BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 185-207
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_185_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HOPPE (Dr R.), Professor an der Universität Berlin. — TAFELN ZUR DREISSIGSTELLIGEN LOGARITHMISCHEN RECHNUNG. — Leipzig, Koch; 1876. Grand in-8°, 16 p.

Les calculs pratiques n'exigent presque jamais une approximation supérieure à celle que donnent les Tables logarithmiques construites avec 7 ou 8 décimales. Mais il n'en est pas de même des calculs théoriques, relatifs à certaines parties de l'Analyse qui confinent à la Théorie des nombres. Là on rencontre des formules, exigeant pour leur vérification l'emploi de Tables beaucoup plus approchées, auxquelles, par cette raison même, il est impossible de donner la forme développée des Tables ordinaires. On a proposé plusieurs moyens pour atteindre ce but au moyen de tableaux d'une étendue restreinte, et l'un des plus simples et des plus ingénieux est celui qu'a indiqué, en 1624, le grand calculateur Briggs, page 32 de son *Arithmetica logarithmica,* où l'on trouve une Table de moins d'une page, pouvant donner par un calcul très-court, avec 15 décimales, le logarithme correspondant à un nombre ou le nombre correspondant à un logarithme. Cette méthode de Briggs, n'ayant pas attiré l'attention qu'elle méritait, fut oubliée pendant un siècle, puis réinventée successivement par Flower, par Leonelli, et sans doute par d'autres. Aujourd'hui elle a pris place dans la plupart des recueils de Tables.

Mais, tandis que, le plus souvent, on donne les Tables abrégées pour le calcul des logarithmes décimaux, c'est, au contraire, le calcul des logarithmes naturels qui est le plus important pour les besoins théoriques. Leonelli est le premier, à notre connaissance, qui ait construit une Table abrégée de logarithmes naturels avec 20 décimales (1). Mais cette approximation même peut n'être pas suffisante, et M. Hoppe a rendu un vrai service aux calculateurs

(1) M. Hoppe, dans sa Préface, affirme à tort que l'on ne possède de pareilles Tables que pour les logarithmes vulgaires, et avec 12 décimales au plus. Indépendamment de la Table de Leonelli, reproduite dans notre *Recueil de Formules et de Tables numériques*, *voir* le *Recueil* de Schrön, Table dernière.

en publiant ses Tables à 30 décimales dans le système naturel. Outre l'avantage d'éviter à la fin du calcul une conversion en logarithmes vulgaires, les logarithmes naturels donnent lieu à des simplifications spéciales, que l'on ne trouverait pas dans les autres systèmes.

L'usage des nouvelles Tables est fondé sur une décomposition du nombre donné en facteurs, d'après la formule suivante :

$$y\left(1+\frac{n_2}{100}\right)\left(1+\frac{n_3}{1000}\right)\cdots\left(1+\frac{n_h}{10^h}\right)=1-z,$$

où y est le nombre donné x multiplié ou divisé par un nombre p, d'un ou de deux chiffres, que l'on choisit de manière que le premier chiffre du résultat soit un 9, ce résultat étant divisé ensuite par la puissance de 10 immédiatement plus grande que x. On multiplie y par $1+\frac{n_2}{100}$, n_2 étant le complément à 9 du second chiffre décimal de y; puis le résultat par $1+\frac{n_3}{1000}$, n_3 étant le complément à 9 du troisième chiffre de y, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à un facteur $1+\frac{n_h}{10^h}$ dont le logarithme soit égal à $\frac{n_h}{10^h}$ dans l'ordre d'approximation proposé. Alors le logarithme du produit $1-z$ sera égal à $-z$. La Table donnant d'ailleurs les logarithmes de chacun des facteurs $1+\frac{n_2}{100}$, $1+\frac{n_3}{1000}$, ..., on pourra, de l'égalité précédente, tirer le logarithme de y, d'où l'on conclura immédiatement celui de x.

Le problème inverse, de trouver le nombre correspondant à un logarithme donné, se résout avec la même facilité.

On pourrait appliquer à ce calcul les remarques qu'a faites M. F. Burnier, et que nous avons reproduites dans une Note insérée au tome VIII des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, p. 188. J. H.

MANSION (PAUL), professeur à l'Université de Gand. — THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE. — Paris, Gauthier-Villars, 1 vol. in-8°, 288 p.

Le Livre de M. Mansion rendra service à tous ceux qui veulent se mettre au courant des travaux, anciens ou récents, qui ont été faits sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Outre l'exposition des principales vérités acquises, les lecteurs y trouveront une foule de précieux renseignements historiques et bibliographiques.

L'Ouvrage est divisé en trois Livres, où l'on trouvera exposées les méthodes de Lagrange et de Pfaff, de Jacobi, de Cauchy et de Lie; enfin, dans un Appendice, la méthode de Lie est exposée en tant que synthèse des idées antérieures.

Dans l'Introduction qui précède ces trois Livres, M. Mansion donne, d'après Lagrange, la définition du problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, définition qu'il fait suivre de l'interprétation géométrique donnée par M. Lie. Il indique en outre et discute les procédés qui permettent de faire disparaître la variable indépendante des équations en question.

Le Livre premier contient l'analyse des travaux de Lagrange et de Pfaff, analyse aussi intéressante au point de vue historique qu'utile au point de vue pratique, car les méthodes de ces géomètres se trouvent être souvent particulièrement commodes dans les applications. Les recherches de Lagrange sur les équations linéaires et non linéaires, la généralisation de ces recherches donnée par Jacobi en 1827 et où les calculs de Pfaff se trouvent refaits en sens inverse, la méthode de Pfaff lui-même conduisant à intégrer n systèmes d'équations simultanées dont chacun ne peut être formé qu'après l'intégration complète de tous les précédents; la réduction indiquée par Jacobi en 1836, et bien antérieurement par Cauchy, fondée sur le choix des valeurs initiales des variables comme constantes arbitraires, sont ensuite exposées.

