BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

E. DEWULF

Hexagramme de Pascal

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, n° 1 (1877), p. 348-350

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_348_1>

HEXAGRAMME DE PASCAL;

PAR M. E. DEWULF.

M. Joseph Veronese, étudiant à l'Université de Rome, a présenté, le 8 avril 1877, à l'Académie royale des Lincei, un intéressant Mémoire sur l'hexagramme de Pascal. Il serait difficile de donner une analyse succincte de ce beau travail, sur lequel nous comptons, du reste, revenir à propos des résultats élégants obtenus par M. Cremona en reliant cette question à la théorie des surfaces de troisième ordre; nous nous proposons seulement ici de faire apprécier l'étude du jeune géomètre italien, en donnant, d'après lui, un aperçu historique de la question qu'il a traitée.

Pascal, encore enfant, a trouvé, en 1640, le célèbre théorème qui établit la condition pour que six points soient situés sur une même courbe du second ordre. Jusqu'en 1806, aucun géomètre ne chercha à étendre ce théorème; Brianchon en déduisit alors la condition, non moins importante, pour que six droites soient tangentes à une même courbe de la seconde classe. Depuis lors, quelques géomètres, des plus renommés de notre siècle, ont fait de cette question l'objet de leurs recherches.

En 1828, Steiner démontra que les 60 droites de Pascal, qui correspondent aux 60 hexagones que l'on peut former avec 6 points d'une conique, se coupent 3 à 3 en 20 points G, que l'on a désignés sous le nom de *points de Steiner*. Il crut que ces 20 points étaient placés 4 à 4 sur 5 droites concourantes en un même point; mais Plücker montra que ces 20 points G sont situés 4 à 4 sur 15 droites, qui seront désignées sous le nom de *droites de Steiner-Plücker*.

Otto Hesse parvint à démontrer que les 20 points de Steiner sont conjugués 2 à 2 par rapport à la conique fondamentale des six points, et il montra que la figure de Steiner est identique à celle qui est formée par 3 triangles perspectifs 2 à 2 par rapport à un même centre. Les 9 côtés des trois triangles, les 3 droites concourantes au centre commun et les 3 droites de perspective (axes d'homologie) représentent les 15 droites de Steiner-Plücker.

Cayley étudia la même figure et chercha spécialement à représenter toutes ces droites par des notations abrégées ; enfin Staudt et Grassmann dirigèrent aussi leurs recherches vers le même objet.

Les mathématiciens anglais firent, à leur tour, des découvertes sur ce sujet, et elles sont comme les réciproques de celles de leurs devanciers français et allemands. Kirkman démontra que les 60 droites de Pascal ne se coupent pas seulement 3 à 3 en 20 points G, mais qu'elles se rencontrent encore en 60 autres points, connus sous le nom de *points de Kirkman*. Il démontra aussi que ces 60 points sont alignés 2 à 2 sur 90 droites, dont chacune passe respectivement par le point d'intersection de 2 des 15 côtés obtenus au moyen des 6 points de la conique fondamentale. Cayley et Salmon trouvèrent en même temps que les 60 points de Kirkman sont situés 3 à 3 sur 20 droites (droites de Cayley-Salmon) ; puis Salmon démontra que ces 20 droites se coupent 4 à 4 en 15 points (points de Salmon), et que chacune d'elles passe par un seul point de Steiner.

Dès 1868, Hesse fit remarquer une certaine réciprocité entre les droites de Pascal et les points de Kirkman, entre les points de Steiner et les droites de Cayley-Salmon, entre les droites de Steiner-Plücker et les points de Salmon. Mais ni ce géomètre, ni Schröter ne parvinrent à rien de net à cet égard.

En 1874, Bauer s'occupa des mêmes figures en partant de la considération de deux triangles 123, 456 inscrits dans une conique et en les regardant comme conjugués par rapport à une même conique Σ. Il trouva que les deux points de Steiner qui correspondent au symbole 123 (123 étant les chiffres de rang impair qui restent fixes dans les six hexagones des droites de Pascal de ces deux points) ont pour droites polaires par rapport à la conique Σ les deux droites de Cayley-Salmon qui passent respectivement par ces points.

Tel était l'état des découvertes faites sur la figure de l'hexagramme de Pascal, lorsque le jeune géomètre italien entreprit de l'étudier à son tour. Il démontre que les 60 droites de Pascal se divisent en 6 groupes de 10 droites, qui renferment leurs 10 points de

Kirkman correspondants et qui sont polaires de ces 10 points par rapport à une certaine conique π, et qu'il existe, par conséquent, dans l'hexagramme complet, 6 coniques π; 5 de ces groupes déterminent le sixième. Il démontre, en outre, qu'il n'existe pas seulement un système $[kp]$ de 60 droites de Pascal et de 60 points de Kirkman, mais qu'il existe une infinité de ces systèmes, dont chacun se compose de 6 groupes analogues à ceux du système $[kp]$, qui donnent lieu à 6 autres coniques; 5 de ces coniques déterminent un groupe du système précédent et un du système suivant.

La figure des points de Steiner et des droites de Cayley est commune à tous ces systèmes, c'est-à-dire que les 60 points d'un système sont situés 3 à 3 sur les 20 droites de Cayley-Salmon, et que 60 droites du même système se coupent 3 à 3 aux 20 points de Steiner.

Ces systèmes sont liés, en outre, par certains points et certaines droites fixes, et par certaines involutions engendrées par les 60 droites et les 60 points des systèmes en nombre infini autour des points de Steiner et sur les droites de Cayley-Salmon.

Le Mémoire de M. Veronese est une monographie complète de l'hexagramme mystique.