Bulletin des sciences

mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 165-180

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_165_0>

© Gauthier-Villars, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SCHUBERT (H). — MODULN VIELFACHER BEDINGUNGEN BEI FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG (¹).

Considérant un système de surfaces du second ordre F_2 de la $a^{\text{ième}}$ dimension (*a-stufiges System*), le symbole

$$\mu^b \nu^c \rho^{a-b-c}$$

désigne le nombre des surfaces du système qui passent par b points donnés, qui touchent c droites et $a-b-c$ plans donnés. Chacun de ces $\frac{1}{2}(a+1)(a+2)$ symboles est dit un *caractéristique* a-uple de F_2. Le *module élémentaire* d'une condition a-uple B_a, imposée à F_2, est une fonction linéaire des caractéristiques a-uples, qui exprime le nombre des surfaces d'un système a-uple *quelconque* de surfaces F_2 qui remplissent la condition B_a, ou encore le nombre des surfaces F_2 satisfaisant à la condition B_a et à une condition quelconque $(9-a)$-uple.

Un théorème donné par M. Halphen (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. II, et *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, p. 1074-1077) montre, pour toute condition a-uple imposée à une surface F_2, l'existence d'un module élémentaire. Le cas où $a=1$ a été traité par M. Chasles; presque rien n'a été fait en dehors de cela.

Les conditions dont l'auteur s'occupe sont des *conditions de couple* (*Paarbedingungen*) : en adjoignant à chacune des ∞^1 génératrices rectilignes d'un système d'une surface F_2 une des ∞^1 génératrices de l'autre système, on obtient ∞^2 *couples de droites* appartenant à F_2 : par suite, chaque condition $(a+2)$-uple imposée à un des ∞^2 couples de droites de F_2 est, pour F_2, une condition a-uple; chaque couple est déterminé par 7 constantes; aux conditions 3-uples, ..., 7-uples imposées à un couple répondent, pour F_2, des conditions 1-uples, ..., 5-uples. Ce sont ces conditions qui sont dites *conditions de couple*. Les conditions fondamentales d'un couple

(¹) *Mathematische Annalen*, t. X, p. 318-364.

de droites sont les conditions fondamentales auxquelles peuvent satisfaire les quatre éléments principaux d'un couple de droites, savoir chacune des deux droites, leur point d'intersection et le plan qui les contient.

Au moyen des relations générales entre les conditions fondamentales des éléments principaux incidents, M. Schubert parvient à exprimer toutes les conditions de couple au moyen de certaines d'entre elles qu'il nomme *conditions fondamentales*. Celles-ci se composent des conditions μ, ν, ρ et de sept autres qui peuvent être dites *essentielles*, et dont les modules élémentaires sont donnés par les théorèmes suivants :

1. La condition γ exprime que F_2 touche un plan donné en un point quelconque d'une droite donnée dans ce plan; elle a pour module

$$\gamma = \frac{1}{2}\nu\rho.$$

2. La condition réciproque γ', qui exprime que F_2 touche une droite donnée en un point donné, a pour module

$$\gamma' = \frac{1}{2}\nu\mu.$$

3. La condition g, qui exprime que F_2 contient un rayon d'un faisceau donné, a pour module

$$\delta = \mu\rho.$$

4. La condition x, qui exprime que F_2 contient une droite donnée, a le module suivant, déterminé par M. Hurwitz (à Hildesheim),

$$x = \frac{1}{4}(2\nu^3 - 3\nu^2\mu - 3\nu^2\rho + 3\nu\mu^2 + 2\nu\mu\rho + 3\nu\rho^2 - 2\mu^3 - 2\rho^3).$$

5. La condition w, qui exprime que F_2 touche un plan donné en un point donné, a pour module

$$w = \frac{1}{8}(-2\nu^3 + 3\nu^2\mu + 3\nu^2\rho - 3\nu\mu^2 - 3\nu\rho^2 + 2\mu^3 + 2\rho^3).$$

