Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 313-337

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_313_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CLEBSCH (A.). — VORLESUNGEN ÜBER GEOMETRIE, bearbeitet und herausgegeben von Dr F. LINDEMANN, mit einem Vorworte von F. KLEIN. Ersten Bandes, zweiter Theil. — Leipzig, Teubner, in-8°, 554 p. (faisant suite aux 496 pages de la première Partie) (1).

La seconde Partie dont nous aurons à nous occuper ici étant une continuation immédiate de la première Partie, nous n'aurons qu'à reprendre l'analyse déjà commencée de cet Ouvrage, qui a pour base les leçons de Clebsch, mais dont M. Lindemann est l'auteur responsable.

La cinquième Section, qui ouvre la seconde Partie, contient la discussion des *courbes du troisième ordre ou de la troisième classe*. Les propriétés des neuf points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre, celles du faisceau de ces courbes qui ont les mêmes points d'inflexion, et de la série des courbes de la troisième classe qui ont les droites polaires des points d'inflexion pour tangentes de rebroussement, fournissent, par leur belle symétrie et par la simplicité de leur représentation algébrique, la meilleure illustration de la théorie des polaires et des courbes hessienne, steinérienne et cayleyenne. La dernière de ces courbes devient ici identique à la courbe hermitienne d'un système. En se plaçant ici au point de vue algébrique, on a l'avantage de pouvoir former un système complet des formes invariantes qui appartiennent à une forme ternaire cubique. Parmi les applications que l'auteur en fait, nous citerons la formation (en partie d'après M. Gundelfinger) des équations de condition des différentes dégénérations d'une cubique.

L'auteur considère la Géométrie sur une courbe cubique de deux points de vue. Le premier, qui est géométrique (ou algébrique), est intimement lié aux générations de ces courbes qu'on doit à Chasles et à Grassmann. Le second, qui dépend de la représentation d'un point variable d'une courbe du troisième ordre par des fonctions elliptiques d'un paramètre variable, fait paraître toute

(1) Voir *Bulletin*, t. X, p. 113.

l'élégance et toute la simplicité de cette application de la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes à la Géométrie, qui est une des plus belles productions du génie de Clebsch. La présente exposition de cette application des fonctions transcendantes est toutefois due à M. Lindemann, tandis que plusieurs des autres parties de cette Section ont été élaborées dans les leçons de Clebsch.

La discussion de la Géométrie sur une cubique peut servir d'introduction à la sixième Section, qui a pour titre : *La Géométrie sur une courbe algébrique et sa connexion avec la théorie des intégrales abéliennes*. Celle-ci se compose de même de deux Parties : dans la première on se sert seulement de méthodes algébriques et géométriques ; dans la seconde on fait usage de fonctions transcendantes.

La première de ces deux Parties commence par une discussion des transformations birationnelles (*eindeutige*) d'une courbe algébrique. On y trouve sept démonstrations de la conservation du genre. Viennent ensuite des recherches très-étendues sur les systèmes de points d'intersection de courbes algébriques et sur les modules, c'est-à-dire les constantes d'une courbe algébrique qui ne sont pas altérées par une transformation birationnelle (de même que les invariants ne sont pas altérés par une transformation linéaire). Dans ces recherches, qui ont notamment pour but d'obtenir algébriquement des résultats trouvés par Riemann, Clebsch et d'autres au moyen des transcendantes, M. Lindemann continue les discussions commencées à la fin de la quatrième Section. Les démonstrations et les théorèmes qu'il expose sont en partie dus à MM. Brill et Nöther, en partie à M. Lindemann lui-même. Dans la seconde Partie de la sixième Section, l'auteur expose la détermination des points d'une courbe algébrique au moyen des fonctions abéliennes, et les applications du théorème d'Abel à l'étude des propriétés des systèmes de points d'intersection. Il a besoin d'emprunter ici à la théorie des fonctions plusieurs théorèmes dont il adapte toutefois les formes et les expressions au but actuel ; ce mélange a pour le lecteur l'inconvénient qu'on ne sait pas toujours jusqu'à quel point l'auteur continue ses citations et où commencent, sur la base de celles-ci, ses démonstrations rigoureuses.

Les courbes des genres $p = 0$ et $p = 1$ n'étant pas comprises dans la discussion générale, l'auteur s'occupe après, en particulier, de ces courbes, dont on peut exprimer les coordonnées par des fonctions rationnelles ou elliptiques ; il ajoute une étude particulière des courbes du genre $p = 2$, ou hyperelliptiques.

Nous avons déjà rappelé que les importantes théories dont nous venons de parler doivent à Clebsch la place qu'elles ont trouvée dans la Géométrie ; l'élaboration actuelle appartient à M. Lindemann.

La septième Section, dont une partie est tirée d'un manuscrit de Clebsch, contient un aperçu sur *la Théorie des connexes*. On sait quelles nouvelles voies cette importante conception de Clebsch ouvre à la Science, en fournissant le moyen d'appliquer aux équations différentielles algébriques les instruments de l'Algèbre moderne. A cause de la connexion intime de l'Algèbre avec la Géométrie, il est clair qu'une partie des résultats qu'on obtient ainsi coïncident avec ceux que M. Fouret obtient en prenant pour point de départ les conceptions de la théorie des caractéristiques.

Les progrès de la théorie des équations différentielles algébriques seront suivis de ceux de la théorie générale des équations différentielles. Guidé par un manuscrit de M. Klein, au concours duquel M. Lindemann rend justice dans sa Préface, et qui lui a été utile notamment pour le choix des points de vue, l'auteur ouvre, à la fin de son Livre, des vues intéressantes sur les grandes espérances qu'il est permis de fonder sur l'influence des principes de l'Algèbre moderne et de la Géométrie moderne sur les équations différentielles. Il rappelle à cet égard les travaux de MM. Lie et Mayer, notamment les *Berührungstransformationen* du premier savant, ainsi que la nouvelle discussion, due à M. Darboux, des principes de la théorie des solutions singulières. Nous sommes persuadés, nous aussi, que nous aurons là un champ très-fertile : les grands progrès que la Géométrie et l'Algèbre ont faits dans notre siècle ne laisseront pas de contribuer essentiellement à la solution des problèmes, appartenant jusqu'à présent au domaine de la théorie des fonctions, qui ont pour objet la déduction immédiate, sans intégration, des propriétés d'une fonction définie par une équation différentielle.