Le second Livre est consacré à la méthode de Jacobi et de Bour, aux perfectionnements de cette méthode dus à Weiler et à Clebsch, aux méthodes de Korkine, de Boole et de Mayer. On trouvera au début l'exposition de la *Nova Methodus*, puis l'extension aux équations simultanées donnée par Bour et trouvée par lui indépendamment des travaux de Jacobi, qui n'ont été publiées qu'en 1862; vient ensuite la simplification de Weiler, telle que Clebsch l'a exposée, ou plutôt la simplification que Clebsch a exposée à propos du travail de Weiler : car, ainsi que M. Mayer l'a montré récemment, la portée des deux simplifications n'est pas la même. De là, M. Mansion passe aux méthodes de Korkine et de Boole, qui procèdent par changement de variables, et dont la première s'applique aux équations simultanées non linéaires, et la seconde seulement aux équations linéaires. La méthode de M. Mayer, qu'on rencontrera ensuite, s'applique aussi aux équations linéaires et permet d'opérer une réduction considérable dans le nombre des intégrations, quand on l'applique aux équations linéaires auxquelles conduit la méthode de Jacobi.

Le Livre troisième contient d'abord l'exposé de la méthode de Cauchy. M. Mansion a particulièrement utilisé le travail où Cauchy lui-même, en 1841, a repris l'exposition, sous une forme plus générale, de la méthode qu'il avait fait connaître en 1818 : il a pu montrer ainsi comment cette méthode pouvait s'appliquer à certains cas singuliers qui semblent tout d'abord devoir lui échapper, par exemple au cas des équations homogènes par rapport aux dérivées partielles. Enfin M. Mansion résume l'exposition faite par M. Mayer de la méthode de M. Lie, où cette méthode est considerée comme une extension de la méthode de Cauchy, puis dans un court Appendice donne, au moyen des idées de M. Lie lui-même, un aperçu synthétique des méthodes principales.

Nous devons dire, en terminant, que M. Mansion a donné, au début de son Ouvrage, une excellente analyse de son travail, analyse dont nous avons largement profité pour ce qui précède.

J. T.

ZEUTHEN (H.-G.). — Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques (¹).

M. Salmon a trouvé (²), à une près, les relations qui ont lieu entre les nombres des singularités ordinaires d'une surface algébrique qu'on regarde, à la fois, comme lieu de points et enveloppe de plans. M. Cayley a trouvé (³) la relation qui restait encore à obtenir, et en même temps il a étendu cette théorie par l'introduction de plusieurs singularités extraordinaires. D'autres ont été introduites plus tard par M. Zeuthen (⁴), qui a toutefois, immédiatement après, exprimé quelques doutes (⁵) sur quelques-uns des coefficients des termes introduits par M. Cayley et lui-même. Ces doutes l'ont engagé à entreprendre une nouvelle et uniforme déduction, par le principe de correspondance, des formules dont il s'agit, et une étude détaillée de toutes les singularités auxquelles il avait égard, y compris plusieurs singularités nouvelles. Le Mémoire actuel est le fruit de ce travail.

Afin de rendre compte ici des nouvelles formes des équations numériques auxquelles ont conduit cette révision et cette extension, il nous sera commode de renvoyer pour la plupart des notations à la troisième édition de la *Geometry of three Dimensions* de M. Salmon (⁶). Celles de M. Zeuthen, dont nous ferons aussi usage ici, n'en diffèrent que par la circonstance qu'il désigne par k et h les nombres *plückériens* des génératrices doubles des cônes projetant la courbe double et la courbe cuspidale (et non pas seulement les nombres des points doubles *apparents* de ces courbes), qu'il n'a pas besoin du nombre θ des points de singularité inexpliquée, regardant ces points comme faisant partie des singularités déjà introduites par les notations de χ' et B', et enfin qu'il fait un usage analogue des notations k', h', χ et B. Il désigne encore par U le nombre

(¹) *Mathematische Annalen*, t. X ; 1876.

(²) *Transactions of the Royal Irish Academy*, t. XXIII. *Voir* aussi les deux premières éditions de la « *Geometry of three Dimensions.* »

(³) *A Memoir on the Theory of reciprocal surfaces.* (*Philosophical Transactions*, 1869 et 1871).

(⁴) *Sur les droites multiples des surfaces.* (*Mathematische Annalen*, t. IV).

(⁵) *Note sur la théorie des surfaces réciproques.* (*Mathematische Annalen*, t. IV).

(⁶) Pages 539 et 549, ou pages 605 et 616 dans l'édition allemande de M. Fiedler.

des points uniplanaires, par O le nombre des plans dont les sections ont des points triples en des points simples de la surface, par U′ et O′ les nombres des singularités réciproques, et par f, d, g, e, i ceux des points doubles et stationnaires de la courbe double, des points doubles et stationnaires de la courbe cuspidale, et des points d'intersection de ces deux courbes qui se trouvent aux points doubles à un seul plan tangent (double), qui est le lieu de droites rencontrant la surface en quatre points coïncidents, et qui, de son côté, n'a qu'un seul point de contact. Selon le résultat principal d'un Mémoire précédent du même auteur ([1]), nous n'avons pas besoin de notations f', d', g', e' et i', dont les significations ne différeraient pas de celles de f, d, g, e et i.