6. La condition y, qui exprime que F_2 contient une droite

donnée et touche en un point donné sur cette droite un plan passant par cette même droite, a une infinité de modules élémentaires, que l'on obtient tous en donnant dans l'équation

$$y = \frac{1}{8}[2\nu^3\mu + 2\nu^3\rho - 3\nu^2\mu^2 - 6\nu^2\mu\rho - 3\nu^2\rho^2 + 2\nu\mu^3 + 6\nu\mu^2\rho$$
$$+ 6\nu\mu\rho^2 + 2\nu\rho^3 - 4\mu^3\rho - 4\mu\rho^3 + \alpha_1 V + \alpha_2 W]$$

toutes les valeurs possibles aux deux coefficients arbitraires α_1 et α_2, et en faisant

$$V \equiv 2\nu^4 - 5\nu^3\mu - 5\nu^3\rho + 6\nu^2\mu^2 + 8\nu^2\mu\rho$$
$$+ 6\nu^2\rho^2 - 4\nu\mu^3 - 6\nu\mu^2\rho - 6\nu\mu\rho^2 - 4\nu\rho^3 + 4\mu^3\rho + 4\mu\rho^3,$$
$$W \equiv 2\nu^3\mu - 2\nu^3\rho - 3\nu^2\mu^2 + 3\nu^2\rho^2 + 2\nu\mu^3 - 2\nu\rho^3.$$

7. La condition z, qui exprime que F_2 doit contenir deux droites données ayant un point commun, a une infinité de modules élémentaires que l'on obtient en donnant toutes les valeurs possibles aux huit coefficients arbitraires $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_8$ dans l'équation suivante :

$$z = \frac{1}{6}[2\nu^5 - \nu^4\mu - \nu^4\rho + 2\nu^2\mu^3 - 2\nu^2\mu^2\rho - 2\nu^2\mu\rho^2$$
$$+ 2\nu^2\rho^3 - 4\nu\mu^4 + 6\nu\mu^3\rho + 6\nu\mu\rho^3 - 4\nu\rho^4 - 4\mu^4\rho - 4\mu\rho^4]$$
$$+ \beta_1\nu V + \beta_2\mu V + \beta_3\rho V + \beta_4\nu W + \beta_5\mu W + \beta_6\rho W$$
$$+ \beta_7\mu^4(2\mu - \nu) + \beta_8\rho^5(2\rho - \nu).$$

V et W ont le même sens que précédemment.

Ces coefficients arbitraires, qui entrent dans les modules de y et de z, montrent que, entre les 15 caractéristiques quadruples de F_2, il existe deux, et seulement deux, relations indépendantes, savoir

$$V = 0 \quad \text{et} \quad W = 0,$$

et que, entre les 21 caractéristiques quintuples, il existe huit, et seulement huit, relations indépendantes, savoir les six que l'on obtient en multipliant $V = 0$ et $W = 0$ par μ, ν, ρ et les deux suivantes :

$$2\mu^5 - \mu^4\nu = 0,$$
$$2\rho_5 - \rho^4\nu = 0.$$

Il y a donc au plus treize caractéristiques quadruples, et treize caractéristiques quintuples, indépendantes les unes des autres.

Enfin M. Schubert démontre que, pour toute figure déterminée par c constantes, le nombre maximum des caractéristiques a-uples indépendantes les unes des autres est égal au nombre maximum des caractéristiques $(c - a)$-uples indépendantes les unes des autres; par suite, entre les trois caractéristiques simples de F_2, entre les six doubles, entre les dix triples, il n'y a aucune relation. Il y en a 18 entre les 28 sextuples, 30 entre les 36 septuples, 42 entre les 45 octuples. Ces relations se déduisent aisément, par élimination, des nombres élémentaires de la surface F_2 (*Journal de Borchardt*, t. 71, p. 383).

Ces résultats se relient à des résultats analogues relatifs aux coniques dans l'espace, en considérant une des trois *dégénérescences* (*Ausartungen*) de F_2, notamment celle par laquelle les points de F_2 viennent former deux plans confondus, et les tangentes deviennent toutes les sécantes d'une conique située dans ce plan double.