Si nous avons réussi à donner une idée nette de ce que contient le Livre qui nous occupe, on aura entrevu que ses principes sont choisis et suivis avec clarté. L'auteur tend partout à établir les propriétés indépendantes des transformations, les propriétés étant celles d'une courbe regardée comme lieu ou enveloppe, celles d'un système de courbes, ou celles de la combinaison de coordonnées ponctuelles ou linéaires qui s'appelle *connexe*, et les transformations étant les transformations linéaires, ou les transformations birationnelles les plus générales. Pour atteindre ce but, il se sert le plus loin possible des moyens algébriques et géométriques dont nous avons parlé dans notre analyse de la première Partie; ensuite il introduit aussi l'usage des transcendantes.

Cependant, la mise en œuvre, même de principes qu'on a clairement sous les yeux, peut être une tâche très-difficile, surtout lorsqu'il s'agit d'un ouvrage si étendu, et lorsque, en beaucoup d'endroits, il n'existe pas encore de voies frayées conduisant au but qu'on a sous les yeux. La manière dont M. Lindemann s'est acquitté de cette tâche, dans un espace de temps très-court, est la preuve d'une grande habileté et d'un travail très-assidu, ayant eu pour résultat un ouvrage très-utile aux progrès de la Science; mais on devait s'attendre à ce que ce Livre contînt des passages moins heureusement traités que d'ordinaire par l'auteur.

M. Lindemann dit dans sa Préface que son plan s'est étendu pendant le travail, et qu'à cause de cette accumulation successive de nouvelles recherches son Livre manque de la régularité d'un ouvrage bien arrondi. Nous sommes loin de vouloir lui reprocher d'avoir saisi les occasions d'introduire ainsi, d'une manière plus étendue que ne l'aurait demandé l'ensemble de son Ouvrage, « des conceptions et des méthodes peu connues en dehors du cercle des amis et élèves de Clebsch »; au contraire, nous lui en sommes très-reconnaissants; mais la manière successive dont s'est faite cette accumulation rend parfois la lecture très-difficile : on oublie les démonstrations antérieures et les restrictions qui peuvent y être jointes; on est réduit à avoir confiance en l'auteur à cet égard, et parfois même cette confiance est ébranlée. Ces remarques s'appliquent notamment à ce qui concerne la géométrie sur une courbe algébrique. Cette discussion, qui est commencée dans les derniers paragraphes de la quatrième Section, occupe toute la longue sixième Section. N'étant pas assez familiers avec cette matière pour juger de la valeur de toutes les démonstrations et discussions qui s'y trouvent, nous nous bornons ici à constater la difficulté qu'on a à les suivre; mais, d'après les observations d'un meilleur juge, sur cette matière [1], les difficultés que l'auteur avait ici à vaincre ont en plusieurs endroits dépassé ses forces. La tentative de vouloir former dès à présent un tout complet de cette matière, où beaucoup des recherches datent presque d'hier, et où beaucoup restent encore à faire pour établir la connexion nécessaire, était donc sans doute trop hardie; mais, quoique même M. Lindemann n'y ait pu réussir complétement, sa collection des différentes recherches faites dans cette direction et ses nouvelles recherches propres contribueront essentiellement à préparer l'exécution complète du plan qu'il s'est proposé à cet égard. Grâce aux travaux que provoquera son Ouvrage et à ses propres études intermédiaires, nous espérons que M. Lindemann réussira, dans une nouvelle édition de son livre, à faire de la géométrie sur une courbe algébrique un corps de doctrine, solidement établi par des démonstrations complètes, et assez facile à étudier.

En parlant d'une future édition, nous nous permettons aussi d'émettre l'espérance que M. Lindemann trouvera alors assez de temps pour éviter certaines faiblesses dans le détail. Nous pensons moins au trop grand nombre d'erreurs typographiques qu'à plusieurs conclusions ou expressions inexactes ou, du moins, obscures. Certainement tout auteur mathématique sait combien ces petites fautes, dont l'influence ne s'étend pas loin (au cas contraire on aurait le moyen de les découvrir) sont difficiles à éviter; mais le nombre que nous en avons trouvé, sans les chercher expressément, semble indiquer que le livre de M. Lindemann en contient trop, surtout pour un ouvrage qui porte le titre de « *Leçons* ». Nous nous contenterons d'appuyer cette remarque par quelques exemples.

A la page 587 on trouve une confusion de la courbe cayleyenne d'une courbe donnée avec celle de la courbe qui a la courbe donnée pour hessienne. Le lecteur est donc chargé du soin de s'assurer que cette confusion n'a aucune conséquence sérieuse, et c'est ce qui a lieu en effet.

A la page 606, l'auteur regarde une quantité dont l'expression se réduit à $\frac{0}{0}$ comme déterminée, sans donner au lecteur les moyens de

(1) M. Nöther, dans la partie historique et littéraire du *Zeitschrift* de Schlömilch, 1877, p. 73 et suivantes.

voir comment le numérateur et le dénominateur tendent à devenir égaux à zéro.

A la page 843 on trouve une distraction étrange : l'auteur demande qu'un nombre M′ et un facteur r' de M′ soient premiers entre eux.

A la page 1002, l'auteur remarque que les courbes intégrales (*Hauptcoincidenzcurven*) d'un connexe (1, n) sont tangentes aux n^2+n+1 droites fondamentales du connexe. Il semble indiquer que chacune de ces droites enveloppe les courbes, et il n'observe pas que le contact en un point ordinaire de la droite résulte de la circonstance que la droite est (ou fait partie de) la courbe intégrale passant par le point. Nous nous permettrons de rappeler, à cette occasion, un fait semblable : la droite à l'infini n'enveloppe pas le système de courbes représentées par l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$f\left(\frac{dy}{dx}, x, y\right) = 0,$$

où f est une fonction algébrique générale de l'ordre n en $\frac{dy}{dx}$ et de l'ordre m en x et y ; mais elle appartient elle-même à ce système ; les autres courbes du système la rencontrent aux $m+n$ points déterminés par $\frac{dx}{dx} = \frac{y}{x}$.

H. Z.

BECKER (JOHANN KARL), Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Manheim. — DIE ELEMENTE DER GEOMETRIE AUF NEUER GRUNDLAGE STRENG DEDUCTIV DARGESTELLT. — Erster Theil. Mit 145 Holzschnitten. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. 1877, XV-295 p.