Avec ces notations on aura les équations suivantes, où nous ne ferons pas les réductions qui cacheraient les origines des différents termes :

$$
\begin{aligned}
a &= a',\\
n(n-1) &= a + 2b + 3c,\\
a(a-1) &= n + 2\delta' + 3\varkappa',\\
c - \varkappa' &= 3(n-a),\\
b(b-1) &= q + 2k + 3\left\{\gamma + \sum{}'[\eta'(\nu'-4) + 2\eta'\zeta'] + d\right\},\\
c(c-1) &= r + 2h + 3(\beta + 2O' + e),\\
a(n-2) &= \left[\varkappa - B - \sum(\eta + 2\zeta)\right] + \rho + 2\sigma + \sum[x(\mu-2)],\\
b(n-2) &= \rho + 2\beta + 3\gamma + 3t + 9O' + \sum[y(\mu-2)],\\
c(n-2) &= 2\sigma + 4\beta + \gamma + 8\chi' + 16B' + 12O' + \sum[z(\mu-2)],\\
a(n-2)&(n-3)\\
&= 2\left\{\delta - 3U - \sum\left[\frac{\nu(\nu-1)}{2} + 2\nu\eta + 3\nu\zeta + \frac{4\eta(\eta-1)}{2}\right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. + 6\eta\zeta + \frac{9\zeta(\zeta-1)}{2} + \zeta\right]\right\}\\
&\quad + 3\left[ac - 3\sigma - \chi - \sum(xz)\right] + 2\left[ab - 2\rho - j - \sum(xy)\right]\\
&\quad + \sum[x(\mu-2)(\mu-3)],
\end{aligned}
$$

([1]) *Sur une classe de points singuliers des surfaces.* (*Mathematische Annalen*, t. IX).

$$b(n-2)(n-3)$$
$$=4\left\{k-3t-3O'-\sum\left[\frac{y(y-1)}{2}\right]\right.$$
$$\left.-\sum{}'\left[u'+2\zeta'(\nu'-3)+\frac{3\eta'(\eta'-1)}{2}+\eta'\zeta'+\frac{6\zeta'(\zeta'-1)}{2}\right]-f\right\}$$
$$+\left[ab-2\rho-j-\sum(xy)\right]$$
$$+3\left[bc-3\beta-2\gamma-12O'-\sum(yz)-\sum{}'(\nu'+4\eta'+4\zeta')-i\right]$$
$$+9O'+\sum[y(\mu-2)(\mu-3)],$$

$$c(n-2)(n-3)$$
$$=6\left\{h-6\chi'-12B'-U'-4O'-\sum\left[\frac{z(z-1)}{2}\right]-\sum{}'(\zeta')-g\right\}$$
$$+\left[ac-3\sigma-\chi-\sum(xz)\right]$$
$$+2\left[bc-3\beta-2\gamma-12O'-\sum(yz)-\sum{}'(\nu'+4\eta'+4\zeta')-i\right]$$
$$+18O'+\sum[z(\mu-2)(\mu-3)],$$

$$\sigma+2r-3c-4j'-3\chi'-14U'+2O'-\sum{}'(2\mu'+\nu'+8\eta'+11\zeta')$$
$$=\sigma'+2r'-3c'-4j-3\chi-14U+2O-\sum(2\mu+\nu+8\eta+11\zeta),$$

et celles qui en résultent par le principe de dualité.

Abstraction faite des différences dues aux altérations des notations et aux nouveaux termes qui sont introduits, les formules indiquées ici diffèrent de celles qu'on trouve aux endroits cités par plusieurs termes contenant χ', B', η' et ζ'.

Dans les formules actuelles on a supposé que les singularités se présentent de la manière la plus générale que permet leur définition; mais, en ayant égard à l'origine des termes respectifs, on trouve sans difficulté les modifications que peuvent subir les formules dans des cas particuliers. Le Mémoire contient aussi des exemples de ces modifications.

La détermination des coefficients se fait par une étude détaillée des propriétés des différents points et plans singuliers. Cette étude repose notamment sur la discussion des dégénérescences que subit un cône circonscrit pour des positions particulières du sommet; le but de la Note précédente du même auteur ([1]) a été de faciliter cette discussion. Parfois, lorsque cette étude directe des propriétés des points et plans singuliers, qui conduit à la détermination des coefficients des équations numériques, a été trop difficile, l'auteur suit une marche inverse, en déterminant *a posteriori* un coefficient par la déduction d'équations numériques incomplètes, et en se demandant ensuite la propriété géométrique du point ou plan singulier exprimée par la valeur trouvée du coefficient.

Une grande partie des propriétés trouvées dans le Mémoire sont relatives aux plans tangents stationnaires et doubles de la surface qui ont les différents points singuliers pour points de contact, et aux branches de la courbe cuspidale et double qui sont tangentes aux plans singuliers.

On trouve, par exemple, que chacun des deux plans tangents en un point biplanaire est en général (si l'on regarde la surface comme lieu de points) un plan tangent quadruple de l'enveloppe des plans tangents stationnaires; les génératrices de contact, mais non pas les branches correspondantes de l'arête de rebroussement de la développable, passent par le point biplanaire. Chacun des deux plans tangents comptant pour trois plans tangents menés à la surface par les droites qui s'y trouvent, le principe de dualité montre qu'un plan biponctuel contient en général (si l'on regarde la surface comme enveloppe de plans) deux points singuliers, qui sont des points triples de la surface (à un seul plan tangent), et des points quadruples de la courbe cuspidale. Ces plans et points singuliers remplacent les plans et points *of unexplained singularity* de M. Cayley. H. Z.

ANDRÉ (Désiré). — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET DE LEURS PUISSANCES.