Soient m la condition qui exprime que le plan de la conique passe par un point donné, n la condition que cette conique rencontre une droite donnée, r la condition qu'elle touche un plan donné. L'auteur montre que, entre les trois caractéristiques simples et les six caractéristiques doubles de la conique, il n'y a aucune relation, mais qu'il y en a une, et une seule, entre les dix caractéristiques simples, savoir

$$R \equiv 2n^3 - 3n^2r + 3nr^2 - 2r^3 - 6mn^2 + 4mnr + 12m^2n - 8m^2r = 0.$$

En regardant dans cette formule le plan de la conique comme fixe, c'est-à-dire en faisant $m = 0$, on obtient une formule due à MM. Cremona et Halphen, et qui se trouve p. 406 de la *Géométrie* de Clebsch et Lindemann.

Entre les quatorze caractéristiques quadruples existent quatre, et seulement quatre, relations indépendantes; trois d'entre elles sont les relations

$$mR = 0, \quad nR = 0, \quad rR = 0.$$

D'après cela, pour une conique dans l'espace, il y a au plus trois conditions simples, six doubles, neuf triples, dix quadruples, neuf quintuples, six sextuples, trois septuples, qui soient indépendantes les unes des autres.

SCHUBERT (H.). — Beiträge zur abzählenden Geometrie [1].

Le Mémoire que nous analysons doit être suivi de deux-autres. Le travail de M. Schubert a son point de départ dans la question mise au concours par l'Académie Royale de Copenhague en janvier 1875 sur l'extension de la théorie des caractéristiques aux systèmes des figures géométriques composées avec les points et les plans osculateurs d'une cubique gauche et la détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires. L'auteur a été conduit à plusieurs formules générales, dont quelques-unes sont déjà connues : elles dérivent en partie du *Principe de la conservation du nombre,* en partie du *Principe de correspondance.*

Après une Introduction où il résume les travaux antérieurs et ses propres découvertes, M. Schubert expose, dans la première Section de son Mémoire, les symboles et les notations dont il se sert : il importe de les expliquer ici brièvement.

Une condition est dite *composée* si elle peut être ramenée à plusieurs conditions indépendantes; sinon elle est dite *isolée*. Une condition pourra être *isolée,* tout en se ramenant à plusieurs autres, lorsque ces dernières ne seront point indépendantes. Ainsi les conditions P, μ, ν, qui expriment qu'une courbe plane passe par un point donné, que le plan de cette courbe doit contenir un point donné, qu'elle doit rencontrer une droite donnée sont des conditions *isolées;* la condition qu'une courbe plane passe par un point et en même temps rencontre une droite est composée. Chaque condition est représentée par une lettre symbolique telle que, précédemment, les lettres P, μ, ν.

Le produit de deux conditions est l'ensemble de ces deux conditions : $P\nu$ est la condition qu'une courbe plane passe par un point et rencontre une droite. On comprend, d'après cela, ce qu'est la puissance d'une condition. μ^3 exprime que le plan d'une courbe plane contient trois points donnés.

La *dimension* (*Stufe*) d'une figure (*Gebilde*), dans la définition de laquelle entrent c constantes et qui doit, en outre, satisfaire à

(1) *Contributions à la Géométrie numérique* (*Mathematische Annalen,* t. X, p. 1-116; 1876. (Premier Mémoire).

une condition a-uple isolée ou composée, est $c - a$; l'ensemble de toutes ces figures comprend ∞^{c-a} éléments.

A chaque condition a-uple correspond, pour un système de la $a^{\text{ième}}$ dimension, un certain nombre, savoir le nombre des figures de ce système qui satisfont à cette condition. *Ce nombre sera exprimé par le symbole même de la condition.* Ainsi $P\nu$ exprimera le nombre de coniques d'un système de dimensions qui satisfont à la condition triple $P\nu$.