Nous savons très-bien qu'un Recueil qui doit s'occuper de satisfaire autant d'intérêts différents que le *Bulletin* ne peut s'astreindre à rendre compte en général de tous les ouvrages élémentaires de Mathématiques. Mais le livre que nous avons entre les mains, bien que portant pour titre : *Éléments*, n'appartient pas en réalité à cette catégorie. On pouvait bien s'attendre, au contraire, à ce que l'auteur, bien connu comme un heureux et vaillant champion sur le terrain de la Géométrie philosophique, ne devait pas se tenir sur le sentier frayé depuis longtemps, et qu'il traiterait son sujet d'une manière complétement originale. Et c'est, en effet, ce qui est arrivé.

M. Becker veut déduire, suivant une marche uniforme, toute la théorie de l'espace, sans égard aux divisions habituellement observées en Planimétrie et Stéréométrie, en Géométrie synthétique et en Géométrie analytique, de certains principes très-simples et regardés comme indiscutables. Il nous présente, comme préliminaires, la première Partie qui traite des lois des *figures simples,* et qui est déjà bien suffisante pour asseoir notre jugement sur la nature et la valeur du plan de l'Ouvrage entier. Nous croyons devoir commencer par signaler ici tout d'abord une différence essentielle qui distingue la manière dont Becker conçoit les principes de tous les autres points de vue connus jusqu'ici. Tandis qu'ordinairement les efforts du géomètre tendent à réduire au moindre nombre possible la série des vérités indémontrables, qu'on les appelle *axiomes* avec Euclide, *hypothèses* avec Riemann, ou *faits* avec Helmholtz, notre auteur, dès le début, se dégage formellement et expressément de cette tendance. Combien y a-t-il d'axiomes, dit-il, qui soient nécessaires pour la fondation d'un édifice doctrinal solide et harmonisé, cela nous est indifférent; si avec sept axiomes on peut parvenir à une connaissance plus précise et plus intuitive qu'avec trois, il n'hésitera pas personnellement à préférer le premier mode de fondation au second? Pour cette raison, il n'attachera pas non plus une grande importance à la démonstration, peut-être possible, de l'introduction dans un de ses théorèmes d'une supposition encore non démontrée, pourvu que celle-ci soit elle-même directement saisissable à l'intuition. En résumé, M. Becker fonde, comme on voit, son nouveau système entièrement sur le procédé intuitif, et sur ce procédé seulement.

Qu'il soit permis à l'auteur de cet article, qui sur les points principalement en question est d'un avis un peu différent, et qui a échangé déjà avec M. Becker de nombreuses lettres à ce sujet, d'exposer en quelques mots sa manière de voir sur les principes de la doctrine de ce géomètre. Que l'intuition immédiate puisse faire naître en nous une certitude intime, à laquelle ni la syllogistique rigoureuse des Grecs ni la métagéométrie d'un Bolyai ne pourraient jamais nous conduire, et que, en conséquence, tout livre composé spécialement en vue de l'enseignement doive ne jamais cesser de faire un appel continuel à l'évidence, c'est là aussi notre propre et entière conviction, et en cela nous nous placerons absolument sur le même terrain que M. Becker. Mais cette base, reposant uniquement sur la contemplation directe, est-elle réellement indiscutable? Des recherches théoriques plus approfondies ne peuvent-elles pas, à cette satisfaction *instinctive*, pour ainsi dire, que nous procure l'intuition, en ajouter une autre plus *abstraitement intellectuelle?* Il existe cependant des tentatives dans ce sens vraiment dignes d'attention, tentatives qui nous ont au moins fait approcher à un certain degré du but idéal qu'il s'agirait d'atteindre. Mais de ces efforts, dont le succès partiel constitue, à nos yeux, un des résultats les plus remarquables de la puissance analytique de l'entendement humain, M. Becker semble faire peu de cas : il ne le dit pas, il est vrai, d'une manière expresse, mais sa véritable manière de voir peut se lire très-bien entre les lignes de sa Préface. C'est là la seule divergence sur la conception des principes qui existe entre l'auteur et nous. Nous lui accordons très-volontiers que son entreprise est parfaitement conséquente avec elle-même, et partant qu'elle est légitime; mais nous affirmerons non moins formellement que cela ne rend nullement superflue une critique complète des principes sur lesquels il s'appuie, et que cette critique, au contraire, devient par là même tout à fait nécessaire. Au point de vue pédagogique, comme au point de vue mathématique, nous sympathisons entièrement avec l'auteur; mais au point de vue de cette branche de la science, que l'on a assez improprement nommée la *métaphysique de la Géométrie*, nous considérerions comme très-regrettable qu'une répugnance systématique, comme celle que l'on rencontre chez M. Becker, pour l'examen des sources de nos connaissances, se répandît généralement.

Ayant ainsi expliqué en quoi notre point de vue diffère de celui de l'auteur, nous nous astreindrons, dans ce qui va suivre, à accepter complétement sa base pour la nôtre, et à examiner jusqu'à quel point il est resté fidèle à la marche qu'il s'est tracée. Nous commencerons par déclarer qu'à notre avis il a, sous ce rapport, parfaitement réussi, et que nous avons vraiment affaire à une nouvelle création, qui s'imposera même à l'attention des personnes assez nombreuses qui sont par principe les adversaires de cette méthode.

Parmi les objets qui sont naturellement traités dans ce Livre, ceux qui forment l'introduction et la conclusion sont indubitablement les plus importants, et nous allons nous en occuper ici en particulier, tandis que, pour les matières exposées dans les autres Sections d'après une méthode plus rapprochée nécessairement de la méthode habituelle, nous pourrons nous contenter d'un coup d'œil général. Ces deux objets à examiner à part sont la construction des figures fondamentales élémentaires, et une discussion présentée sous un jour tout nouveau, des surfaces connexes, soit continues, soit morcelées.