I. On sait que les fonctions elliptiques, ainsi que leurs puissances d'exposant entier et positif, peuvent être développées par rapport

([1]) *Note sur les singularités des courbes planes.* (*Mathematische Annalen*, t. X).

aux puissances croissantes de la variable. On sait aussi que, dans ces développements, les puissances successives de la variable ont pour coefficients respectifs des polynômes entiers en k^2. Si donc on désigne par π un exposant entier et positif, et par $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ les trois fonctions elliptiques, on peut écrire d'abord

$$\lambda^\pi(x) = \Sigma_q (-1)^q A_q^{(\pi)} \frac{x^{\pi+2q}}{(\pi+2q)!},$$

$$\mu^\pi(x) = \Sigma_q (-1)^q B_q^{(\pi)} \frac{x^{2q}}{(2q)!},$$

$$\nu^\pi(x) = \Sigma_q (-1)^q C_q^{(\pi)} \frac{x^{2q}}{(2q)!},$$

ensuite

$$A_q^{(\pi)} = \Sigma_i \alpha_{q,i}^{(\pi)} k^{2i}, \quad B_q^{(\pi)} = \Sigma_i \beta_{q,i}^{(\pi)} k^{2i}, \quad C_q^{(\pi)} = \Sigma_i \gamma_{q,i}^{(\pi)} k^{2q-2i}.$$

M. Désiré André s'est proposé de déterminer la forme générale, qui était encore inconnue, des coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$, regardés comme des fonctions de q, les indices π et q étant supposés constants. Nous ferons connaître les résultats qu'il a obtenus, mais seulement après que nous aurons exposé d'une manière sommaire la méthode qu'il a employée.

II. Pour former les développements considérés, il suffit de calculer les dérivées d'ordre pair des fonctions qu'on développe. C'est ce que fait d'abord l'auteur du Mémoire. Seulement, afin de mener de front ce qui concerne les trois fonctions elliptiques, il étudie, non pas ces fonctions elles-mêmes, mais une fonction $\varphi(x)$, qui satisfait à l'équation différentielle

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\varphi^2 + \mathfrak{C}\varphi^4,$$

et qui contient les trois fonctions elliptiques comme cas particuliers.

Les dérivées d'ordre pair de $\varphi^\pi(x)$ sont des polynômes entiers en φ, pairs ou impairs en même temps que l'exposant π, de telle sorte que, si l'on suppose cet exposant impair et égal à $2p+1$, on a

$$\frac{d^{2q}.\varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = \Sigma_r F_{q,r}^{(2p+1)} \varphi^{2r+1}.$$

Les coefficients F qui correspondent à une même valeur $2p+1$ de π peuvent être disposés en un triangle, analogue au triangle de Pascal, dont chaque ligne horizontale présente les coefficients d'une même dérivée et chaque colonne verticale ceux d'une même puissance de φ. On constate alors qu'un quelconque des F de ce triangle est égal à la somme des trois F les plus voisins de la ligne horizontale immédiatement supérieure, multipliés respectivement par des facteurs déterminés. Il en résulte un procédé presque mécanique pour calculer de proche en proche les dérivées d'ordre pair, et c'est de l'étude attentive de ce procédé que M. D. André tire toute la suite de son Mémoire.

Supposons que l'on calcule ainsi, mécaniquement, toutes les dérivées d'ordre pair, jusqu'à celle de l'ordre $2q$ inclusivement, mais qu'on n'effectue aucune réduction. On obtient, pour $F_{q,r}^{(2p+1)}$, un polynôme dont chaque terme renferme un coefficient numérique et une puissance, d'exposant positif ou nul, de chacune des quantités Φ, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}$. Le nombre des termes de ce polynôme est celui des chemins qui montent de $F_{q,r}^{(2p+1)}$ à $F_{0,p}^{(2p+1)}$, en passant, de toutes les manières possibles, de chaque F où l'on se trouve à l'un des trois F les plus voisins de la ligne supérieure. Si l'on figure chacun de ces chemins par des points placés aux F où il passe et par des traits joignant ces points successifs, on obtient une ligne brisée présentant des traits de trois sortes, d'où l'épithète de *ternaires* donnée à ces chemins. A chaque chemin ternaire répond un terme du polynôme $F_{q,r}^{(2p+1)}$, et ce terme est le produit de plusieurs facteurs bien déterminés, correspondants respectivement aux divers éléments du chemin, le point de départ excepté. Il suffit donc, pour former le polynôme $F_{q,r}^{(2p+1)}$, de connaître tous les chemins ternaires montant de $F_{q,r}^{(2p+1)}$ à $F_{0,p}^{(2p+1)}$. De là un moyen d'exprimer $F_{q,r}^{(2p+1)}$ d'une façon combinatoire.

Mais on peut aller plus loin. Considérons, en effet, dans ce polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de $\mathfrak{P}$, le terme où cette quantité $\mathfrak{P}$ présente l'exposant $q-e-2i$, le nombre e étant égal, en valeur absolue, à la différence des indices r et p. Ce terme, dont nous désignerons le coefficient par $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$, est la somme de tous les résultats qui proviennent des chemins ternaires offrant chacun $q-e-2i$ traits verticaux. Si, dans ces chemins, on supprime tous ces traits verticaux, ainsi que les points qui les surmontent immédiatement, et qu'on rapproche les tronçons restants, on obtient de nouveaux chemins, dits *binaires*, parce qu'ils ne présentent que des traits de deux sortes, et la considération de ces chemins binaires a pour effet immédiat de permettre d'écrire l'expression combinatoire de $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$, et de séparer, dans cette expression, les facteurs qui dépendent de q de ceux qui n'en dépendent pas.

Or il se trouve justement que le produit des facteurs dépendants de q est le terme général d'un développement dont on connaît la fonction génératrice. Le même fait se reproduit pour le coefficient $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$, regardé comme une fonction de q, les indices p, r et i étant supposés constants. La fonction génératrice de ce coefficient ainsi considéré est une fraction rationnelle, dont le numérateur est d'un degré inférieur à celui du dénominateur et dont le dénominateur peut être immédiatement écrit.

De ce que cette fonction génératrice est une fraction rationnelle, il résulte que $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ est le terme général d'une série récurrente proprement dite; et, comme le dénominateur de cette fraction se présente spontanément décomposé en facteurs du premier degré, on peut obtenir directement la forme générale du coefficient $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$.