Si, pour tous les systèmes de la dimension a, les nombres qui correspondent à certaines conditions sont liés par une équation, nous dirons que cette équation lie entre elles les conditions elles-mêmes. Ainsi, pour toutes les courbes planes d'ordre a, on a l'équation

$$P = \mu\nu - a\mu^2.$$

Une telle équation entre des conditions a-uples est satisfaite identiquement lorsque, ayant affaire à une figure dans la définition de laquelle entrent c constantes, on remplace les symboles par les nombres de ces figures qui satisfont respectivement aux conditions a-uples que représentent ces symboles et, en outre, à une même condition $(c - a)$-uple isolée ou composée : cela revient, suivant la terminologie de M. Schubert, à substituer aux symboles les nombres correspondants, dans l'équation proposée multipliée par une condition $(c - a)$-uple; rien n'empêche, d'après cela, de multiplier une équation symbolique entre certaines conditions par une condition b-uple. Par exemple, pour les cubiques planes à point double, l'équation

$$P = \mu\nu - 3\mu^2,$$

multipliée par ν^9, est identiquement satisfaite quand on substitue aux nombres $P\nu^9$, $\mu\nu^{10}$, $\mu^2\nu^9$ leurs valeurs 1392, 2040, 216, et l'on pourra en déduire l'équation

$$\mu^2 P = \mu^3\nu - a\mu^4 = \mu^3\nu,$$

le terme μ^4 étant nul, puisque par quatre points on ne peut pas, en général, faire passer un plan.

Si ε désigne le nombre de systèmes de première dimension de la figure Γ qui, tout en satisfaisant à la définition de Γ, sont *dégénérés* d'une certaine manière, $\varepsilon\zeta$ désignera le nombre de systèmes dégénérés de la même manière, qui satisfont à la condition ζ. De pareils symboles de *dégénérescence* (*Ausartung*) peuvent entrer dans une équation entre des conditions a-uples, pourvu que ζ soit une condition $(a-1)$-uples.

Toute figure définie par c constantes peut être regardée comme l'élément d'un espace à c dimensions. Regardant le point, le plan, la droite, définis par 3, 3, 4 constantes comme les trois éléments fondamentaux, nous entendrons par *lieu* de points, de plans, de droites un système quelconque de points, de plans, de droites, ce système pouvant être des dimensions 0, 1, 2, 3 pour le point et le plan, des dimensions 0, 1, 2, 3, 4 pour la droite. Les lieux sont caractérisés quant à leur degré (*Grad*) par le nombre d'éléments communs qu'ils possèdent avec certaines figures fondamentales, pour lesquelles le tableau suivant fera comprendre la terminologie de M. Schubert.

Figures fondamentales.

	POINT.	PLAN.	DROITE.
0ième dimension.	Point.	Plan.	Droite.
1re dimension...	Axe de points.	Axe de plans.	Faisceau de droites.
2e dimension...	Champ de points.	Réseau de plans.	Champ de droites. Reseau de droites.
3e dimension...	Espace de points.	Espace de plans.	Axe de droites.
4e dimension...	»	»	Espace de droites.

On voit comment ces noms sont composés : il y entre, d'une part, le nom de l'élément principal considéré (point, plan, droite), de l'autre, les mots axe, champ (*Feld*), réseau (*Bündel*), faisceau (*Büschel*), espace, relatifs au *support* (*Träger*) de cet élément et dont les trois premiers sont employés suivant que ce *support* est une droite, un plan ou un point; ce faisceau est l'ensemble des droites situées dans un plan et passant par un point.

A chaque figure fondamentale correspond une condition fondamentale, savoir la condition que le lieu engendré par l'élément considéré ait avec une figure fondamentale donnée, engendrée par le même élément, un élément commun : ces conditions sont nommées et suivies de leurs symboles littéraux dans le tableau ci-dessous, le rang dans lequel se suivent les lettres symboliques indiquant la dimension (0, 1, 2, 3) du lieu considéré : ainsi ν exprime qu'un lieu de *points* de dimension 1, c'est-à-dire qu'une courbe a un *point* commun avec un axe, ou rencontre une droite, etc.