La première de ces deux Parties a été déjà publiée en résumé dans le tome XX du *Journal de Schlomilch;* mais ici elle se trouve naturellement exposée avec plus de développements et de détails. Comme premier axiome, l'auteur pose la continuité et l'étendue infinie de l'espace; comme second axiome, la possibilité de figures susceptibles de coïncider entre elles. Bien que l'énonciation de ce second axiome se rattache à la notion de distance, donnée dès le début, les partisans mêmes de la Géométrie, « dégagée de toute contradiction », ne peuvent guère en faire un reproche à l'auteur, car cette notion est prise aussi comme idée première chez Lobatchefsky et Bolyai. Le troisième axiome établit dans l'enchaînement le plus étroit les restrictions que la liberté de mouvement d'un corps éprouve par la fixation d'un ou de deux de ses points; cet axiome assure alors immédiatement la possibilité de démontrer l'existence d'une surface sphérique et la faculté de déplacer les figures tracées sur cette surface. Il suffisait pour cela de fixer un seul point à l'intérieur de ce corps; si l'on fixe deux points, un dernier couple d'axiomes nous affirme que les points qui sont déterminés d'une manière univoque par leur distance à ces deux points remplissent une ligne unique et indéfinie, et aussi les points dont la position n'est pas complétement fixée par ces distances remplissent une ligne rentrante sur elle-même. C'est là, il est vrai, une manière d'introduire les notions fondamentales de la Planimétrie, la « droite » et le « cercle », qui est en rupture ouverte avec la tradition; mais nous sommes forcés de convenir qu'elle nous a semblé excellente. Il est pourtant certain que nous ne tenons pas pour impossible de déduire ces deux notions de celle de la sphère, bien que tous les essais dirigés jusqu'ici vers ce but par Deahna, Lobatchefsky et autres soient encore sujets à objection, et nous avons le ferme espoir que cette déduction deviendra un jour une vérité. Mais elle n'en portera pas moins un caractère toujours artificiel, et la féconde fraîcheur des axiomes de Becker, pris sur la vie, lui fera toujours défaut. Les recherches analytiques qui ont conduit autrefois Helmholtz à ses résultats aprioristiques concernant la faculté de déplacement des corps solides se trouvent ici exposées de la manière la plus heureuse dans le langage de la Géométrie intuitive.

Maintenant la définition connue de la circonférence du cercle est devenue un théorème ; on peut démontrer rigoureusement que tous les points d'une ligne engendrée comme nous l'avons indiqué doivent rester à une distance constante de chacun des points de la ligne ou de l'axe mentionné d'abord. La notion du plan n'est pas encore acquise, mais nous pouvons bien, en attendant, définir celle de l'angle, laquelle conduit à son tour, toutes les hypothèses cinématiques étant déjà données, à la notion du cône de révolution et finalement à celle du cône en général. On opérera ensuite avec des angles, dont la propriété d'être entièrement situés dans un seul et même plan se présente alors comme une propriété tout à fait secondaire ; les théorèmes connus sur les angles opposés par le sommet, sur les angles adjacents, sur les angles droits prennent alors tout naturellement la place qui leur convient. On sait maintenant que l'on obtient une surface conique en faisant tourner un côté d'un angle quelconque autour de l'autre côté comme axe ; si cet angle est droit, la surface conique correspondante porte le nom de *plan* et l'on démontre pour ce plan qu'une droite et aussi un cercle peuvent y être renfermés tout entiers.

Tel est le contenu du premier Chapitre ; le second traite de la Géométrie plane. Nous citerons, comme digne d'attention, l'intéressante démonstration par exhaustion du théorème de proportionnalité des angles et des arcs, et la définition précise du caractère des figures symétriques et des figures à centre par rapport à leurs sommets ou à leurs côtés. Pour pouvoir établir à l'abri de toute objection les fondements de la théorie des parallèles, M. Becker indique la nécessité d'un nouvel axiome (le sixième), qu'il énonce ainsi : « Une étendue dans l'espace est toujours plus grande que sa partie, c'est-à-dire ne peut pas être renfermée tout entière dans cette partie ». Du reste, la manière de voir de l'auteur sur ce chapitre est assez connue, d'après ses précédents écrits et particulièrement d'après la polémique qu'il a tout récemment soutenue contre Lüroth, pour que nous puissions nous dispenser d'entrer dans plus de détails. Mais nous voudrions signaler encore à l'attention du lecteur la manière élégante dont M. Becker a traité les rapports harmoniques et les polygones généraux à n sommets.

Depuis le § 64 jusqu'à la fin du volume, l'auteur s'occupe de la théorie des polyèdres, qui forme encore une des parties les plus remarquables du Livre. C'est un mérite incontestable de M. Becker d'avoir appliqué un monde réel des corps, la théorie de la connexité de Riemann, que le maître lui-même avait établie seulement pour des figures superficielles imaginaires créées par lui, et d'avoir ainsi rendu possible une classification systématique des surfaces polyédrales ([1]). Nous ne pouvons songer ici à donner un compte rendu détaillé de ces recherches de l'auteur, et à faire connaître chacun des nombreux et beaux résultats qu'il a obtenus; nous nous contenterons de dire qu'ils présentent plus d'un point de contact avec les anciens travaux, bien connus, de Möbius, et avec les travaux plus récents, poursuivis d'après un plan méthodique par M. Hess, à Marbourg.

Les savants des pays voisins de race latine avaient eu jusqu'à ces derniers temps sur leurs confrères d'Allemagne l'avantage incontesté d'écrire leurs Traités avec plus de clarté. De nombreux livres d'enseignement publiés dans ces dernières années témoignent que les auteurs allemands apprennent peu à peu à suivre l'exemple de leurs émules. Parmi ces livres, l'Ouvrage que nous venons d'analyser a sans aucun doute le droit de figurer. L'auteur devra se préparer à soutenir des attaques contre le plan et les détails de son œuvre; nous-même, nous sommes loin d'être partout de son avis; mais ce dont nous sommes certain, c'est que, *dans son espèce,* son système est tout aussi bon que pourrait l'être un système intitulé « exempt de toute contradiction », comme celui des *pangéomètres* modernes.

S. Günther.

([1]) La même chose a été faite, presque à la même époque, par C. Jordan, comme M. Becker lui-même le fait remarquer.

KLEIN (F.). — UEBER DEN ZUSAMMENHANG DER FLÄCHEN (¹).

L'étude de la connexité des surfaces a son origine dans les recherches de Riemann sur la théorie des fonctions : elle est, dans les expositions habituelles, soumise à des restrictions qu'il est nécessaire de lever pour constituer une théorie purement géométrique. C'est ce qu'a fait M. Klein dans un travail précédent où il a cherché à déterminer la connexité des différents types de surfaces sous lesquels il a classé les surfaces générales du troisième ordre (*Math. Ann.*, t. VI, p. 551). En opposition avec une recherche analogue de M. Schläfli (*Annali di Matematica*, t. V, p. 289), il a développé (*Math. Ann.*, t. VII, p. 549), une méthode pour déterminer surtout la connexité des surfaces qui s'étendent à l'infini; il a montré qu'on ne devait pas toujours regarder une surface comme une *nappe* simple, que les surfaces telles qu'on puisse passer par un chemin continu d'une face sur l'autre devaient être regardées comme *doubles*. M. Schläfli a depuis (*Annali*, t. VII, p. 193) reconnu la justesse des critiques dirigées contre ses déterminations numériques et ses résultats ne diffèrent plus de ceux de M. Klein que par l'appréciation de l'importance de certaines suppositions arbitraires. Dans la Note que nous analysons, l'auteur commence par rectifier une inadvertance qu'il avait commise dans le travail inséré au tome VII des *Mathematische Annalen*, puis il éclaircit sa conception des *doubles surfaces*; il en donne une définition qui est indépendante de la nature et même de l'existence de tout espace entourant la surface; cette conception est, en effet, applicable à toutes les variétés doublement infinies : M. Klein, comme exemple, traite, au point de vue de la connexité, les congruences de lignes de premier ordre et de première classe, qui possèdent des directrices séparées, d'ailleurs réelles ou imaginaires.