Ces résultats, relatifs aux dérivées d'ordre pair de $\varphi^{\pi}(x)$, étant ainsi obtenus, l'auteur du Mémoire les applique d'abord aux développements des fonctions elliptiques et de leurs puissances, en supposant que, dans ces développements, les coefficients des puissances successives de x soient ordonnés, non point suivant les puissances de k^2, mais seulement suivant les puissances des binômes $-1-k^2$, $2k^2-1$, $2-k^2$, par lesquels il faut remplacer ∇ pour passer de la fonction φ aux fonctions elliptiques λ, μ, ν; il considère ensuite les mêmes développements, en y ordonnant cette fois par rapport aux puissances de k^2 les polynômes qui multiplient les puissances successives de x, et c'est ainsi qu'il parvient à la forme générale des coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$, regardés comme des fonctions de la seule variable q.

III. Voici les résultats, tout nouveaux, ce nous semble, qu'obtient ainsi M. D. André :

Les coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$, où q est seul variable, sont chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite.

Cette série, suivant que π est égal à $2p+1$ ou à $2p$, est définie par la première ou la seconde des deux équations

$$\prod_{0}^{p}{}_t\,[z-(2t+1)^2]^{i+1} \times \prod_{p+1}^{p+i}{}_t\,[z-(2t+1)^2]^{p+i+1-t} = 0,$$

$$\prod_{1}^{p}{}_t\,[z-(2t)^2]^{i+1} \times \prod_{p+1}^{p+i}{}_t\,[z-(2t)^2]^{p+i+1-t} = 0.$$

Enfin les coefficients $\alpha^{(\pi)}_{q,i}$, $\beta^{(\pi)}_{q,i}$, $\gamma^{(\pi)}_{q,i}$, lorsque q est égal à $2p+1$, sont tous les trois de la forme

$$\sum_{0}^{p}{}_t\,\Xi_t(q)\,(2t+1)^{2q} + \sum_{p+1}^{p+i}{}_t\,\xi_t(q)\,(2t+1)^{2q},$$

et, lorsqu'il est égal à $2p$, tous les trois de la forme

$$\sum_{1}^{p}{}_t\,\Xi_t(q)\,(2t)^{2q} + \sum_{p+1}^{p+i}{}_t\,\xi_t(q)\,(2t)^{2q},$$

$\Xi_t(q)$ et $\xi_t(q)$ désignant, dans chacune de ces expressions, deux polynômes entiers en q, le premier toujours du degré i et le second du degré $p+i-t$.

Il suffit évidemment de remplacer π par 1 et par 2 pour obtenir tous les résultats relatifs aux fonctions elliptiques elles-mêmes et aux carrés de ces fonctions.

GULDBERG (C.-M.) et MOHN (H.). — ÉTUDES SUR LES MOUVEMENTS DE L'ATMOSPHÈRE. Programme de l'Université de Christiania pour 1876. Première Partie.

Les auteurs ont abordé le développement de la Mécanique de l'atmosphère dans cette première partie de leurs études. Les résultats obtenus sont importants pour la Science météorologique.

Dans le premier Chapitre, les auteurs traitent de l'équilibre de l'atmosphère; ils calculent les transformations qu'éprouve une masse d'air en s'élevant dans l'atmosphère sans absorber ni dégager de chaleur. Ces transformations déterminent l'équilibre stable ou instable de l'atmosphère, d'où dépend la naissance des courants verticaux.

Les courants verticaux produisent les vents, c'est-à-dire les courants horizontaux; dans le deuxième Chapitre, les auteurs traitent les vents aux isobares rectilignes et les vents aux isobares circulaires ou les tourbillons. Ils introduisent le frottement suivant la surface de la Terre et la force déviatrice de la rotation de la Terre. Ils montrent qu'on peut calculer les trajectoires, les isobares, les vitesses, les gradients et les pressions dans un vent, en connaissant les paramètres ou constantes du système. Pour un tourbillon, il n'y a que deux paramètres, savoir : la vitesse maximum et la distance du centre où cette vitesse a lieu.

En traitant les vents aux isobares rectilignes, ils développent l'équation de la trajectoire d'un vent qui passe l'équateur; l'accord avec l'observation sur les vents alizés de l'Atlantique et de l'océan Indien, et sur les moussons d'ouest dans l'océan Indien est très-frappant.

Dans le troisième Chapitre, les auteurs développent les équations d'un courant vertical, et trouvent que la hauteur d'un courant vertical est toujours limitée. Un système de vent est donc composé de deux courants horizontaux, dont l'un se meut suivant la surface de la Terre, et l'autre dans les couches supérieures de l'atmosphère, et d'un courant vertical ascendant ou descendant qui forme l'intermédiaire entre les deux courants horizontaux.

Il résulte de ces études qu'une des premières choses à faire pour assurer le succès de la Météorologie, c'est la création de stations météorologiques dans la hauteur, soit sur les montagnes, soit en ballons.

MOHN (H.) og GEELMUYDEN (H.) — ELEMENTÆR LÆREBOG I ASTRONOMI. — Christiania, 1876. 1 vol. grand in-8°; 325 p., 2 cartes.

Les auteurs de ce Traité ont divisé leur exposition en deux Parties, dont l'une, rédigée par M. Mohn, ainsi que les neuf premiers Chapitres de la suivante, est consacrée à l'*Astronomie sphérique*, c'est-à-dire à l'observation des changements d'aspect produits par le déplacement relatif des corps célestes, pour un observateur placé sur la Terre, sans se préoccuper des mouvements réels qui donnent lieu à ces phénomènes; l'autre, ayant pour objet l'*Astronomie théorique,* ou la recherche des causes de ces changements d'aspect, c'est-à-dire la description des mouvements réels auxquels ils correspondent, et la détermination des actions physiques auxquelles ces mouvements sont dus, a été complétée par M. Geelmuyden, en l'absence de M. Mohn, retenu par une expédition scientifique sur l'Atlantique. Nous croyons, avec les auteurs, que cette méthode, conforme à la marche historique de la Science, présente de grands avantages sur celle que l'on a quelquefois voulu introduire, en prétendant exposer dès le début ce que l'on considère comme les mouvements *réels* des astres, et ce qui n'est au fond qu'une hypothèse approchant un peu plus de la réalité, mais bien éloignée encore de la vérité, et présentant de grandes difficultés aux commençants.