Lieux de points.

p_0	condition	d'espace;	
p_1	»	de champ...............	c;
p_2	»	d'axe..................	c_g, ν;
p_3	»	de point................	b, P, Π.

Lieux de plans.

c_0	condition	d'espace;	
c_1	»	de réseau...............	μ;
c_2	»	d'axe..................	μ_g, ν';
c_3	»	de plan................	M', P', Π'.

Lieux de droites.

s_0	condition	d'espace;	
s_1	»	d'axe..................	g;
s_2	»	de champ...............	g_e, ρ;
s_{11}	»	de réseau...............	g_p, ρ';
s_3	»	de faisceau..............	g_s, t, β;
s_4	»	de droite...............	G, T, B, S.

Un lieu de $a^{\text{ième}}$ dimension, engendré par un élément dans la définition duquel entre c constantes, a avec la figure fondamentale de $b^{\text{ième}}$ dimension, engendrée par le même élément, un système commun d'éléments de dimension $a+b-c$, c'est-à-dire un nombre fini d'éléments communs, si $b=c-a$; *ce nombre fini est le degré du lieu.* Un lieu de droites de deuxième dimension (une congruence) a ainsi deux degrés : le degré de réseau (le nombre de droites de la congruence qui passent par un point), et le degré de champ (le nombre de droites de la congruence qui passent par un point). Les autres degrés sont uniques, si $a+b<c$; la condition d'un élément commun est une condition $(c-a-b)$-uple.

Un lieu est dit *incident* à une figure fondamentale, lorsque chacun de ses éléments fait partie de la figure fondamentale.

Nous pouvons maintenant expliquer rapidement l'objet de la deuxième et de la troisième Section du Mémoire de M. Schubert.

La deuxième Section contient les équations qui relient les conditions fondamentales d'un élément principal, et celles qui existent entre les conditions fondamentales de toutes les figures fondamentales et les conditions fondamentales des *lieux qui leur sont incidents*. On y trouvera, en outre, des applications importantes.

La source des formules de la seconde Section est le *principe de la conservation du nombre* ou le *principe des positions particulières*. Ce principe consiste en ce que le nombre des figures Γ qui satisfont à certaines conditions est indépendant des positions qu'occupent les figures dont ces conditions dépendent, pourvu que ce nombre reste fini. Ainsi le nombre des droites qui satisfont à une certaine condition double Z et qui, en outre, doivent rencontrer deux droites reste le même lorsque ces deux droites se rencontrent : il est, par suite, la somme du nombre des droites qui satisfont à la condition Z et passent par un point α du nombre des droites qui satisfont à la condition Z et sont contenues dans un plan.

La multiplication symbolique donne ensuite d'autres formules.

Les formules entre les conditions fondamentales d'un point c sont les suivantes :

$$c^2 = c_g, \quad c^3 = cc_g = b;$$

pour un plan μ, on a

$$\mu^2 = \mu_g, \quad \mu^3 = \mu\mu_g = \mathrm{M}.$$

Pour la droite g on aura

$$g^2 = g_p + g_e,$$

$$gg_p = gg_e = \frac{1}{2}g^3 = g_s,$$

$$gg_s = g_p^3 = g_e^2 = g^2 g_p = g^2 g_e = \frac{1}{2}g^4 = cg; \quad g_p g_e = 0.$$

Si le point c et la droite g sont incidents l'un à l'autre, on aura

$$cg = c_g + g_e = c^2 + g_e,$$

d'où, par des multiplications symboliques,

$$cg_p = b + g_s = c^3 + \frac{1}{2}g^3,$$

$$cg_s = bg + cg = c^3 g + \frac{1}{2}g^4.$$

Le principe de dualité conduit à des relations analogues pour un plan μ et une droite g, incidents l'un à l'autre.