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1876.

KLEIN (F.). — UEBER DEN VERLAUF DER ABEL'SHEN INTEGRALE BEI DEN CURVEN VIERTEN GRADES. — UEBER EINE NEUE ART VON RIEMANN'SCHEN FLACHEN (¹).

On sait que Riemann a fondé sa théorie des fonctions abéliennes sur des considérations essentiellement géométriques : il étudiait la marche des fonctions sur les surfaces qui portent son nom et qui recouvrent plusieurs fois le plan des $x+iy$. D'un autre côté, cette théorie trouve, ainsi que l'a montré Clebsch, une application immédiate dans l'étude des courbes algébriques, lesquelles sont aussi susceptibles d'une étude purement géométrique. M. Klein s'est appliqué depuis longtemps à trouver le lien des deux méthodes géométriques, et, sous ce point de vue, il a publié, dans le tome VII des *Mathematische Annalen*, un court Mémoire sur un nouveau mode de surfaces de Riemann. Il est parvenu à transporter en quelque sorte les considérations de Riemann relatives à ses surfaces sur des courbes qui leur correspondent, en associant à chaque tangente imaginaire de la courbe le point réel par lequel elle passe, et en prenant pour base la surface à plusieurs feuillets formée par tous ces points. M. Harnack, dans le tome IX des *Mathematische Annalen*, a étudié cette surface pour les courbes de troisième classe, relativement aux intégrales elliptiques.

Dans le Mémoire précédemment cité, M. Klein traite des courbes de degré plus élevé et des intégrales correspondantes. Dans le second des deux Mémoires que nous analysons, les surfaces sont étudiées, quant à l'arrangement et à la réunion de leurs feuillets. Un calcul direct établit l'exactitude de l'ordre de connexion (*Zusammenhangszalh*) qui doit être attribué à la surface dans sa relation avec les surfaces ordinaires de Riemann. Ces rapports sont particulièrement étudiés pour les courbes de troisième ordre qui, en tant que courbes de sixième classe, conduisent à des surfaces à six feuillets superposés : on trouvera là une discussion sur la position des tangentes imaginaires d'inflexion, d'où résultent des renseignements sur les coefficients numériques contenus dans les formules de Plücker, qui se rapportent à ces tangentes.

Dans l'autre Mémoire : *Sur la marche des intégrales abé-*

(¹) *Mathematische Annalen*, t. X.

liennes, etc., on utilise les nouvelles surfaces de Riemann, et au moyen des courbes de quatrième classe, on donne une image de la marche de l'intégrale toujours finie : on est amené à tracer précisément sur la surface la courbe le long de laquelle reste constante la partie réelle ou la partie imaginaire de l'intégrale normale qui correspond à un mode déterminé suivant lequel la surface est découpée. Pour cela, quelques importantes recherches sur les courbes de quatrième classe sont nécessaires. En particulier, M. Klein détermine les parties constantes imaginaires contenues dans les périodes de l'intégrale normale, et parvient ainsi à divers théorèmes sur la réalité de certaines courbes de contact.

KÖNIGSBERGER (L.). — Ueber die Entwicklung der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Reihen (¹).

Ce travail se rapporte à une remarque faite par M. Hermite dans une Lettre à M. Brioschi, remarque d'après laquelle les coefficients de la formule de réduction d'une intégrale elliptique générale de seconde espèce sont liés simplement aux coefficients des développements en série des intégrales elliptiques normales de première et de seconde espèce. M. Königsberger a trouvé l'origine de ce lien dans la forme sous laquelle M. Weierstrass a donné ces coefficients de réduction, qui se trouvent être des *résidus* relatifs aux points de discontinuité.

M. Königsberger établit des relations analogues pour les fonctions hyperelliptiques : son travail débute par des développements relatifs aux points de discontinuité, au moyen desquels, comme pour les fonctions elliptiques, l'auteur parvient à la formule de réduction pour une intégrale hyperelliptique générale. L'auteur montre ensuite que les coefficients de la formule de réduction par laquelle on ramène une intégrale générale de seconde espèce aux formes normales des intégrales de première et de seconde espèce sont liés simplement aux coefficients du développement en séries de certaines intégrales hyperelliptiques de première et de seconde espèce. Ces dernières n'appartiennent plus, comme dans le cas des

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1876.

intégrales elliptiques, à la même irrationnelle, mais bien à la racine carrée d'un polynôme réciproque, racine carrée qui, pour les intégrales elliptiques, se ramène immédiatement à celle qui est donnée.

SOHNCKE (L.). — ZUR THEORIE DES OPTISCHEN DREHVERMÖGENS VON KRYSTALLEN (¹).

Les cristaux qui jouissent du pouvoir rotatoire manifestent extérieurement, par une disposition en hélice de certaines facettes modifiantes, une particularité de leur structure interne, liée à leur qualité de cristaux dextrogyres ou lévogyres. Il est naturel de se demander si le pouvoir rotatoire dont ils sont doués ne tient pas à une disposition hélicoïdale de l'éther dans leur intérieur.

M. Briot a démontré qu'une telle structure serait sans influence sur des rayons se propageant dans le sens de l'axe des spirales, mais qu'elle doit avoir pour effet de dédoubler les rayons perpendiculaires à l'axe en deux composantes elliptiques de gyration contraire et dont la vitesse de propagation serait différente. Pour expliquer dans ce système le pouvoir rotatoire du quartz, M. Briot a admis que dans ce cristal les spirales d'éther ont leurs axes parallèles aux faces du prisme hexagonal, c'est-à-dire perpendiculaires à l'axe du cristal, qui est aussi l'axe de la disposition hélicoïdale des facettes.

Il y a là, d'après M. Sohncke, une sorte de contradiction, que ce physicien cherche à faire disparaître en s'appuyant sur une expérience importante de Reusch et sur certaines idées qu'il a émises relativement à la structure cristalline en général.