La première Partie comprend cinq Chapitres, dont le premier contient l'étude du mouvement diurne du ciel. La description des phénomènes et les définitions qui s'y rattachent sont données avec une clarté et une précision très-remarquables. Il est, dans cet excellent Traité, fait un judicieux usage des formules mathématiques, qui offrent le moyen le plus clair d'exprimer les lois et de représenter les phénomènes. De nombreuses figures dans le texte viennent en aide au lecteur. Voici les titres des Chapitres :

Première Partie :

I. Mouvement diurne du ciel.
II. Détermination de la position d'un astre par les observations.
III. Mouvement annuel du Soleil.
IV. Mesure et détermination du temps.
V. Précession; nutation; aberration.

La seconde Partie, plus étendue, comprend quinze Chapitres :

I. Figure et grandeur de la Terre.
II. La parallaxe diurne.
III. Rotation de la Terre.
IV. Mouvement des planètes.
V. Les lois de Kepler.
VI. La loi newtonienne de la gravitation.
VII. Mouvement de la Lune.
VIII. Éclipses.

IX. Distance de la Terre au Soleil et son mouvement autour de cet astre.

X. Nouveaux instruments. (En particulier le spectroscope.)

XI. Le Soleil.

XII. Les planètes et leurs satellites.

XIII. Comètes et étoiles filantes.

XIV. Étoiles fixes.

XV. L'Univers.

L'Ouvrage se termine par une liste des petites planètes, par des indications sur l'usage d'une carte céleste et par une Table alphabétique des matières. Les auteurs y ont joint deux cartes lithographiées, l'une représentant l'hémisphère boréal, l'autre la zone équatoriale.

KLEIN (F). — UEBER BINARE FORMEN MIT LINEAREN TRANSFORMATIONEN IN SICH SELBST (1).

Dans ce travail, l'auteur applique le mode imaginé par Riemann, pour représenter une quantité complexe par un point de la sphère, à l'étude des formes algébriques qui sont, dans ce sens, représentées par les sommets des polyèdres réguliers. Il a été conduit indirectement à ces recherches par des problèmes de Géométrie projective. Déjà (*Math. Ann.*, IV, VI) il s'était occupé des questions de mesure dans la Géométrie projective et des mouvements pour lesquels la surface fondamentale du second degré correspondante ne cesse pas de coïncider avec elle-même. Si, en particulier, on suppose que cette surface soit une sphère, il avait montré que les transformations de la surface en elle-même sont identiques avec celles qu'elle subit si, supposant la variable complexe $x+iy$ représentée sur la sphère, on soumet cette variable à une transformation linéaire quelconque

Se trouvant ainsi en possession d'un nouveau moyen pour l'étude des transformations linéaires d'une quantité $x+iy$, l'auteur s'est posé les deux problèmes suivants :

(1) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1875.

Construire tous les groupes finis, composés de telles transformations.

Étudier les formes algébriques qui se reproduisent par les transformations d'un de ces groupes, en s'aidant de la représentation géométrique.

Pour ce qui est de la première question, nous dirons seulement que les groupes cherchés sont représentés par les mouvements qui font revenir sur eux-mêmes les polyèdres réguliers, dont les sommets représentent ces mêmes formes dont le second problème propose l'étude. M. Klein étudie en particulier une forme du douzième ordre représentée par les sommets d'un icosaèdre régulier. Il parvient, par des considérations géométriques, à donner complétement, au sens de la théorie des invariants, le système de formes de cet icosaèdre. Il discute ensuite la résolution de l'équation correspondante, et donne en particulier des résolvantes du sixième et du cinquième degré, qui ont une signification géométrique simple. Si l'on fait attention à la signification des quantités qui entrent dans ces formules, et à la façon dont elles sont obtenues, on reconnaît le lien étroit de ces recherches avec celles de MM. Kronecker, Hermite et Brioschi sur la résolution de l'équation générale du cinquième degré : ces recherches, dans la théorie de M. Klein, reçoivent une interprétation sensible et même élémentaire.

Nous pouvons, grâce à l'obligeance de l'auteur, ajouter deux remarques :

L'une concerne la priorité : M. Schwarz a déjà employé les polyèdres réguliers pour la représentation de formes algébriques (*Journal de Borchardt*, 1875), mais à propos de questions tout à fait différentes.

L'autre est relative à un travail antérieur de M. Klein (*Erlanger Programmschrift*, 1872), où il a fait une étude de la représentation des formes binaires cubiques et quadratiques, qui se déduirait aisément du présent travail. Les points pour lesquels s'annule une forme cubique binaire peuvent être représentés par trois points équidistants de l'équateur de la sphère, la covariante cubique étant représentée de même par les trois points de l'équateur symétriques des précédents par rapport au centre, et la forme hessienne par les deux pôles de l'équateur. Pour représenter une forme biquadratique, on part de la covariante correspondante du sixième degré :

celle-ci peut être représentée par les six points d'intersection de la sphère et d'un système d'axes dont l'origine coïncide avec le centre de la sphère : les quatre points qui représentent la forme fondamentale et les quatre autres points qui représentent la forme hessienne se disposent symétriquement par rapport à ces axes.

WEDEKIND (L.). — BEITRÄGE ZUR GEOMETRISCHEN INTERPRETATION BINÄRER FORMEN ([1]).