Pour un point c et un plan μ, incidents l'un à l'autre, on aura

$$c^3 - c^2\mu + c\mu^2 - \mu^3 = 0,$$

$$c^3\mu - c^2\mu^2 + c\mu^3 = 0.$$

Pour deux droites g et h qui se coupent, on aura

$$cg - g_s h + g_p h_e + g_e h_p - gh_s + \mathrm{H} = 0,$$

d'où

$$cgh - g_s(h_p + h_e) + (g_p + g_e)h_s - g\mathrm{H} = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{l} cgh_p - g_s h_s + g_e \mathrm{H} = 0, \\ cgh_e - g_s h_s + g_p \mathrm{H} = 0, \end{array}\right.$$

$$cgh_s - g_s \mathrm{H} = 0.$$

On déduit de là diverses formules importantes relatives aux lieux de degré a incidents à une figure fondamentale et un grand nombre d'applications pour lesquelles nous renvoyons au Mémoire de M. Schubert.

La troisième Section contient les équations où entrent les conditions fondamentales d'une figure composée de deux éléments principaux et les conditions fondamentales de *coïncidence* pour une telle figure, c'est-à-dire les conditions auxquelles elle doit satisfaire pour que les deux éléments principaux viennent se confondre. Ces équations sont obtenues au moyen du principe de correspondance de M. Chasles, de la multiplication symbolique, et des formules de la deuxième Section qui reposent sur le principe de la conservation du nombre. On parvient ainsi, dans la généralisation du principe de correspondance, au terme de la route ouverte par M. Salmon et M. Zeuthen. Nous indiquerons ici quelques formules relatives aux *couples de points*.

Soient c et d les deux points du *couple*, g la droite qui les joint;

les conditions fondamentales simples pourront être représentées symboliquement par

$$c,\ c^2,\ c^3,\quad d,\ d^2,\ d^3,\quad g,\ g_e,\ g_p,\ g_s,\quad G.$$

Soit ε la condition de coïncidence, et soit b le point où, sous la condition ε, les deux points c, d viennent se confondre; on aura les formules suivantes :

$$\begin{aligned} c + d - g &= \varepsilon, \\ c^2 + d^2 + g_e - g_p &= \varepsilon g, \\ cd - g_e &= \varepsilon b, \\ c^3 + d^3 + g_s &= \varepsilon g_p, \\ cdg - g_s = \varepsilon bg &= \varepsilon g_e + \varepsilon b^2, \\ c^2 d + cd^2 - cdg &= \varepsilon b^2. \end{aligned}$$

Ces formules sont suivies de diverses remarques sur leur traduction dans le langage ordinaire et particulièrement sur les trois *espèces de coïncidence* que l'on est amené à distinguer, selon que la droite de jonction peut occuper, à la limite, un nombre fini, ∞^1 ou ∞^2 positions. Dans le second cas, la coïncidence satisfait d'elle-même à la condition fondamentale g, dans le troisième à la condition fondamentale g_p. Par exemple, si l'on considère le couple formé par un point d'une courbe et un point d'une surface, on a un système de la dimension 3, pour lequel les coïncidences correspondent aux points d'intersection de la surface et de la courbe, et sont telles que toute droite passant par le point d'intersection peut être regardée comme une droite de jonction des deux points du couple, en sorte que la condition g_p est remplie d'elle-même.

Nous renverrons encore au Mémoire de M. Schubert pour les formules de correspondance relatives aux figures formées au moyen de deux autres éléments principaux, tels que deux droites, ou une droite et un point, etc.

A ces formules de correspondance se rattachent les *théorèmes de produits* (*Produktensätze*), c'est-à-dire les théorèmes qui expriment les conditions du système formé par les éléments communs à deux autres systèmes engendrés par un seul et même élément au moyen des conditions de ces deux autres systèmes, et en particulier le nombre de ces éléments communs au moyen des nombres qui correspondent aux deux systèmes. Tel est, par exemple, le théorème de Bézout sur le degré de l'équation finale. Les théorèmes relatifs aux systèmes de droites ont été donnés sans démonstration par M. Halphen (*Comptes rendus*, t. LXVIII, p. 141, t. LXXIV, p. 41), et ont été démontrés, depuis, par M. Zeuthen. Tous ces théorèmes se déduisent immédiatement, comme cas très-particuliers, des formules de correspondance données par M. Schubert.