Reusch est parvenu à imiter les propriétés optiques que le quartz présente dans le sens de son axe, en empilant des lames de mica à deux axes, toutes de même épaisseur, de telle sorte qu'une même direction cristalline se trouve dans la lame n° 2, à 60 degrés, et dans la lame n° 3, à 120 degrés de la position qu'elle occupe dans la lame n° 1, et ainsi de suite. L'imitation s'approche d'autant plus d'être parfaite que le nombre des triades (groupes de trois lames) est plus grand, l'épaisseur de chacune plus faible.

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1876.

L'objet du Mémoire est : 1° la théorie optique d'une triade de Reusch et l'application de la formule à laquelle on arrive au cas où l'épaisseur de la triade, multipliée par un certain coefficient qui dépend des propriétés optiques des lames, est infiniment petite par rapport à la longueur d'onde de la lumière employée; 2° l'étude des dispositions spiraloïdes que l'on peut supposer exister dans un cristal.

L'auteur a démontré, dans un Mémoire antérieur (*Ann. de Poggendorff; Ergänzungsband*, t. VII, p. 337), 54 systèmes réguliers de points en nombre indéfini, lesquels se classent naturellement dans les divers systèmes adoptés en cristallographie. Parmi les systèmes réguliers, un très-petit nombre affectent la disposition spiraloïde, et se classent dans les systèmes du cube, des prismes droits à base carrée ou rectangle, et du rhomboèdre. On sait que, jusqu'ici, le pouvoir rotatoire n'a été observé que dans le système cubique (chlorate de soude) et dans le système du rhomboèdre.

L'expérience de Reusch correspond à une disposition spiraloïde plus compliquée, puisque le mica appartient à l'un des systèmes cristallins à axes obliques. On pourrait imaginer des cristaux naturels appartenant à ces derniers systèmes et présentant le pouvoir rotatoire, grâce à une disposition analogue. Les points formant le système complexe correspondant seraient rangés suivant deux séries de spirales indépendantes.

DAUG (H.-T.), professor vid Upsala Universitet. — DIFFERENTIAL-OCH INTEGRAL-KALKYLENS ANVANDNING VID UNDERSÖKNING AF LINIER I RYMDEN OCH BUGTIGA YTOR. I ([1]). — Upsala, 1877. 1 vol. grand in-8°, 200 p.

Cet Ouvrage, dont l'auteur publie aujourd'hui la première Partie, est, à quelques additions près, la reproduction des leçons professées par lui dans l'année 1874-1875. Le volume se divise en deux

([1]) DAUG (H.-T.), professeur à l'Université d'Upsal : *Application du Calcül différentiel et du Calcul intégral à l'étude des lignes dans l'espace et des surfaces courbes*. Ire Partie.

Parties, l'une consacrée à l'étude des lignes dans l'espace, l'autre à l'étude des surfaces.

I. L'auteur commence par indiquer les différentes formes d'équations qui peuvent servir à représenter une ligne, l'expression de la longueur de l'arc, la définition des lignes osculatrices. Il traite ensuite de la tangente, du plan tangent et du plan osculateur, de la normale et du plan normal, de la polaire, de la binormale, de la normale principale. Systèmes de lignes congruents. Direction de la binormale. Plan rectifiant. Relations entre les cosinus correspondant aux directions de la tangente, de la binormale et de la normale principale. Indicatrice sphérique. Double courbure des lignes. Formules de Serret ([1]). Cercle osculateur, etc. Sphère osculatrice. Courbure géodésique.

II. Représentation analytique d'une surface. Notations et formules de réduction qui seront employées; coefficients E, F, G de Gauss, etc. Aire d'une surface. Tangentes, plan tangent; normale, plan normal. Indicatrice de Dupin; diverses formes de ses équations. Tangentes conjuguées; systèmes de lignes conjuguées. Théorème d'Euler sur la courbure des sections normales. Sections obliques; théorème de Meusnier. Points sphériques (ombilics). Représentation d'une surface sur une autre surface. Courbure des surfaces. Surfaces applicables sur d'autres surfaces. Lignes de courbure. Lignes géodésiques. Systèmes de coordonnées géodésiques. Lieu des centres de courbure d'une surface donnée.

On voit, par ce résumé, que cette première Partie de l'Ouvrage de M. Daug traite complétement la partie élémentaire de la théorie des courbes et des surfaces. Les calculs sont élégants et symétriques. L'exécution typographique fait le plus grand honneur à l'Imprimerie académique de M. Berling, à Upsal. J. H.

([1]) Ces formules ont été publiées pour la première fois par M. Frenet.

ЕРМАКОВЪ (В.), профессоръ математики въ Кіевскомъ университетѣ. — Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій механики. Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка. — Кіевъ, 1877 [1]. Grand in-8°, VI-96 pages.

Le double titre de cet Ouvrage s'explique à la fois par son contenu et par l'idée fondamentale de l'auteur. Dans ce Mémoire, l'auteur a pour but principal d'exposer les procédés d'intégration des équations canoniques. Jusqu'ici, au lieu de s'occuper directement de l'intégration des équations canoniques, les géomètres, autant que sache M. Ermakof, ont accordé plus d'attention à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre auxquelles conduisent les équations canoniques.

L'auteur trouve très-avantageux d'exposer d'abord la théorie complète des équations canoniques. Il pense que l'on peut ensuite faire voir en quelques mots comment, d'un système complet d'équations canoniques, on peut tirer l'intégrale des équations aux dérivées partielles. C'est seulement dans ces derniers temps que Lie et Mayer ont démontré que l'intégration de m équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre peut se ramener à l'intégration d'une équation différentielle entre un nombre de variables moindre de $m - 1$ que le nombre primitif.

Le théorème de Lie et Mayer est d'une haute importance pour les équations canoniques. En combinant les recherches de Jacobi avec celles de Lie et Mayer, l'auteur parvient à ce résultat :

Si l'on a m intégrales, satisfaisant à certaines conditions, le nombre des variables dans les équations canoniques pourra être abaissé de 2 m unités.

L'auteur démontre ce théorème indépendamment des équations aux dérivées partielles.

Dans son Mémoire, il expose aussi une courte théorie de l'intégration des systèmes simultanés d'équations canoniques.

---

(1) Ermakof, professeur de Mathématiques à l'Université de Kief. — *Intégration des équations différentielles de la Mécanique. Intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre.* — Kief, 1877.

Voici le résumé détaillé du travail de M. Ermakof :

Dans les §§ 1-7, l'auteur expose les procédés d'intégration des équations simultanées aux différentielles ordinaires et des équations linéaires aux dérivées partielles. Ces théorèmes servent d'introduction à l'intégration des équations canoniques.

