BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 141-144

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_141_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ЛИВЕНЦОВЪ (А. И.). — Опытъ систематическаго изложенія функціональнаго счисленія съ однимъ независимымъ перемѣннымъ. (*Математическій Сборникъ*, томъ VIII, выпускъ I.) — Москва, 1876 (¹).

La recherche des solutions particulières, dérivant de l'intégrale générale d'un système d'équations aux dérivées partielles, a donné naissance au Calcul fonctionnel. Les travaux relatifs au Calcul fonctionnel des équations à une seule variable commencèrent à paraître déjà vers la fin du XVIIIe siècle. En 1768, Condorcet, dans une lettre écrite à d'Alembert, indique la possibilité de déterminer les fonctions arbitraires que l'on rencontre dans les intégrales des équations aux dérivées partielles, à l'aide de l'intégration des équations aux différences finies. Il a développé ensuite cette idée dans un Mémoire qu'il a imprimé en 1771. C'est donc à Condorcet qu'appartient l'idée fondamentale d'une liaison entre le Calcul fonctionnel et les différences finies.

En 1773, Monge exposa sa méthode, à l'aide de laquelle on peut ramener les équations fonctionnelles aux équations aux différences finies de premier ordre. Dans la même année parut le remarquable Mémoire de Laplace (²), dans lequel la résolution des équations fonctionnelles de deuxième classe et de premier ordre est ramenée à l'intégration des équations aux différences finies de premier ordre. Herschel applique aussi cette méthode dans un Mémoire imprimé en 1814 (³).

Le Calcul fonctionnel a fait un grand pas en avant, grâce aux recherches de Babbage, dont le Mémoire (⁴) sert de source où l'au-

(¹) LIVENTSOF (A.-I.). — *Essai d'une exposition systématique du Calcul fonctionnel dans le cas d'une seule variable indépendante.* — Moscou, 1876, gr. in-8°, 81 p.

(²) LAPLACE, *Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies.* (*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1773, p. 70.)

(³) HERSCHEL, *Considerations of various points of Analysis.* (*Phil. Transactions of the Royal Society of London*, 1814.)

(⁴) BABBAGE, *An essay towards the calculus of functions.* (*Phil. Trans. of London*, 1815, 1816.)

teur a principalement puisé. L'auteur a profité en outre des travaux de Collins et de Schröder (¹) dans lesquels on donne le développement en série ordonnée suivant les puissances de l'indice d'une fonction donnée d'ordre quelconque; les coefficients du développement sont formés suivant une loi très-compliquée.

On voit, d'après cette courte esquisse, que M. Liventsof a mis de côté toutes les questions relatives à l'affinité du Calcul fonctionnel avec la théorie des intégrales définies et avec les problèmes inverses de l'intégration définie. Il a eu en vue plutôt la méthode que l'étude complète du sujet. Dans les limites qu'il s'était tracées, il donne un exposé suffisamment complet de cette théorie, et son Ouvrage peut servir d'un excellent manuel pour l'étude de celle-ci. Voici un bref aperçu du contenu de ce Mémoire:

L'auteur commence par la résolution du problème fondamental du Calcul fonctionnel: étant donné $\psi(t)$ trouver $\psi^x(t)$. Il expose ici les méthodes de Herschel et de Schröder, fondées sur le théorème de Babbage, et donne ensuite la théorie des équations fonctionnelles. Il appelle *équations de $n^{\text{ième}}$ classe et de premier ordre* les équations de la forme

$$F(x, \psi x, \psi \alpha_1 x, \psi \alpha_2 x, \ldots, \psi \alpha_n x) = 0,$$

où

$$\alpha_1 x, \alpha_2 x, \ldots, \alpha_n x$$

sont des fonctions de x, et *équations de $n^{\text{ième}}$ ordre et de première classe* celles de la forme

$$F(x, \psi x, \psi^2 x, \ldots, \psi^n x) = 0;$$

il commence par l'exposé de la méthode générale de Herschel pour l'intégration des équations de première classe et de $n^{\text{ième}}$ ordre de la forme

$$F(x, \psi x, \psi^2 x, \ldots, \psi^n x) = 0,$$

et du procédé particulier de Herschel pour l'intégration de l'équation

$$\psi^n x = f x,$$

(¹) SCHRÖDER, *Ueber iterirte Functionen.* (*Math. Annalen.*)

où il se borne à la théorie des fonctions réciproques, c'est-à-dire de celles qui satisfont à l'équation

$$\psi^n(x) = x.$$

Dans le Chapitre suivant, l'auteur expose la méthode de Laplace pour l'intégration des équations de deuxième classe et de premier ordre, de la forme

$$F[x,\ \psi\alpha(x),\ \psi\beta(x)] = 0,$$

et il applique cette théorie à la solution du problème connu de Babbage, relatif à la recherche d'une fonction $\psi(x)$ satisfaisant aux conditions

$$\psi(x) = \psi\alpha_1(x) = \psi\alpha_2(x) = \ldots = \psi\alpha_n(x).$$

A l'aide de considérations qui lui sont propres, l'auteur étend la méthode de Laplace aux équations de $n^{\text{ième}}$ classe

$$F[x,\ \psi\alpha_1(x),\ \psi\alpha_2(x),\ \ldots,\ \psi\alpha_n(x)] = 0,$$

et démontre comment le problème se simplifie dans le cas où les équations sont de la forme

$$F[\psi\alpha_1(x),\ \psi\alpha_2(x),\ \ldots,\ \psi\alpha_n(x)] = 0.$$

Il donne ensuite une méthode de résolution des équations de classes et d'ordres supérieurs, fait quelques remarques sur les équations à exposants fractionnaires, et examine certaines formes particulières des équations fonctionnelles, déjà indiquées par Babbage,

$$\psi\{\alpha[\psi\beta(x)]\} = \gamma(x), \quad \psi\alpha(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}.$$

Dans le dernier Chapitre, l'auteur expose la théorie des équations fonctionnelles simultanées

$$F_1[x,\ \psi\alpha(x),\ \psi\beta(x)] = 0,$$
$$F_2[x,\ \psi\alpha_1(x),\ \psi\beta_1(x)] = 0.$$

Le contenu de ce Chapitre est aussi un travail original de l'auteur.

Nous croyons que le Mémoire de M. Liventsof donne, on pourrait presque le dire, le premier exemple sur le Continent d'un exposé systématique de cette branche des Mathématiques.

N.-V. Bougaïef.