Dans un ordre d'idées analogue, l'auteur emploie la formule

$$c + d - g = \epsilon,$$

relative à un couple de points, pour résoudre une série de problèmes, posés par M. Salmon, sur le nombre des tangentes à une surface telles que, au point de contact, soient confondus un certain nombre de points d'intersection; par exemple, il existe, pour une surface du $n^{\text{ième}}$ ordre,

$$5n(n-4)(7n-12)$$

tangentes telles, que cinq points soient confondus au point de contact,

$$2n(n-4)(n-5)(n+6)(3n-5)$$

tangentes doubles telles que, en l'un des points de contact, quatre points d'intersection soient confondus, en l'autre, deux, etc.

Une autre application plus importante des formules relatives aux couples de points concerne la détermination de nombres se rapportant au contact des éléments de deux systèmes de première dimension formés de courbes ou de surfaces. Par exemple, le degré de la courbe lieu des points de contact de deux surfaces appartenant aux deux systèmes (μ_1, ν_1, ρ_1) et (μ_2, ν_2, ρ_2) est

$$\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1 + \nu_1\nu_2 + \mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1.$$

Le travail de M. Schubert sur la Géométrie numérique comprendra, comme nous l'avons dit au début, deux autres Mémoires qui paraîtront prochainement. On trouvera dans le deuxième Mémoire tous les nombres relatifs aux cubiques planes à point de rebroussement ou à point double qui satisfont aux conditions fondamentales combinées d'une façon quelconque.

Le troisième Mémoire se rapportera à la théorie des cubiques gauches et à leurs divers modes de *dégénérescence*.

VOSS (A.). — UEBER COMPLEXE UND CONGRUENZEN (¹).

Dans sa *Neue Geometrie des Raumes* (²), Plücker a fondé la géométrie des ensembles de lignes à deux ou trois dimensions qu'il a désignées sous le nom de *complexes* et de *congruences*. On trouve dans son livre une théorie des complexes du premier et du second degré qui a été, depuis, complétée et simplifiée par les travaux de Battaglini (³), Klein (⁴), Painvin (⁵), Weiler (⁶).

Dans toutes ces recherches, une certaine surface de quatrième ordre et de quatrième classe, dite *surface singulière* du complexe ou surface de Kummer, joue un rôle essentiel. Ainsi que Plücker l'a établi (⁷), cette surface est le lieu des sommets des cônes du complexe qui se décomposent en deux plans, et l'enveloppe des plans pour lesquels les courbes du complexe se réduisent à un couple de points. M. Pasch a montré (⁸) que cette propriété ne se rencontrait pas que dans les complexes du second ordre. Chaque arête double d'un cône d'un complexe quelconque est, en effet, une tangente double d'une courbe de ce complexe et, à ce titre, peut être dite *ligne singulière* du complexe; un *point singulier*, situé sur elle, à savoir le sommet du cône qui l'admet comme arête double, lui correspond, ainsi qu'un *plan singulier* contenant la courbe du complexe à laquelle elle est doublement

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX, 1875, p. 55.
(²) PLÜCKER, *Neue Geometrie des Raumes*, Bd. I, herausgegeben von Clebsch; Bd. II, herausgegeben von Klein. Leipzig, 1868-1869.
(³) *Atti della R. Accadem. di Napoli*, t. III, 1866; *Giornale di Matematiche*, t. VI, VII, X, XI.
(⁴) *Mathematische Annalen*, t. II, p. 198, 366; t. V, p. 287.
(⁵) Voir *Bulletin*, t. II, p. 268.
(⁶) *Mathematische Annalen*, t. VII, p. 148.
(⁷) *Neue Geometrie*, p. 315.
(⁸) PASCH, *Zur Theorie der Complexe und Congruenzen von Geraden*; Giessen, 1870.

tangente. Le lieu des points singuliers et l'enveloppe des plans singuliers constituent une surface unique; *chaque plan singulier est tangent au point singulier correspondant.*

Ce théorème, si l'on regarde la surface singulière comme une surface focale incomplète de la congruence des lignes singulières, peut être considéré comme une conséquence d'un théorème plus général, relatif aux surfaces focales de congruences, à savoir que chaque droite a d'une congruence est rencontrée en deux points β, γ par deux droites infiniment voisines b, c de la congruence; la surface focale du système est le lieu des points β, γ des plans (ab), (ac); d'ailleurs le plan tangent en β est (ac) et non (ab).