Dans les §§ 8-10, il donne la condition à laquelle doit satisfaire une intégrale des équations canoniques ; il introduit le symbole de Poisson ; il établit l'identité donnée par Donkin, et en déduit le théorème de Poisson, à l'aide duquel de deux intégrales on peut en tirer une troisième.

Dans les §§ 11-14, sont établies les formules les plus générales pour la transformation des équations canoniques, de manière que les équations transformées conservent encore la forme canonique.

L'auteur démontre, dans le § 15, que l'intégration des équations canoniques peut être ramenée à l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Les §§ 16-18 contiennent quelques conséquences des formules de transformation des équations canoniques, et la démonstration d'une propriété de leurs intégrales.

Dans le § 19, on démontre qu'à l'aide de la moitié du nombre des intégrales satisfaisant à certaines conditions, on peut obtenir les intégrales restantes des équations canoniques, ainsi que l'intégrale de l'équation aux différentielles partielles.

Les §§ 20-21 contiennent la démonstration d'une propriété d'un système d'intégrales canoniques, et de l'existence d'une multitude infinie de systèmes d'intégrales canoniques.

Dans les §§ 22-23, sont données les conditions de l'existence simultanée de certains systèmes d'équations canoniques.

Dans le § 24, on démontre que l'intégration de m systèmes canoniques simultanés d'équations à $2n+m$ variables peut se ramener à l'intégration d'un seul système canonique d'équations à $2n+m$ variables.

Le § 25 contient la démonstration d'une propriété des intégrales des équations canoniques.

Dans les §§ 26-28, se trouve exposée la méthode de Jacobi pour trouver des intégrales telles que les parenthèses de Poisson, formées avec ces intégrales, se réduisent identiquement à zéro.

Le § 29 fait voir que, si l'on a m intégrales satisfaisant à certaines conditions, on peut abaisser de $2m$ le nombre des variables des équations canoniques.

Dans les §§ 30-31, on donne une autre méthode d'abaissement du nombre des variables, un peu différente de la précédente.

Dans les §§ 32-33, on considère quelques cas particuliers d'équations canoniques.

Le § 34 traite de la méthode de la variation des constantes arbitraires pour les équations qui se refusent à l'intégration directe.

L'auteur fait voir, dans le § 35, que, si les formules de transformation des équations canoniques contiennent m constantes arbitraires qui n'entrent ni dans les équations données, ni dans les équations transformées, on peut alors trouver, au moyen des quadratures, n intégrales indépendantes de la forme des équations données.

A partir du § 36, l'auteur consacre spécialement le reste du Mémoire à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Dans les §§ 36-37, il donne les formules générales pour l'intégration des équations aux dérivées partielles.

Dans les §§ 38-40, il expose une méthode pour obtenir l'intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles ; il donne les conditions de l'existence simultanée de plusieurs équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue, et il développe une méthode pour trouver une intégrale complète de plusieurs équations aux dérivées partielles.

Dans les §§ 41-42, il fait voir comment de l'intégrale complète on déduit l'intégrale générale.

Dans les §§ 43-44, il présente l'intégrale complète sous différentes formes, et expose une méthode de résolution du problème de Cauchy.

L'auteur termine son Mémoire par une courte esquisse historique du développement de la question traitée, et montre que le contenu des §§ 24, 29, 35 et 44 forme une partie de son Mémoire complétement indépendante, non-seulement au point de vue de l'exposition, mais encore au point de vue du fonds même.

Le travail de M. Ermakof mérite une attention toute spéciale, à cause de la clarté de l'exposition, qui forme un tout complet, et de la richesse des matériaux scientifiques que l'on y trouve.

A la fin du Mémoire, l'auteur donne une liste des ouvrages qui contiennent la littérature de cette question.

Nous regrettons de ne pas rencontrer, dans cette liste, les noms des géomètres russes : Ianichefsky, Beyer, Zernof, Jiroukhine, Sokolof. Nous n'y voyons pas non plus mentionnés les travaux de Boole, de Strauch, de Du Bois-Reymond, non plus que le Mémoire de Hoüel, portant le même titre : « *Thèse de Mécanique :* Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique. (1855).»

N. BOUGAÏEF.

GEELMUYDEN (H.). — OM INDFLYDELSEN AF BANENS EXCENTRICITET PAA DEN VARMEMÆNGDE, SOM EN HIMMELLEGEME MODTAGER FRA SOLEN (1).

L'auteur commence par développer l'expression de la quantité de chaleur qu'une planète reçoit du Soleil dans un certain temps assez court, pendant lequel l'excentricité de l'orbite peut être considérée comme constante, spécialement pendant le temps de la révolution; cette expression est, comme on sait, proportionnelle au petit axe de l'ellipse. Il trouve ensuite comment cette expression varie avec l'excentricité, toutes choses égales d'ailleurs. Il en fait l'application, en passant, à la Terre, pendant la période historique astronomique (les 2000 dernières années), durant laquelle on sait que l'excentricité a diminué, et par suite aussi la chaleur annuelle. Il compare cette action avec une autre, due à la même cause, savoir l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune; tandis que la longitude de la Lune a diminué, en 2000 ans, d'environ $\frac{1}{2}$ seconde ou de 0,00000021 de sa propre valeur, la diminution de la chaleur reçue annuellement par la Terre pendant la même période, exprimée également en parties de sa propre valeur, est 65 fois plus grande.

Pour trouver un moyen plus simple de comparer les différents cas, l'auteur recherche d'abord quelle variation il faudrait attribuer à la distance moyenne a pour qu'elle équivalût à une variation

(1) *Sur l'influence de l'excentricité de l'orbite sur la quantité de chaleur qu'un astre reçoit du Soleil.* (*Archiv for Mathematik,* t. I; Christiania, 1876).

donnée de l'excentricité e, et il trouve

$$\frac{\delta a}{a} = -\frac{1}{2}e\,\delta e\left(1 - \frac{3}{2}e + \frac{11}{8}e^2 - \ldots\right).$$

Il cherche de même la distance x par laquelle il faudrait remplacer a pour produire dans l'apport de la chaleur annuelle la variation qui est réellement produite par le changement de e en e'; il obtient

$$\frac{x - a}{a} = \frac{(e - e')(e + e')}{4}\left(1 - \frac{3}{2}e + \frac{49e^2 + 39e'^2}{64} - \ldots\right).$$

Afin de pouvoir appliquer ces résultats à la Terre pour un intervalle de temps considérable, il a fait usage des équations données par Le Verrier (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. II), pour le calcul de l'excentricité à une époque quelconque, après avoir toutefois calculé les influences des corrections sensibles apportées depuis la publication de ce travail aux masses des planètes; les valeurs ainsi trouvées ne sont pas cependant notablement différentes des valeurs calculées par M. Le Verrier. L'auteur donne ensuite quelques exemples de l'influence exercée par cette cause sur la chaleur annuelle; il trouve ainsi que la diminution subie par l'excentricité depuis 70000 ans a produit la même diminution de chaleur que si la Terre s'était éloignée annuellement de 0,21 milles géographiques du Soleil. La plus grande valeur que puisse prendre l'excentricité de l'orbite terrestre est, suivant l'auteur, 0,0667; la chaleur reçue par la Terre pendant une révolution dans de telles circonstances surpasse d'autant la chaleur qui serait reçue dans le cas d'une orbite circulaire, que si la Terre eût parcouru un autre cercle d'un rayon plus court de 22213 milles.

