial S^{\mu,\nu}}{\partial z}=(\mu+\nu-1)S^{\mu-1,\nu-1}+(\mu-\nu-1)S^{\mu-1,\nu+1}.$$

Les deux dernières doivent être rapprochées des formules analogues relatives aux fonctions de Bessel

$$\frac{2\nu}{z}J^\nu(z) = J^{\nu-1} + J^{\nu+1},$$

$$2\frac{\partial^\nu J}{\partial z} = J^{\nu-1} - J^{\nu+1};$$

des formules précédentes, relatives aux fonctions $S^{\mu,\nu}$, se déduisent plusieurs relations élégantes entre ces mêmes fonctions, relations sur lesquelles nous n'insistons pas.

Lorsque $\mu - \nu$ ou $\mu + \nu$ est un nombre entier impair positif $2m+1$, $S^{\mu,\nu}$ est, au facteur près z^ν, une fonction rationnelle de z; on a, en effet

$$\begin{aligned}S^{2m+1+\nu,\nu} = z^{2m+\nu}\Big[& 1 - m(m+\nu)\left(\frac{2}{z}\right)^2 + m(m-1)(m+\nu)(m+\nu-1)\left(\frac{2}{z}\right)^4 - \ldots \\ & + (-1)^m m(m-1)\ldots 3.2.1(m+\nu)(m+\nu-1)\ldots \\ & \times (\nu+2)(\nu+1)\left(\frac{2}{z}\right)^{2m}\Big].\end{aligned}$$

Dans tous les autres cas, $S^{\mu,\nu}$ se développe en une série convergente très-analogue aux séries qui expriment les fonctions de Bessel. Pour le calcul numérique, on peut employer une série *semi-convergente*.

Les fonctions $S^{\mu,\nu}$ ne servent pas qu'à intégrer l'équation différentielle susdite, elles permettent d'évaluer toutes les intégrales de la forme $\int z^\mu J^\nu dz$; on a, en effet,

$$\int z^\mu J^\nu dz = (\mu+\nu-1)zJ^\nu S^{\mu-1,\nu-1} - zJ^{\nu-1}S^{\mu,\nu}.$$

Les intégrales $\int z^\mu J^\nu dz$ contiennent, comme cas particulier, les intégrales $\int z^\mu \sin z\,dz$ et $\int z^\mu \cos z\,dz$, puisque l'on a

$$J^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \quad J^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$

En faisant dans la formule ci-dessus $\mu = 0$, $\nu = \pm\frac{1}{2}$ et en remplaçant S par la série *semi-convergente* ou la série convergente, on obtient les développements de Cauchy et de Knochenhauer pour les intégrales de Fresnel $\int \sin\frac{\pi}{2}v^2 dv$ et $\int \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv$. On obtient de même des développements remarquables pour $\int \frac{\sin z}{z} dz$ et $\int \frac{\cos z}{z} dz$.

Enfin l'auteur montre, en terminant, que les fonctions introduites par M. C. Neumann dans la théorie des fonctions de Bessel sont des cas particuliers des fonctions $S^{\mu,\nu}$; on a, en effet,

$$O^{2n}(z) = \frac{1}{z} S^{1,2n}(z),$$

$$O^{2n+1}(z) = \frac{2n+1}{z} S^{0,2n+1}(z).$$

SCHELLBACH (Prof. Dr KARL). — UEBER MECHANISCHE QUADRATUR (1).

« Le succès de l'enseignement des Mathématiques dans nos écoles supérieures n'est pas si grand qu'on croirait être en droit d'espérer en considérant combien de jeunes mathématiciens bien instruits sont professeurs à ces écoles. Ce qui forme une cause essentielle du moins de succès heureux de leurs efforts d'enseignement, c'est qu'on néglige en général d'élucider les cours de Mathématiques par des exemples numériques. Cependant Newton a déjà dit : *Exempla plus prosunt quam præcepta*.... Il y a peu d'entre nos jeunes mathématiciens qui, allant passer l'examen d'État des professeurs (*pro facultate docendi*), connaissent les moyens qu'il faut employer pour calculer approximativement la valeur numérique d'une intégrale définie.... C'est dans le Mémoire sur l'évaluation approximative des intégrales définies que Gauss a dit que ces méthodes sont employées par les mathématiciens *rarius quam par est*. Mais l'étude de ce Mémoire important, et de plusieurs autres dus au génie d'illustres géomètres, est rendue difficile surtout par la richesse abondante d'idées étalée par ces auteurs et qui leur fait

(1) *Jahresbericht über die vereinigten Anstalten des Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums, der Königl. Realschule der Königl. Vorschule zu Berlin.* Berlin, 1877. — 26 p.

faire des excursions qui les empêchent de s'approcher directement du but principal. Il est évident que les étudiants pourraient s'avancer plus facilement sur un chemin plus droit.... Ces réflexions m'ont décidé à développer, d'une manière rapide et facile à comprendre, les formules de Gauss et de Cotes pour la quadrature mécanique, et à y joindre quelques applications et une nouvelle méthode de l'évaluation d'intégrales définies qui, comparée à d'autres méthodes, offre quelquefois certains avantages. J'entreprends ce travail en même temps, espérant et souhaitant qu'il passe dans les livres élémentaires sur le Calcul intégral. »

Voilà comment M. Schellbach, autorité incontestable pour les calculs numériques, s'explique sur l'objet de son nouveau Mémoire; en voici l'analyse succincte :

§ 1. Déduction des formules de Gauss.

§ 2. Démonstration des formules de Cotes.

§ 3. Nouvelles formules de M. Schellbach. Ce qui en fait une particularité, c'est qu'il faut connaître la fonction à intégrer : les formules contiennent non-seulement cette fonction, mais encore les valeurs de ses dérivées pour les limites de l'intégrale.

§ 4. Exemples numériques :

I. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$;

II. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$;

III. $\int_p^q \frac{dx}{\log x}$ pour $p = 10^5$, $g = 2.10^5$;

IV. Sommation de la série $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}\int_0^1 \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}\pi x}$;

V. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$.

§ 5. Moyen pour transformer des séries à convergence lente en d'autres à convergence rapide. Exemples :

I. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots;$

II. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$

§ 6. Autre méthode pour calculer la somme de séries lentement convergentes (méthode qui a pour base des idées semblables à celles qui ont été mises en œuvre par Stirling et M. Kummer).

§ 7. Applications des formules du § 6 à des séries.

I. $\log(2) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots;$

II. $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots.$

§ 8. Applications des formules du § 6 au calcul des valeurs numériques d'intégrales définies, telles que $\int_0^1 \frac{dx}{\left(1 - x^{\frac{1}{a}}\right)^a}$.

Exemples : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^n}}$, par exemple $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$, $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^4}}$.

§ 9. Transformation des formules du § 6 pour servir à calculer la somme de la série

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} - \ldots.$$

§ 10. Application de la formule de sommation de Maclaurin au même exemple.

§ 11. Ce paragraphe signale la circonstance remarquable des formules de Cotes et de Gauss qui fait leur mérite principal, de ne pas exiger la connaissance de la fonction à intégrer.