Le travail de M. Voss est une étude géométrique et analytique des complexes, définis par l'équation générale du $n^{\text{ième}}$ ordre en coordonnées de lignes, et des congruences, intersections de tels complexes. Ces complexes possèdent une dualité complète; ils forment des ensembles réciproques en soi, ainsi que les ensembles que l'on en déduit; par suite, les éléments singuliers se correspondent par couples, ainsi que les équations qui les relient.

Il y a lieu de diviser les éléments singuliers du complexe en deux classes. Un cône quelconque du complexe, en tant que cône ponctuel général (*Ordnungskegel*), comprend les singularités qui répondent à celles qui se rencontrent nécessairement dans une courbe ponctuelle générale, à savoir des plans tangents doubles et des plans d'inflexion. Le groupement de ces éléments singuliers correspond au groupement des points doubles et des points de rebroussement d'une courbe quelconque du complexe. Les éléments singuliers de cette nature seront placés dans la première classe. Dans la seconde classe, au contraire, se placent les éléments singuliers non nécessaires : les arêtes doubles et les arêtes de rebroussement d'un cône, les tangentes doubles et les tangentes d'inflexion d'une courbe du complexe. Ces derniers éléments singuliers sont liés étroitement à la surface singulière.

L'étude de cette dernière est comprise dans l'étude plus générale de la surface focale de deux complexes $f = 0$, $\varphi = 0$, de degrés n et m. En un point a passent mn droites de la congruence de ces deux complexes; si deux de ces droites coïncident, a est un point de la surface focale. Celle-ci possède une courbe double dont les points correspondent au cas où un couple des mn droites vient coïncider avec un autre couple; les points pour lesquels trois droites viennent coïncider forment sur la surface focale une courbe cuspidale; la courbe double possède en outre des points triples: enfin la courbe cuspidale et la courbe double se rencontrent en des points qui, pour l'une ou pour l'autre, sont des points singuliers.

Entre les divers nombres qui caractérisent les singularités de la surface focale, on connaît déjà une série de relations fournies tant par la réciprocité de cette surface que par les formules de Plücker et de Salmon; M. Voss donne en outre les formules suivantes, qui permettent d'achever la détermination de ces nombres.

Soient

N l'ordre et la classe de la surface focale;
S le rang de cette surface;
J le nombre des arêtes de rebroussement du cône tangent;
R l'ordre de la courbe cuspidale;
P l'ordre de la courbe d'inflexion;
K le rang de ces deux dernières courbes.

On aura, en faisant $m+n=l$,

$$N = 2mn(l-2),$$
$$R = 2mn[(l-1)(l-2)+mn-4],$$
$$S = 2mn[(l-1)^2-mn+1],$$
$$J = 4mn[2(l-1)(l-2)-mn+1],$$
$$K = 4mn[6(l-2)^2-2(l-2)-(m-1)(n-1)],$$
$$P = 2mn[5(l-1)(l-2)-3mn+4].$$

L'auteur est ainsi conduit à une discussion simple des singularités d'un complexe, en particulier de celles qui se relient aux singularités de la surface singulière.

Chaque ligne singulière est une arête double d'un cône du complexe; si elle est une arête de rebroussement, le point singulier correspondant est un point de la courbe cuspidale; pour les points de la courbe double, le cône du complexe a deux arêtes doubles, etc.

L'auteur tire de ses recherches générales les conséquences auxquelles on était déjà parvenu pour les complexes et les congruences de degré moindre, pour ceux et celles dont les surfaces singulières et les surfaces focales avaient été données par Clebsch [1] sous forme explicite.