M. Geelmuyden étudie enfin le cas des comètes; pour avoir une unité commode, il compare la chaleur reçue par la comète avec la chaleur annuellement reçue par la Terre, en faisant abstraction de l'influence que la nature physique propre d'une sphère peut exercer sous ce rapport. On reconnaît que la plupart des comètes reçoivent, pendant une révolution, à peu près la même quantité de chaleur que la Terre dans une année, que le temps de la révolution soit long ou court; et c'est là une conséquence naturelle de ce que les comètes ne peuvent être visibles pour nous que si la distance périhélie qui, pour la plupart, est un quart du paramètre, est inférieure ou très-peu supérieure au rayon de l'orbite terrestre. L'expression de la chaleur reçue pendant une révolution peut, en effet, se mettre aussi sous une forme telle qu'elle est inversement proportionnelle à la racine carrée du paramètre de l'orbite. Comme une comète reçoit évidemment la plus grande partie de sa chaleur dans la courte période où elle se trouve dans le voisinage du Soleil (ce dont on indique quelques exemples), l'auteur, en terminant, propose cette idée, que les énormes différences de température qui en résultent peuvent être la cause de la consistance singulière observée dans les comètes, ou, en d'autres termes, que leur aspect vaporeux est une conséquence de l'excentricité de leurs orbites; il pense également que toutes les comètes à nous connues sont anciennes dans le système solaire, parce que les nombreuses orbites paraboliques calculées ne sont que des représentations inexactes d'ellipses allongées.

PICARD. — APPLICATION DE LA THÉORIE DES COMPLEXES LINÉAIRES A L'ÉTUDE DES SURFACES ET DES COURBES GAUCHES. — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris; juin 1877. In-4°, 40 p.

La première Partie de ce travail est consacrée à l'étude des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. M. Picard est amené à étudier ces courbes par la considération des surfaces réglées, dont les génératrices font partie d'un complexe. Le plan tangent en un point d'une telle surface ne coïncide pas en général avec le plan correspondant à ce point dans le complexe. Sur chaque génératrice il y a deux points seulement jouissant de cette propriété. Le lieu des points ainsi obtenus forme sur la surface une courbe telle, que ses tangentes appartiennent au complexe linéaire dont font partie les génératrices de la surface. Cette courbe est de plus une ligne asymptotique de la surface. Inversement, toute courbe dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire admet le mode précédent de génération. Cela permet d'obtenir immédiatement les équations générales des courbes jouissant de cette propriété. Ces courbes possèdent un certain nombre de points remarquables qui n'appartiennent pas en général à une courbe gauche, nous voulons parler des points où la tangente a avec la courbe un contact de second ordre. On peut facilement se rendre compte de la forme de la courbe dans le voisinage de ces points.

M. Picard termine la première Partie en considérant les courbes unicursales dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Après avoir donné leurs équations, il démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe plane unicursale d'ordre m puisse être considérée comme la projection d'une courbe de degré m dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire ayant son axe perpendiculaire au plan de la courbe plane est que celle-ci ait un point d'inflexion à l'infini. On déduit aisément de là qu'une courbe unicursale d'ordre m, de l'espèce qui nous occupe, a $2(m-3)$ points où le contact de la tangente est du second ordre.

La seconde Partie est consacrée plus particulièrement à l'étude des surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire. M. Picard donne d'abord une propriété caractéristique des équations différentielles de Riccati : le rapport anharmonique de quatre solutions quelconques de cette équation est une constante. On déduit facilement de là qu'une génératrice quelconque rencontre quatre lignes asymptotiques données sur la surface en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Si l'on connaît sur une surface réglée deux lignes asymptotiques, la courbe des autres est ramenée à une seule quadrature : c'est ce qui arrive dans le cas où les génératrices de la surface font partie d'un complexe linéaire. On a vu en effet dans la première Partie qu'on pouvait obtenir immédiatement une ligne asymptotique de cette surface ; mais cette ligne, rencontrant en deux points chaque génératrice, peut être comptée pour deux.

Il peut arriver que les génératrices d'une surface réglée appartiennent à une infinité de complexes linéaires. Une ligne asymptotique correspond alors sur la surface à chacun des complexes. On a dans ce cas toutes les lignes asymptotiques. Les résultats généraux sont alors appliqués à certaines surfaces réglées unicursales, en particulier aux surfaces gauches du troisième ordre, et aux surfaces du quatrième ordre ayant pour courbe double une cubique gauche. M. Picard indique ensuite une classe étendue de surfaces réglées algébriques dont toutes les lignes asymptotiques sont algébriques.

Les derniers paragraphes sont consacrés à indiquer l'analogie qui existe entre l'étude des surfaces réglées et celle des surfaces ayant un système de lignes de courbure circulaire. Cette analogie trouve son point de départ dans le théorème suivant : « Un cercle de courbure quelconque de la surface rencontre quatre lignes de courbure de l'autre système en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. » De ce théorème résultent les mêmes conséquences que celles qui ont été signalées pour la recherche des lignes asymptotiques des surfaces réglées. Nous retrouvons ici des surfaces analogues aux surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire : ce sont les surfaces enveloppes d'une série de sphères coupant une sphère donnée sous un angle constant. On connaît *a priori* sur ces surfaces une ligne de courbure du second système rencontrant en deux points chaque cercle de courbure du premier système.

On peut obtenir enfin des surfaces analogues aux surfaces réglées dont les génératrices font partie de deux et par suite d'une infinité de complexes linéaires, en considérant des surfaces enveloppes d'une série de sphères coupant deux sphères données et par suite une infinité de sphères sous des angles constants.