Les recherches de M. Wedekind se relient à celles de M. Klein. Nous citerons le théorème suivant : « Soient a, b, c, d quatre points de la sphère, représentant les quantités complexes Z_a, Z_b, Z_c, Z_d; par trois quelconques de ces points faisons passer un plan : les quatre plans ainsi obtenus couperont la sphère suivant quatre cercles A, B, C, D; sur chaque cercle choisissons une direction positive et désignons, par exemple, par $(AB)_d$ l'angle des deux directions positives sur les deux cercles A, B à partir de leur point d'intersection D. »

On a, pour l'expression du rapport anharmonique des quatre points,

$$(a, b, c, d) = \frac{Z_a - Z_c}{Z_c - Z_b} : \frac{Z_a - Z_d}{Z_d - Z_b} = \frac{\sin(AC)_d}{\sin(BC)_d} e^{-i(AB)_d}.$$

Citons encore une méthode pour déduire des zéros d'une forme biquadratique la construction des zéros de la forme covariante de Hesse correspondante.

BÄCKLUND (A.-V.). — UEBER FLACHENTRANSFORMATIONEN ([2]).

Les *transformations de contact*, suivant le nom que leur a donné M. Lie, ont été récemment l'objet d'un grand nombre de travaux. Toutefois on n'avait point traité cette question : Existe-t-il d'autres

([1]) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1876.
([2]) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1875.

transformations par lesquelles le contact du second ordre se conserve? Par exemple, en se bornant au cas de deux dimensions, soient x, y les variables, y', y'' les deux premières dérivées de y; existe-t-il des transformations telles que

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x, y, y', y''), \\ y_1 &= \varphi(x, y, y', y''), \\ y'_1 &= \psi(x, y, y', y''), \\ y''_1 &= \chi(x, y, y', y''), \end{aligned}$$

d'où l'on puisse inversement tirer x_1, y_1, y'_1, y''_1, en fonction de x_1, y_1, y'_1, y''_1? Ce seraient des *transformations d'osculation*. Elles changeraient des courbes ayant un contact du second ordre, en d'autres jouissant de la même propriété. L'auteur montre dans son travail qu'il n'y a pas de transformations particulières d'osculation, que toutes reviennent aux transformations de contact de Lie. Il touche, en terminant, un point de la théorie de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre; il est d'ailleurs revenu sur ce sujet, et plus complétement, dans une Note récente des *Erlanger Berichte*.

MAYER (A.). — UEBER DIE WEILER'SCHE INTEGRATIONSMETHODE DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG [1].

Un an après la publication de la *Nova Methodus* de Jacobi, parut dans le *Schlomilch's Zeitschrift* (1863) un Mémoire de M. Weiler, dans lequel était exposée une nouvelle méthode d'intégration pour les équations aux dérivées partielles, méthode qui exigeait moins d'intégrations que celle de Jacobi : cette méthode, restée d'abord absolument incomprise, fut l'occasion du beau travail de Clebsch *Sur l'intégration simultanée des équations linéaires aux dérivées partielles* (*Borchardt's Journal*, 1865) : Clebsch, entre autres choses, y montra qu'en effet, par une modification convenable de la méthode de Jacobi, on pouvait éviter un certain nombre d'intégrations. La méthode de Weiler, en réalité,

(1) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1875.

n'en fut pas mieux comprise, et si, peut-être, depuis lors, on a parlé ici et là de la méthode de M. Weiler, on a toujours entendu les simplifications indiquées par Clebsch, simplifications qui, ainsi que l'avait reconnu ce dernier, ne s'accordent pas absolument avec celles de M. Weiler.

Dans le volume XX du *Zeitschrift* de *Schlömilch*, M. Weiler s'est efforcé d'exposer sa méthode d'une façon plus claire et plus explicite ; mais on pouvait encore souhaiter, pour la complète intelligence de son procédé, des notations moins obscures, et même, en un point, une base plus solide.

Ce souhait, qu'autorisaient l'importance et la beauté des résultats auxquels M. Weiler était parvenu, est aujourd'hui exaucé, grâce à M. Mayer, qui, dans le travail dont nous rendons compte, a aplani et exposé d'une manière tout à fait intelligible la propre méthode de M. Weiler : M. Mayer a été particulièrement amené à ce travail parce que sa propre méthode avait été, d'une façon très-inutile (à son avis), introduite par M. Weiler dans son exposition.

Dans le § 1er, la méthode de M. Weiler pour l'intégration d'un système complet de deux équations est expliquée et étendue à un système complet d'un nombre quelconque d'équations. Les procédés d'intégration d'un tel système utilisent essentiellement les conditions algébriques qui équivalent à cette hypothèse, que les équations linéaires aux dérivées partielles ont le nombre voulu de solutions communes : au contraire, la méthode de M. Weiler a ceci de caractéristique qu'on ne se sert pour l'intégration que de cette hypothèse elle-même.

Dans les deux paragraphes suivants, cette méthode est appliquée au système complet d'équations auquel Jacobi a ramené l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre : on obtient une manière d'intégrer ces équations progressivement, pas à pas, manière qui, pour le nombre et l'élévation des intégrations à effectuer, ne diffère point de celle de Jacobi ; mais en réunissant, pour ainsi dire, deux *pas* consécutifs, on parvient à la simplification qui appartient en propre à M. Weiler, et qui, dans la pratique, est supérieure à celle de Clebsch. Des travaux plus récents ont montré, à la vérité, que le nombre des intégrations nécessaires pour la résolution complète d'une équation donnée aux dérivées partielles du premier ordre pouvait encore être diminué ; mais les méthodes de Clebsch et de M. Weiler ne doivent pas pour cela être rejetées; car si, dans les méthodes de MM. Lie et Mayer, les intégrations sont toujours moins nombreuses, elles peuvent être plus élevées.

Le dernier paragraphe de ce Mémoire n'a pas un rapport intime avec les travaux de M. Weiler : il est consacré à montrer que le procédé donné par Jacobi pour ramener une équation aux dérivées partielles, qui contient explicitement la fonction inconnue, à une autre qui ne la contient plus, n'est pas, comme on l'avait cru dernièrement, illusoire, mais bien qu'une solution de l'équation transformée conduit toujours à une solution de l'équation proposée. Cette remarque avait déjà été faite par M. Mansion dans sa *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Paris, 1875).

