BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Note sur une méthode de transformation des séries, d'après M. Leclert

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 356-360

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_356_0>

NOTE SUR UNE MÉTHODE DE TRANSFORMATION DES SÉRIES, D'APRÈS M. LECLERT.

M. E. Catalan a bien voulu nous signaler une élégante méthode de transformation des séries, inventée par M. Leclert, conducteur des Ponts et Chaussées à Neufchâtel en Bray. L'exposé de cette méthode fait l'objet d'un Mémoire présenté en avril 1865, à l'Académie Royale de Belgique, longtemps avant la publication de celui de M. Lindman, analysé dans le numéro de février 1877. Appliquée en particulier à la série

$$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots,$$

elle conduit rapidement à un grand nombre de décimales exactes. Ainsi M. Catalan parvient, en quelques lignes de calculs, à la valeur

$$G = 0{,}915695594\,1,$$

qui aurait exigé environ *cinquante mille* termes de la série. Quelques pages plus loin, il donne

$$G = 0{,}915695594\,17721,$$

qui aurait exigé environ *cinq millions* de termes.

Depuis la publication du Mémoire de M. Catalan, cette constante G a été encore déterminée par M. Breton (de Champ).

Nous allons résumer, d'après le Mémoire de M. Catalan, les principes de la méthode de transformation des séries due à M. Leclert. H. Brocard.

Considérons une série convergente ayant pour *somme* ou *limite* s, de manière que

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_1^\infty u_n.$$

Soit α_n une fonction de n, telle que le produit $\alpha_n u_n$ tende vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, et telle, en outre, que la quantité

$$(2)\qquad a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

tende, en même temps, vers une limite A *différente de zéro*.

Posons

$$(3)\qquad u'_n = \left(1 + \frac{a_n}{A}\right) u_n.$$

Ces conditions assurent la convergence de la *série dérivée*

$$(4)\qquad u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots,$$

dont la somme s' satisfait alors à la relation

$$(A)\qquad s = \frac{\alpha_1 u_1}{A} + s',$$

comme on peut l'établir aisément.

Lorsque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda\,(\lambda < 1)$, on peut prendre pour α_n soit l'unité, soit une fraction qui tende vers l'unité. Dans les deux cas, $A = 1 - \lambda$, et conséquemment

$$(5)\qquad s = \frac{\alpha_1 u_1}{1-\lambda} + s'.$$

Si $\lambda < 1$, on peut poser

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda + \frac{1}{\varphi(n)},$$

$\varphi(n)$ étant une fonction *divergente*. De là résulte, si l'on prend $\alpha_n = 1$,

$$a_n = 1 - \lambda - \frac{1}{\varphi(n)},\quad A = 1 - \lambda,$$

$$1 - \frac{a_n}{A} = \frac{1}{1-\lambda}\frac{1}{\varphi(n)},\qquad u'_n = \frac{1}{1-\lambda}\frac{u_n}{\varphi(n)}.$$

Les termes de la série dérivée (4), multipliés, s'il le faut, par le facteur constant $1 - \lambda$, sont donc ordinairement beaucoup plus petits que les termes de la série primitive (1); par suite, le terme $\frac{\alpha_1 u_1}{A}$

est, ordinairement aussi, presque égal à la somme inconnue s, du moins lorsque la série (1) a tous ses termes positifs. Cette simple remarque permet déjà d'entrevoir combien peut être utile le procédé de M. Leclert.

Si l'on opère sur la série dérivée comme sur la série primitive, et ainsi de suite, on est conduit à ce système de formules :

$$a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}\frac{u_{n+1}}{u_n}, \qquad \lim a_n = \mathrm{A},$$

$$a_n^{(k)} = \alpha_n^{(k)} - \alpha_{n+1}^{(k)}\frac{u_n^{(k)}+1}{u_n^{(k)}}, \quad \lim a_n^{(k)} = \mathrm{A}^{(k)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u'_n = \left(1 - \frac{a_n}{\mathrm{A}}\right)u_n, \qquad s = \frac{\alpha_1 u_1}{\mathrm{A}} + s',$$

$$u_n^{(k+1)} = \left(1 - \frac{a_n^{(k)}}{\mathrm{A}^{(k)}}\right)u_n^{(k)}, \quad s_n^{(k)} = \frac{\alpha_1'^{(k)} u_1^{(k)}}{\mathrm{A}^{(k)}} + s^{(k+1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où résulte non-seulement

$$\text{(B)} \qquad s = \frac{\alpha_1 u_1}{\mathrm{A}} + \frac{\alpha'_1 u'_1}{\mathrm{A}'} + \ldots + \frac{\alpha_1^{(k)} u_1^{(k)}}{\mathrm{A}^{(k)}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n^{(k+1)},$$

mais encore

$$\text{(C)} \qquad s = \sum_1^{\infty} \frac{a_1^{(k)} u_1^{(k)}}{\mathrm{A}^{(k)}},$$

pourvu que la quantité $\frac{\alpha_1^{(k)} u_1^{(k)}}{\mathrm{A}^{(k)}}$ *ait pour limite zéro.*

L'équation ou le théorème (B), qui n'est qu'une extension du principe fondamental (A), permet d'augmenter autant qu'on le veut, pour ainsi dire, la convergence d'une série donnée ; la formule (C) modifie complétement la forme de cette série, et la rend presque toujours très-convergente.

M. Leclert a imaginé une seconde transformation, souvent moins commode que la première, mais cependant utile dans certains cas. Voici en quoi elle consiste.

Représentons par

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots$$

la série proposée, et conservons nos autres notations. Si l'on pose

$$v'_n = \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) \alpha_{n+1} v_{n+1},$$

on aura

$$(A_1) \qquad s = \frac{\alpha_1 v_1}{a_1} + s',$$

comme on l'établirait facilement.

L'emploi réitéré du *second principe fondamental* (A) donne, avec la même restriction que ci-dessus (4),

$$(B_1) \qquad s = \frac{\alpha_1 v_1}{a_1} + \frac{\alpha'_1 v'_1}{a'_1} + \ldots + \frac{\alpha_1^{(k)} v_1^{(k)}}{a_1^{(k)}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} v_n^{(k+1)},$$

$$(C_1) \qquad s = \sum_1^{\infty} \frac{a_1^{(k)} v_1^{(k)}}{a_1^{(k)}}.$$

Première application. — Transformer la série de Leibnitz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(1-)^{n-1}}{2_{n-1}} + \ldots$$

Deuxième application. — Transformer la série

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots.$$

Troisième application. — Transformer la série

$$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} + \ldots.$$

En supposant

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{2n-3},$$

on trouve

$$a_n = 2\,\frac{(2n-1)^2}{(2n+1)(2n-3)}\quad A' = 2,$$

$$u'_n = (-1)^n \frac{4}{(2n-3)(2n+1)^2(2n+1)};$$

puis, après quelques réductions,

$$G = \frac{5}{6} + 4 \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)},$$

formule obtenue par M. Leclert.

Partant de cette première transformée, et prenant successivement

$$\alpha'_n = \frac{2n+3}{2n-1}, \quad \alpha''_n = \frac{2n+3}{2n-2},$$

on trouve ces deux développements :

$$G = \frac{19}{18} - 32 \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2(2n+1)^2(2n+3)^2},$$

$$G = \frac{2909}{3150} - 768 \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)^2(2n+5)^2(2n+7)},$$

qui conduisent rapidement aux résultats indiqués.