HARNACK (A.). — UEBER EINE BEHANDLUNGSWEISE DER ALGEBRAISCHEN DIFFERENZIALE IN HOMOGENEN COORDINATEN [1].

C'est Aronhold qui a introduit le premier (*Journal de Crelle*, t. 61) les coordonnées homogènes dans l'expression de la différentielle relative à une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre. La méthode employée par Aronhold pour les intégrales d'espèce $p = 0$ est reprise par M. Harnack pour les intégrales irrationnelles d'espèce quelconque. Elle conduit à une démonstration nouvelle du théorème d'Abel. La substitution d'une somme d'intégrales rationnelles à une somme d'intégrales irrationnelles revient, par l'emploi des coordonnées homogènes, à une proposition d'Algèbre dont un cas particulier a été donné par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 13 et 14). En appliquant le théorème de Jacobi à une courbe algébrique non irréductible (telle que le premier membre de son équation se décompose en un produit de deux facteurs), on est conduit à une nouvelle proposition qui, relativement aux différentielles algébriques, revient au théorème suivant :

Une somme d'intégrales relatives aux deux systèmes de points

(1) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1876.

d'intersection de la courbe fondamentale avec un couple de courbes peut être remplacée par la somme des intégrales évaluées le long de la courbe qui détermine sur la première les points d'infinité de l'intégrale, les limites restant les mêmes et les chemins d'intégration se correspondant.

Ce théorème contient le théorème d'Abel; car les points d'infinité d'une intégrale peuvent toujours être obtenus par l'intersection de la courbe fondamentale avec une courbe rationnelle. L'extension du théorème de Jacobi donne ensuite un moyen d'évaluer la somme d'intégrales rationnelles au moyen des fonctions logarithmiques et algébriques.

Outre la somme de valeurs différentielles, relative à un système donné de points d'intersection, l'auteur étudie les fonctions symétriques des valeurs différentielles qui correspondent aux points d'intersection de deux droites infiniment voisines et de la courbe fondamentale. Les fonctions symétriques données par les coefficients de l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré dont les racines sont les n valeurs différentielles susdites conduisent à l'intégration d'équations différentielles qui se présentent comme coïncidences principales dans les connexes.

Pour la formation de cette équation du $n^{\text{ième}}$ degré est utilisée la symbolique de M. Battaglini (*Giornale di Matematiche*, t. IX), où l'on traite la courbe générale du $n^{\text{ième}}$ ordre comme un produit de n droites.

Le problème posé est traité pour les coniques et les courbes générales du troisième et du quatrième ordre. En particulier, l'auteur établit un lien entre la différentielle elliptique, toujours finie, et la simple intégrale d'espèce $p = 0$, et plus généralement entre les différentielles algébriques d'espèces différentes. Ce lieu, que la symbolique de Battaglini met en évidence, a pour origine la même pensée qui a servi à fonder la preuve du théorème d'Abel et qui consiste à faire dériver une courbe du produit de courbes d'ordres moindres.

LIE (Sophus). — Neue Integrations-Methode eines $2n$-gliedrigen Pfaffschen Problems. 26 p. (¹).

La théorie du problème de Pfaff, qui remonte à Pfaff, a été successivement perfectionnée par Gauss, Jacobi, Cayley, Natani, Clebsch, Grassmann, Weiler et Mayer.

Dès 1872, l'auteur avait annoncé, dans une Communication à l'Académie de Christiania, que sa méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre pourrait être étendue au problème de Pfaff dans sa forme la plus générale. Depuis, il a indiqué dans différentes occasions que l'ensemble de ses recherches sur lesdites équations peut être étendu au problème de Pfaff.

Dans le présent Mémoire, l'auteur traite d'une expression

$$X_1 dx_1 + \ldots + X_{2n} dx_{2n} = \Sigma X dx,$$

qui peut être mise sous la forme

$$F_1 df_1 + \ldots + F_n df_n,$$

où $f_1, \ldots, f_n$, $F_1, \ldots, F_n$ désignent des quantités *indépendantes*. Pour effectuer cette réduction, l'auteur cherche d'abord une intégrale du premier système de Pfaff. Ensuite il forme, par élimination et différentiation, une expression réduite

$$X_1^{(1)} dx_1 + \ldots + X_{2n-2}^{(1)} dx_{2n-2} = \Sigma X^{(1)} dx,$$

qui est tellement liée avec $\Sigma X dx$ que, l'intégration de $\Sigma X^{(1)} dx$ étant effectuée, on pourra par différentiation trouver une expression intégrale de $\Sigma X dx$. Ensuite, il forme le premier système de Pfaff appartenant à l'expression $\Sigma X^{(1)} dx$, et cherche une intégrale; puis il forme une troisième expression

$$X_1^{(2)} dx_1 + \ldots + X_{2n-4}^{(2)} dx_{2n-4} = \Sigma X^{(2)} dx.$$

Si l'on a intégré cette nouvelle expression, on pourra intégrer, par des opérations exécutables, d'abord $\Sigma X^{(1)} dx$ et ensuite $\Sigma X dx$.

En poursuivant de cette manière, on trouvera enfin une équation

(¹) *Videnskabs Selskabet i Christiania*, 1873.

différentielle ordinaire à deux variables

$$X_1^{(n-1)}dx_1 + X_2^{(n-1)}dx_2 = \Sigma X^{(n-1)}dx.$$

Ayant intégré cette équation, on trouve, en remontant successivement, des expressions intégrales des quantités

$$\Sigma X^{(n-2)}dx,\quad \Sigma X^{(n-3)}dx,\quad \ldots,\quad \Sigma X^{(1)}dx,\quad \Sigma X dx.$$

Il est impossible de trouver une méthode d'intégration qui demande des intégrations plus simples. S. L.